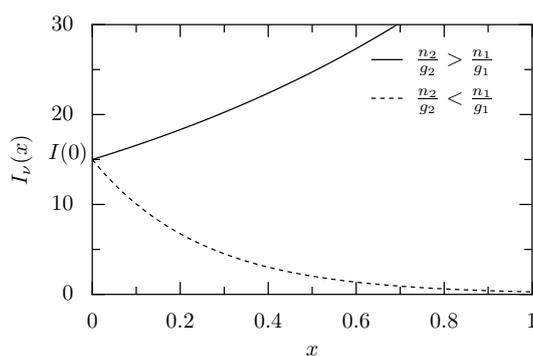


Física del láser

Volumen 1: fundamentos

~~~~~ 1.0.0





FdL

FÍSICA DEL LÁSER

535.13

ALQ

† lomo para ediciones impresas



---

<http://alqua.org/documents/FdL>

José Manuel Guerra Pérez [jmguerra@fis.ucm.es](mailto:jmguerra@fis.ucm.es) <http://alqua.org/people/jmguerra>

---

# Física del láser

---

versión 1.0.0  
15 de abril de 2004



alqua, **madeincommunity**



---

c o p y l e f t

---

Copyright (c) 2004 José Manuel Guerra Pérez.

Este trabajo cae bajo las provisiones de la licencia Atribución-No Comercial-Comparte Igual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/1.0/> o escriba una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

---

**Serie** apuntes

**Área** óptica

**CDU** 535.13

**Editores**

Álvaro Tejero Cantero [alvaro@alqua.org](mailto:alvaro@alqua.org)

Notas de producción

Plantilla `latex-book-es-b.tex`, v. 0.1 (C) Álvaro Tejero Cantero.

▷compuesto con software libre◁

# Índice general

|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Portada</b>                                                     | <b>I</b>   |
| <b>Copyleft</b>                                                    | <b>VI</b>  |
| <b>Índice general</b>                                              | <b>VII</b> |
| <b>1. El campo electromagnético</b>                                | <b>1</b>   |
| 1.1. Descomposición en modos del campo clásico . . . . .           | 1          |
| 1.2. Densidad de modos . . . . .                                   | 4          |
| <b>2. Cuantificación de la radiación</b>                           | <b>7</b>   |
| 2.1. Cuantificación de los operadores . . . . .                    | 7          |
| 2.2. Estados Fock . . . . .                                        | 7          |
| 2.2.1. Autoestados del operador hamiltoniano . . . . .             | 7          |
| 2.2.2. Carácter de los estados Fock . . . . .                      | 10         |
| 2.3. Estados coherentes . . . . .                                  | 10         |
| 2.3.1. Autoestados del operador destrucción . . . . .              | 10         |
| 2.3.2. Número de fotones . . . . .                                 | 11         |
| 2.3.3. Evolución temporal . . . . .                                | 12         |
| 2.4. La radiación isotrópica . . . . .                             | 14         |
| <b>3. La cuantificación de la materia</b>                          | <b>17</b>  |
| 3.1. Átomos hidrogenoides . . . . .                                | 17         |
| 3.2. Sistemas poliatómicos . . . . .                               | 19         |
| <b>4. La evolución temporal de los estados</b>                     | <b>23</b>  |
| 4.1. Introducción . . . . .                                        | 23         |
| 4.2. Evolución temporal en presencia de una perturbación . . . . . | 23         |
| 4.3. El desarrollo perturbativo . . . . .                          | 24         |
| <b>5. Absorción y emisión de radiación</b>                         | <b>27</b>  |
| 5.1. Hamiltoniano del sistema radiación-materia . . . . .          | 27         |
| 5.1.1. Probabilidad de transición . . . . .                        | 29         |
| 5.2. Resonancia . . . . .                                          | 30         |
| 5.3. Los coeficientes de Einstein . . . . .                        | 33         |
| 5.3.1. Probabilidades de los procesos de absorción . . . . .       | 33         |
| 5.3.2. Probabilidades de los procesos de emisión . . . . .         | 36         |

## ÍNDICE GENERAL

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.3.3. Efecto de la polarización . . . . .                         | 37        |
| 5.3.4. Efecto de la degeneración . . . . .                         | 38        |
| 5.3.5. Tiempo de vida radiativo y ensanchamiento natural . . . . . | 38        |
| 5.4. Sistemas moleculares . . . . .                                | 40        |
| 5.4.1. Principio de Franck-Condon . . . . .                        | 40        |
| 5.4.2. Reparto frecuencial de la intensidad . . . . .              | 43        |
| <b>6. Transiciones no radiativas</b> . . . . .                     | <b>47</b> |
| 6.1. Definición y clasificación . . . . .                          | 47        |
| 6.2. Probabilidades de transición . . . . .                        | 47        |
| 6.3. Transiciones no radiativas en gases . . . . .                 | 50        |
| 6.3.1. Probabilidad de transición . . . . .                        | 50        |
| 6.3.2. Ensanchamiento homogéneo. Anchura colisional. . . . .       | 51        |
| 6.3.3. Ensanchamiento inhomogéneo. Anchura Doppler. . . . .        | 53        |
| 6.4. Ensanchamiento combinado. Anchura total. . . . .              | 55        |
| 6.4.1. Convolución de dos perfiles de Lorentz . . . . .            | 56        |
| 6.5. Técnicas de enfriamiento de átomos . . . . .                  | 56        |
| 6.5.1. Haces atómicos . . . . .                                    | 56        |
| 6.5.2. Confinamiento por presión de radiación . . . . .            | 58        |
| <b>7. El modelo probabilístico</b> . . . . .                       | <b>61</b> |
| 7.1. La evolución de la población de los niveles . . . . .         | 61        |
| 7.2. Tiempo de vida radiativo . . . . .                            | 62        |
| <b>8. El campo electromagnético paraxial</b> . . . . .             | <b>65</b> |
| 8.1. La ecuación de ondas . . . . .                                | 65        |
| 8.2. Introducción a la aproximación paraxial . . . . .             | 66        |
| 8.3. Ondas esféricas en la aproximación paraxial . . . . .         | 67        |
| 8.4. Modos gaussianos . . . . .                                    | 70        |
| 8.5. Propiedades de los haces gaussianos . . . . .                 | 73        |
| 8.5.1. Forma del haz . . . . .                                     | 73        |
| 8.5.2. Distribución transversal de la energía . . . . .            | 76        |
| 8.6. Estabilidad de un resonador . . . . .                         | 79        |
| <b>9. Resonadores</b> . . . . .                                    | <b>83</b> |
| 9.1. La función de transferencia de un resonador óptico . . . . .  | 83        |
| 9.2. Frecuencias resonantes de los modos gaussianos . . . . .      | 85        |
| 9.2.1. Batido de modos . . . . .                                   | 88        |
| 9.3. El perfil de los modos en un resonador Fabry-Perot . . . . .  | 89        |
| <b>10. Amplificadores de propagación de radiación</b> . . . . .    | <b>93</b> |
| 10.1. Ecuación de transporte de los fotones . . . . .              | 93        |
| 10.1.1. Pérdidas en la propagación . . . . .                       | 99        |

|                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>11. Pequeña señal y saturación</b>                                          | <b>101</b> |
| 11.1. Balance de poblaciones . . . . .                                         | 101        |
| 11.2. Esquema a tres niveles . . . . .                                         | 103        |
| 11.3. Esquema a cuatro niveles . . . . .                                       | 104        |
| 11.4. Evolución comparada de la inversión . . . . .                            | 104        |
| 11.5. Regímenes de trabajo . . . . .                                           | 105        |
| 11.6. Nivel de ruido del amplificador . . . . .                                | 108        |
| 11.7. Caracterización de un amplificación de radiación . . . . .               | 110        |
| 11.7.1. Método de Silfvast y Deech . . . . .                                   | 111        |
| 11.7.2. Método “de la amplificación relativa” . . . . .                        | 111        |
| <b>12. Láseres de avalancha</b>                                                | <b>115</b> |
| 12.1. Fundamento . . . . .                                                     | 115        |
| 12.2. Generación de la onda de bombeo . . . . .                                | 116        |
| 12.2.1. Línea de Blusalein . . . . .                                           | 116        |
| 12.2.2. Líneas coaxiales formadoras de pulso . . . . .                         | 117        |
| <b>13. Amplificadores resonantes regenerativos</b>                             | <b>119</b> |
| 13.1. Medios con ensanchamiento inhomogéneo . . . . .                          | 122        |
| 13.2. Medios con ensanchamiento homogéneo . . . . .                            | 124        |
| <b>14. El oscilador láser saturado por la emisión espontánea</b>               | <b>127</b> |
| <b>15. Optimización de la salida de un láser</b>                               | <b>133</b> |
| 15.1. Introducción . . . . .                                                   | 133        |
| 15.2. Ecuación de propagación . . . . .                                        | 133        |
| 15.3. Solución numérica y estimación de las pérdidas . . . . .                 | 137        |
| <b>16. El láser de régimen de bombeo pulsado cuasiestacionario</b>             | <b>141</b> |
| <b>17. Dinámica del láser</b>                                                  | <b>145</b> |
| 17.1. Ecuación de balance para la radiación . . . . .                          | 145        |
| 17.2. Escalamiento de las ecuaciones de balance . . . . .                      | 147        |
| 17.3. Estabilidad de la solución estacionaria . . . . .                        | 147        |
| 17.4. La condición umbral en las oscilaciones de relajación . . . . .          | 152        |
| 17.5. El láser de amplificador resonante en régimen de pulso gigante . . . . . | 153        |
| 17.6. Evolución temporal del pulso gigante . . . . .                           | 158        |
| 17.7. Bloqueo de modos ( <i>mode locking</i> ) . . . . .                       | 159        |
| <b>18. Métodos de bombeo</b>                                                   | <b>163</b> |
| 18.1. Bombeo óptico . . . . .                                                  | 163        |
| 18.1.1. Esquema a tres niveles . . . . .                                       | 163        |
| 18.1.2. Esquema a cuatro niveles . . . . .                                     | 165        |
| 18.1.3. Probabilidad de absorción del bombeo . . . . .                         | 167        |
| 18.1.4. Espectro estrecho: bombeo láser . . . . .                              | 168        |

## ÍNDICE GENERAL

|                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------|------------|
| 18.2. Bombeo con lámparas en régimen de destello . . . . .    | 169        |
| 18.2.1. Fundamento de las lámparas de descarga . . . . .      | 169        |
| 18.2.2. Estudio en aproximación de $R = \text{cte}$ . . . . . | 171        |
| 18.2.3. La lámpara como elemento no lineal . . . . .          | 174        |
| 18.3. Bombeo en uniones . . . . .                             | 177        |
| 18.4. Bombeo en descargas . . . . .                           | 179        |
| 18.4.1. Procesos colisionales . . . . .                       | 180        |
| 18.4.2. Difusión y deriva de los iones en un campo . . . . .  | 182        |
| 18.4.3. Campos intermedios . . . . .                          | 185        |
| 18.5. Bombeo electrónico . . . . .                            | 185        |
| <b>Historia</b>                                               | <b>189</b> |
| <b>Creative Commons Deed</b>                                  | <b>191</b> |
| <b>Manifiesto de Alqua</b>                                    | <b>193</b> |
| <b>El proyecto libros abiertos de Alqua</b>                   | <b>197</b> |
| <b>Otros documentos libres</b>                                | <b>201</b> |

# 1 El campo electromagnético

## 1.1. Descomposición en modos del campo clásico

La electrodinámica clásica parte de las ecuaciones de Maxwell, que en ausencia de fuentes ( $\rho = 0, \mathbf{j} = 0$ ) se escriben del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 & \text{div } \mathbf{B} &= 0 & (\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}) \\ \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0 & \text{div } \mathbf{D} &= 0 & (\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Las fuerzas del campo derivan de los potenciales vector  $\mathbf{A}$  y escalar  $\phi$  a través de

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi. \quad (1.2)$$

Introduciendo en las ecuaciones de Maxwell estos potenciales, y teniendo en cuenta que en ausencia de fuentes próximas  $\phi \simeq \text{cte}$ , se obtiene una ecuación de ondas clásica para el potencial vector:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

En las manipulaciones se ha usado  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$  y que en el vacío  $c^{-1} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Ecuaciones análogas pueden obtenerse para  $\mathbf{E}$  y para  $\mathbf{B}$ ; todas ellas admiten soluciones de onda plana del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \mathbf{e} b \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \mathbf{e} \frac{b}{2} \left( e^{-i\varphi} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + e^{i\varphi} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

En estas soluciones,  $\mathbf{e}$  es un vector unitario que es conocido como *vector de polarización*; la raíz es un factor de la amplitud que se ha expresado en esta forma por razones de notación que permitirán simplificar la interpretación de los resultados. En él aparece la magnitud  $V$ , que es el volumen en que podemos considerar confinada la energía de la perturbación. El valor inicial de los fasores del campo es el de los números complejos conjugados

$$a(0) = \frac{b}{2} e^{-i\varphi}, \quad a^*(0) = \frac{b}{2} e^{i\varphi}$$

Así,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 V}} \mathbf{e} \left[ a(0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + a^*(0) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

Si esta expresión ha de ser solución de la ecuación de ondas se ha de verificar la relación de dispersión  $k^2 = \omega^2/c^2$ . Además, dado que  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  y siendo  $\phi \simeq \text{cte}$ , tenemos que  $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$  por lo cual  $\text{div } \partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ . Esto en la solución de onda plana que estamos considerando obliga a

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$$

(condición de transversalidad del campo: los vectores  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e incluso  $\mathbf{B}$  son ortogonales a la dirección de propagación, que es la del vector  $\mathbf{k}$ ).

- Con estas soluciones, e imponiendo unas condiciones de contorno en la superficie del volumen  $V$  podemos construir una base del espacio funcional para el campo electromagnético. Considerando, para simplificar, un recinto de forma cúbica con lado  $L$  ( $V = L^3$ ) y situando el origen en una esquina del cubo se pueden establecer las siguientes condiciones de contorno periódicas (Von Neumann):

$$\mathbf{A}(0, t) = \mathbf{A}(L\mathbf{u}_1, t) = \mathbf{A}(L\mathbf{u}_2, t) = \mathbf{A}(L\mathbf{u}_3, t)$$

En la onda plana se traducen en la siguiente condición sobre  $\mathbf{k}$ ,

$$\mathbf{k}_l \equiv \mathbf{k}_{l_1 l_2 l_3} = \frac{2\pi}{L} (l_1 \mathbf{u}_1 + l_2 \mathbf{u}_2 + l_3 \mathbf{u}_3)$$

donde  $l$  representa la terna de índices  $l_1, l_2, l_3$ , cada uno de los cuales puede asumir cualquier valor entero. A cada una de estas ternas corresponden dos soluciones, con polarizaciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  ortogonales. Estas soluciones se denominan *modos libres del campo electromagnético* en la cavidad. Para abreviar la notación utilizaremos sólo dos índices:  $l$ , que es una abreviatura de  $l_1, l_2, l_3$  y  $\sigma = 1, 2$  para la polarización.

En el instante  $t$  los fasores del campo de un modo son

$$a_{l\sigma}(t) = a_{l\sigma}(0) e^{-i\omega_l t} = (a_{l\sigma}^*(t))^*$$

y llamando a la parte espacial

$$\mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{e}_{l\sigma} \frac{e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}}, \quad |\mathbf{e}_{l\sigma}| = 1 \quad (1.4)$$

el campo del modo se escribirá abreviadamente así

$$\mathbf{A}_{l\sigma}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l \epsilon_0}} [a_{l\sigma}(t) \mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) + a_{l\sigma}^* \mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r})]. \quad (1.5)$$

A veces se denomina *parte de frecuencia positiva* al primer término y *parte de frecuencia negativa* al segundo.

Es fácil comprobar que los modos están ortonormalizados,

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{l'\sigma'}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= \delta_{ll'}\delta_{\sigma\sigma'} \\ \int_V \mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{l'\sigma'}^*(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= 0 \\ \int_V \mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{l'\sigma'}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= 0\end{aligned}$$

así que un campo electromagnético cualquiera confinado dentro del volumen  $V$  se puede expresar mediante una superposición de modos de onda plana en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l\epsilon_0}} [a_{l\sigma}(t)\mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) + a_{l\sigma}^*\mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r})]$$

Empleando las relaciones 1.1 y 1.2 tenemos los campos de fuerza:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l^2}{2\omega_l\epsilon_0}} [a_{l\sigma}(t)\mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) - a_{l\sigma}^*\mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r})] \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\mathbf{k}_l}{|\mathbf{k}_l|} \wedge i \sum_{l,\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l^2}{2\omega_l\epsilon_0}} [a_{l\sigma}(t)\mathbf{u}_{l\sigma}(\mathbf{r}) - a_{l\sigma}^*\mathbf{u}_{l\sigma}^*(\mathbf{r})]\end{aligned}$$

Podemos ahora formalmente introducir dos variables canónicamente conjugadas,  $q_l$  y  $p_l$  como ciertas combinaciones lineales de los fasores:

$$q_{l\sigma} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} (a_{l\sigma}^* + a_{l\sigma}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_l}} b_{l\sigma} \cos(\omega_l t + \varphi_{l\sigma}) \quad (1.6)$$

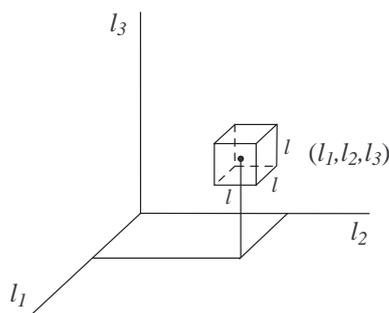
$$p_{l\sigma} \equiv i \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}} (a_{l\sigma}^* - a_{l\sigma}) = -\sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2}} b_{l\sigma} \sin(\omega_l t + \varphi_{l\sigma}) \quad (1.7)$$

Nótese que  $p_{l\sigma} = dq_{l\sigma}/dt$ : estas dos variables se comportan respectivamente como la posición y el momento en la solución de la ecuación de un oscilador armónico mecánico de masa unidad. En efecto, puede comprobarse que

$$\frac{d^2 q_{l\sigma}}{dt^2} + \omega_l^2 q_{l\sigma} = 0.$$

Utilizando las nuevas variables en las expresiones de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  así como las condiciones de ortonormalidad de las distribuciones espaciales, la energía total del campo dentro del volumen  $V$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,\sigma} (p_{l\sigma}^2 + \omega_l^2 q_{l\sigma}^2)\end{aligned}$$



**Figura 1.1:** En el espacio de momentos, asociamos un volumen unidad a cada dos modos (con polarizaciones  $\sigma = 1, 2$ ).

Vemos pues que cada modo da al campo su energía como un oscilador armónico. Así pues desde el punto de vista energético el campo aparece como una superposición de osciladores armónicos.

En este punto es conveniente apuntar que las condiciones de contorno empleadas para generar la base del espacio funcional pueden ser muy diversas. Pueden utilizarse condiciones que modelan situaciones físicamente realizables o condiciones de naturaleza puramente matemática como las que hemos usado anteriormente. No obstante la densidad de modos de la cavidad en el espacio de fases posición-momento  $(\mathbf{r}, \hbar\mathbf{k})$  es independiente de las condiciones de contorno. Esto es importante porque como acabamos de ver el hamiltoniano del campo es la suma de los hamiltonianos asociados a los modos de la base,  $H_{l\sigma} = p_{l\sigma} + \omega_l^2 q_{l\sigma}$ .

## 1.2. Densidad de modos

Como hemos visto el momento  $\hbar\mathbf{k}_l$  de un modo está determinado por los tres números enteros  $l_1, l_2, l_3$  y por su polarización  $\sigma = 1, 2$ .

Un punto de un espacio tridimensional, cuyo sistema de referencia lo constituyen los ejes  $l_1, l_2, l_3$ , con coordenadas enteras representa un valor  $\mathbf{k}_l$ , es decir, dos modos con las polarizaciones  $\sigma = 1, 2$ . Se puede imaginar una malla de cubos de lado unidad centrados en las coordenadas enteras  $(l_1, l_2, l_3)$  como el de la figura 1.1, con dos modos por cubo, o unidad de volumen.

Entonces el número de modos en un volumen  $dl_1 dl_2 dl_3$  será  $dN = 2 dl_1 dl_2 dl_3$ . Cambiando de variables a  $k_i = 2\pi l_i / L$  se tiene, en coordenadas cartesianas del espacio de momentos:

$$d^3N = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 dk_1 dk_2 dk_3 = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3V_k$$

Empleando coordenadas esféricas  $(k, \theta, \varphi)$ :

$$k_1 = k \sin \theta \cos \varphi$$

$$k_2 = k \sin \theta \sin \varphi$$

$$k_3 = k \cos \theta,$$

se obtiene la dependencia del volumen del espacio de momentos en el módulo del vector de ondas,  $k$ :

$$d^3V_k = dk_1 dk_2 dk_3 = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = k^2 dk d^2\Omega,$$

que se puede escribir en términos de la frecuencia utilizando la relación de dispersión. Concretamente, suponiendo la relación lineal  $k = \omega/c$ ,  $dk = d\omega/c$  se tiene <sup>1</sup>

$$d^3V_k = \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d^2\Omega.$$

Finalmente, el número de modos cuyas frecuencias angulares están comprendidas entre  $\omega$  y  $\omega + d\omega$  en la cavidad que encierra la radiación y cuyas direcciones de propagación están dentro del ángulo sólido  $d^2\Omega$  depende cuadráticamente de la frecuencia angular:

$$d^3N = 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{\omega^2}{c^3} d\omega d^2\Omega$$

Dado que el volumen de la cavidad es  $V = L^3$  el número de modos con cualquier dirección de propagación será ( $\omega = 2\pi\nu$ ):

$$dN = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d^3N = \frac{V}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} d\omega = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu,$$

y por lo tanto, la densidad *de modos* en la cavidad por unidad de volumen e intervalo de frecuencia resulta

$$\rho_\nu(\nu) = \frac{dN}{V d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (1.8)$$

Nótese que es una densidad válida para el volumen total, pero no necesariamente para subvolúmenes. También es interesante apuntar que aunque esta densidad ha sido deducida para el caso de las soluciones con simetría cúbica en la cavidad, la misma expresión se puede obtener con cualquier otra geometría en la cavidad que encierra a la radiación y con cualquier clase de condiciones de contorno en la superficie de la cavidad siempre que el volumen sea finito.

**Ejemplo** Para hacernos una idea de los órdenes de magnitud en la ec. 1.8 en el caso de la radiación en frecuencias ópticas, supongamos que la longitud de onda fuese  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ , es decir  $\nu = c/\lambda = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ . Entonces  $\rho_\nu(\nu) = 0.23 \text{ Hz}^{-1} \text{ cm}^{-3}$ . Así el número de modos que en un intervalo de frecuencias  $\Delta\nu = \nu/10^{10} \simeq 5 \times 10^4 \text{ Hz}$  (mil veces menor que el mínimo actualmente alcanzado), en un volumen relativamente pequeño de  $1 \text{ cm}^{-3}$  sería  $N = \rho_\nu(\nu) \Delta\nu \simeq 10^4 \text{ cm}^{-3}$ .

<sup>1</sup>En lo que sigue,  $c$  es la velocidad de la luz en el interior del volumen  $V$ . Sólo cuando el índice de refracción del medio es  $\mu = 1$  coincide con el valor en el vacío, que denotamos  $c_0$ .

## *1 El campo electromagnético*

Como se puede apreciar en el ejemplo anterior, incluso en cavidades pequeñas y en intervalos de frecuencia reducidos, el número de modos es tan elevado que podemos considerar que forman una distribución continua, como se ha supuesto al deducir 1.8. Sólo en cavidades microscópicas podría no ser aplicable dicha expresión, y entonces deberían considerarse individualizados los modos.

## 2 Cuantificación de la radiación

### 2.1. Cuantificación de los operadores

Hemos visto que la energía de una configuración arbitraria de radiación electromagnética puede ser obtenida como la suma de las energías de osciladores asociados a modos o configuraciones espaciales del campo. El hamiltoniano de uno de estos osciladores, de frecuencia  $\omega$ , es

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.1)$$

En él  $p$  y  $q$  son magnitudes oscilantes con la frecuencia  $\omega$  y proporcionales a la amplitud  $b$  del campo. Podemos pues interpretar que el oscilador está asociado a la oscilación de la amplitud del campo electromagnético de la onda que constituye el modo.

Si los modos de radiación son formalmente osciladores, la cuantificación del campo de radiación se podrá realizar mediante la cuantificación habitual de un oscilador armónico en mecánica cuántica: asociando a los fasores  $a$  y  $a^*$  los *operadores de creación y aniquilación*  $a$  y  $a^\dagger$  de cuantos de energía en el oscilador. Estos nuevos operadores se expresan en función de los operadores posición y momento como los fasores  $a$  y  $a^*$  en función de las variables oscilantes canónicamente conjugadas  $q$  y  $p$  (ecs. 1.6, 1.7). Por medio de dicha expresión explícita se puede probar la usual relación de conmutación,

$$[a, a^\dagger] = 1$$

y utilizando 2.1 se puede escribir

$$H = \frac{1}{2} \hbar\omega (a^\dagger a + a a^\dagger)$$

En virtud del valor del conmutador,  $a a^\dagger = 1 - a^\dagger a$ , con lo que se obtiene otra expresión, más habitual, del hamiltoniano:

$$H = \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2). \quad (2.2)$$

### 2.2. Estados Fock

#### 2.2.1. Autoestados del operador hamiltoniano

Los autoestados de la energía son las autofunciones  $|n\rangle$  que cumplen

$$\hbar\omega (a^\dagger a + 1/2) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

## 2 Cuantificación de la radiación

también son autoestados del *operador número*,  $N \equiv a^\dagger a$ , aunque con distinto autovalor:

$$N|n\rangle = a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle \quad (2.3)$$

y están ortonormalizados:  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ . La relación entre  $H$  y operadores  $a$  y  $a^\dagger$  nos conduce a interesarnos por las propiedades de estos últimos.

Del conmutador de  $a$  y  $a^\dagger$  podemos obtener fácilmente

$$\begin{aligned} [a, N] &= a a^\dagger a - a^\dagger a a = (1 + a^\dagger a)a - a^\dagger a a = a \\ [a^\dagger, N] &= a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger(1 + a^\dagger a) = -a^\dagger \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= (aN - a)|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle \\ Na^\dagger|n\rangle &= (a^\dagger N + a^\dagger)|n\rangle = (n + 1)a^\dagger|n\rangle \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} a|n\rangle &\propto |n - 1\rangle \rightarrow a|n\rangle = A|n - 1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &\propto |n + 1\rangle \rightarrow a^\dagger|n\rangle = B|n + 1\rangle \end{aligned}$$

Si asumimos que  $|n - 1\rangle$  y  $|n + 1\rangle$  están normalizados, las normas de  $a|n\rangle$  y de  $a^\dagger|n\rangle$  serán

$$\begin{aligned} \langle n|a^\dagger a|n\rangle &= n = |A|^2 \rightarrow A = \sqrt{n} \\ \langle n|aa^\dagger|n\rangle &= \langle n|(1 + a^\dagger a)|n\rangle = n + 1 = |B|^2 \rightarrow B = \sqrt{n + 1} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de autovalores completas para los operadores destrucción y creación son pues:

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n - 1\rangle & (2.4) \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle & (2.5) \end{aligned}$$

con  $a|0\rangle = 0$  y  $n \geq 0$ , lo cual se justifica por el carácter positivo de la norma al cuadrado de  $a|n\rangle$ ,  $(\langle n|a^\dagger)(a|n\rangle)$ .

Para que  $n$  sea siempre positivo deberá ser entero, pues en caso contrario podríamos encontrar un número  $k$  lo suficientemente grande como para que

$$a^k|n\rangle = \sqrt{n(n-1)\cdots(n-k+1)}|n-k\rangle \quad (n-k < 0),$$

sin pasar por el vector  $|0\rangle$ , y eso sería absurdo. Si  $n$  es entero cuando  $k = n$  se genera el vector  $|0\rangle$  y ya no se puede obtener  $n - k < 0$  pues  $a|0\rangle = 0$ . Por lo tanto,  $n = 0, 1, 2, \dots$  y los autovalores de la energía son

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Los estados  $|n\rangle$ , autoestados de la energía en el modo, se denominan *estados de Fock*. Los elementos de matriz de  $a$  y  $a^\dagger$  son

$$\langle n'|a|n\rangle = \sqrt{n}\delta_{n',n-1} \quad (2.6)$$

$$\langle n'|a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{n',n+1} \quad (2.7)$$

Los autoestados de la base de Fock los podemos representar en su propia base:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_n \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \dots$$

así como los operadores destrucción, creación y número:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & & \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a^\dagger a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

En el conjunto de la radiación los modos son independientes, pues el hamiltoniano total  $H_r$  es la suma de los hamiltonianos de todos los modos y en cada uno de estos hamiltonianos los operadores actúan en el espacio de Hilbert asociado al modo en cuestión.

$$H_r = \sum_{l,\sigma} H_{l\sigma} = \sum_{l,\sigma} \hbar\omega_l \left( a_{l\sigma}^\dagger a_{l\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

Los autovectores de  $H_r$  son los vectores  $|\phi\rangle$  que cumplen  $H_r|\phi\rangle = E_\phi|\phi\rangle$ , lo que implica

$$|\phi\rangle \equiv |n_{l'\sigma'}\rangle \otimes |n_{l''\sigma''}\rangle \otimes \dots = |n_{l'\sigma'} n_{l''\sigma''} \dots\rangle$$

$$E_\phi = E_{n_{l'\sigma'}} + E_{n_{l''\sigma''}} + \dots = \sum_{l\sigma} \hbar\omega_l \left( n_{l\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

Es decir el espacio de Hilbert de la radiación será el producto tensorial de los espacios de Hilbert asociados a todos los modos. Entonces

$$I \otimes \dots \otimes I \otimes \dots \otimes a_{l\sigma}^\dagger \otimes I \dots |\dots n_{l\sigma} \dots\rangle = \sqrt{n_{l\sigma} + 1} |\dots n_{l\sigma} + 1 \dots\rangle$$

$$I \otimes \dots \otimes I \otimes \dots \otimes a_{l\sigma} \otimes I \dots |\dots n_{l\sigma} \dots\rangle = \sqrt{n_{l\sigma}} |\dots n_{l\sigma} - 1 \dots\rangle$$

$$I \otimes \dots \otimes I \otimes \dots \otimes N_{l\sigma} \otimes I \dots |\dots n_{l\sigma} \dots\rangle = n_{l\sigma} |\dots n_{l\sigma} \dots\rangle$$

## 2 Cuantificación de la radiación

Éste es entonces el espacio de Fock de la radiación si la base es la formada por los vectores  $|n_{l'\sigma'} n_{l''\sigma''} \dots\rangle$ . Finalmente y como es lógico se tiene que verificar la relación de cierre en esta base

$$\sum_{l'\sigma'} \sum_{l''\sigma''} \dots (|n_{l'\sigma'} n_{l''\sigma''} \dots\rangle \langle n_{l'\sigma'} n_{l''\sigma''} \dots|) = I.$$

### 2.2.2. Carácter de los estados Fock

Hemos comprobado que al cuantificar la radiación de un modo aparecen los autoestados de la energía o estados Fock  $|n\rangle$ . Pero ¿cómo sería el campo eléctrico en el modo cuando la radiación que contiene está en uno de estos estados?. Para determinarlo, calculamos el valor esperado del campo  $\mathbf{E}$ :

$$\langle n | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0}} \left[ \langle n | a | n \rangle \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \langle n | a^\dagger | n \rangle \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \right]$$

En virtud de las propiedades de los operadores creación y destrucción y de la ortonormalidad de la base,

$$\langle n | \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = \mathbf{0}$$

Este campo tiene pues un valor esperado nulo y por tanto tiene bien poco que ver con el campo clásico de la radiación que en cada punto y en cada instante es en general distinto de cero. Como el campo oscilante de la onda electromagnética clásica es un buen modelo del campo emitido por los emisores naturales, debemos concluir que los estados Fock no son fáciles de generar y tienen un carácter muy poco clásico. En efecto, en estados Fock el número de fotones está bien determinado (ec. 2.3). Al determinar perfectamente la partícula, perdemos conocimiento de su dimensión ondulatoria.

Nótese que hemos cuantificado la energía de una onda extendida a *toda* la cavidad: en esta cuantificación no se puede definir la posición del fotón, porque no la tiene. El fotón no tiene función de onda; es una partícula *no local*.

## 2.3. Estados coherentes

### 2.3.1. Autoestados del operador destrucción

Tratando de encontrar estados de la radiación en el modo que tengan una imagen más próxima a la clásica vamos a estudiar los autoestados del operador  $a$ , es decir, unos estados  $|\alpha\rangle$  tales que

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Siendo  $a$  un operador no hermítico, es de esperar que sus autovalores puedan ser complejos. Como ya conocemos el álgebra que permite calcular con los estados Fock, vamos a tratar de escribir el estado  $|\alpha\rangle$  en base Fock utilizando la relación de cierre

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \alpha \rangle |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) |n\rangle$$

Para conocer este desarrollo debemos calcular explícitamente los coeficientes  $c_n(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\alpha) a|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\alpha) \sqrt{n} |n-1\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha c_n(\alpha) |n\rangle = \alpha|\alpha\rangle \end{aligned}$$

la igualación de los coeficientes entre ambos desarrollos da lugar a una relación de recurrencia

$$c_{n+1}(\alpha) \sqrt{n+1} = \alpha c_n(\alpha)$$

que se utiliza para calcular todos los coeficientes a partir del primero:

$$c_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} c_0, \quad c_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} c_1 = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2} \times 1} c_0, \quad \dots \quad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

La expresión de un estado coherente en base de estados Fock es:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

El valor hasta ahora indeterminado del primer coeficiente  $c_0$  se puede calcular de modo que los estados  $|\alpha\rangle$  estén normalizados. Así

$$1 = \langle\alpha|\alpha\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \alpha^m}{\sqrt{n!} m!} \langle m|n\rangle = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |c_0|^2 e^{|\alpha|^2},$$

es decir,

$$|c_0|^2 = e^{-|\alpha|^2}$$

y con la adecuada elección de la fase inicial:

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

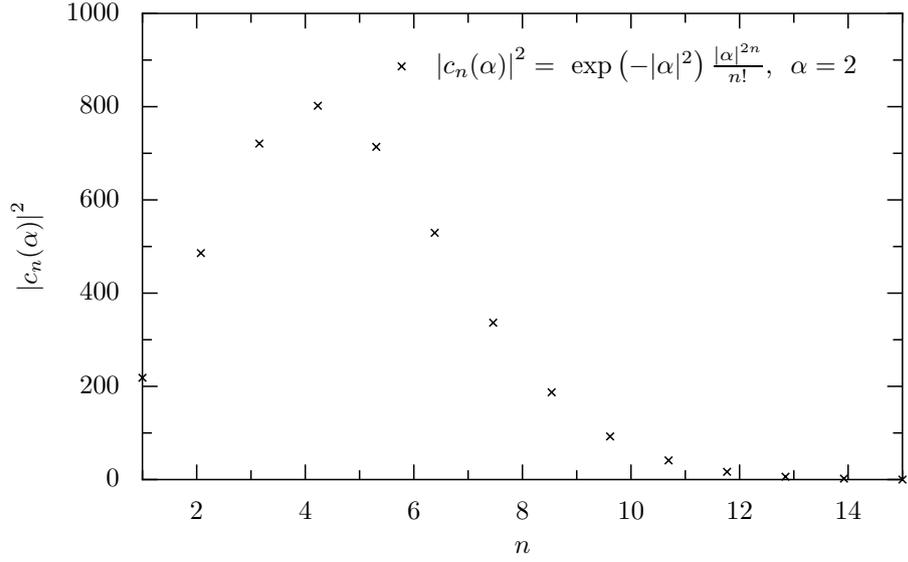
Por tanto

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

### 2.3.2. Número de fotones

La probabilidad de obtener en una medida de la energía  $n$  cuantos  $h\nu$  en el modo será

$$|c_n(\alpha)|^2 = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}.$$



**Figura 2.1:** La distribución de probabilidad sobre el número de cuantos es la distribución de Poisson.

Vemos pues que en estos estados el número de cuantos de energía  $h\nu$  no está determinado. El número medio de cuantos en el modo es:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha \langle \alpha | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

escribiendo el autovalor en forma módulo-argumental:

$$\alpha = |\alpha| e^{-i\varphi} = \langle n \rangle^{1/2} e^{-i\varphi}$$

y

$$|c_n(\langle n \rangle)|^2 = e^{-\langle n \rangle} \frac{\langle n \rangle^n}{n!}.$$

### 2.3.3. Evolución temporal

El operador unitario de evolución temporal para un modo (hamiltoniano 2.2) es:

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) = \exp\left[-i\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) t\right]$$

Haciendo evolucionar  $|\alpha(0)\rangle$  mediante  $U(t)$  obtenemos  $|\alpha(t)\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})t} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n + \frac{1}{2})t} |n\rangle \end{aligned}$$

Este estado sigue siendo un estado coherente pues

$$\begin{aligned}
 a|\alpha(t)\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \alpha |n\rangle \\
 &= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \sqrt{n} |n-1\rangle \\
 &= \alpha e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n-1\rangle \\
 &= \alpha e^{-i\omega t} |\alpha(t)\rangle
 \end{aligned}$$

Entonces llamando

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} = \langle n \rangle^{\frac{1}{2}} e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

se tiene

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle,$$

es decir, que en el transcurso del tiempo el estado cambia añadiendo a la fase inicial del autovalor la fase  $\omega t$ .

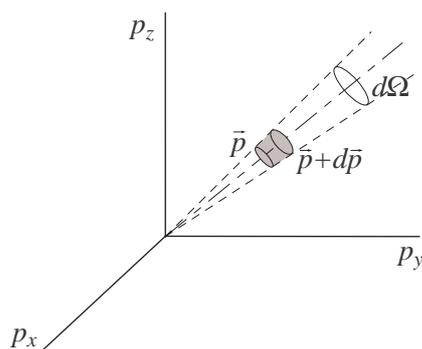
Es fácil ver que aunque los estados coherentes no son ortogonales, con ellos se tiene un conjunto de generadores del espacio de Hilbert y del modo con una apropiada relación de cierre en el plano complejo de los autovalores  $\alpha$ .<sup>1</sup> Se dice que es un conjunto de vectores *sobrecompleto*, pues no es linealmente independiente. En consecuencia, por ejemplo, la fórmula usual de la traza no es válida para ellos.

Si en un estado  $|\alpha(t)\rangle$  calculamos el valor esperado de campo  $\mathbf{E}$ , empleando la definición 1.4 y  $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha(t) | \mathbf{E} | \alpha(t) \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \left[ \langle \alpha(t) | a | \alpha(t) \rangle \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \langle \alpha(t) | a^\dagger | \alpha(t) \rangle \mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \right] \\
 &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} [\alpha(t) \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \alpha^*(t) \mathbf{u}^*(\mathbf{r})] \\
 &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} e \langle n \rangle^{\frac{1}{2}} \left[ e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \varphi)} - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \varphi)} \right] \\
 &= -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} e \langle n \rangle^{\frac{1}{2}} 2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t - \varphi)
 \end{aligned}$$

Es decir, que en el estado coherente el valor esperado del campo es el de una onda plana clásica; la fase del autovalor  $\alpha(t)$  es la fase del campo clásico y su módulo guarda relación con el valor esperado del número de fotones. Éste es indeterminado en los estados coherentes, mientras que la onda queda perfectamente definida, al revés que en los estados Fock.

<sup>1</sup>La relación de cierre es  $\pi^{-1} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = I$ , como se puede comprobar a partir de la expresión explícita para  $|\alpha\rangle$  en términos de  $|n\rangle$  integrando en polares.



**Figura 2.2:** Pequeño volumen en el espacio de momentos correspondiente a un intervalo de momento  $dp$  y a un intervalo de ángulo sólido  $d^2\Omega$ .

Por tanto, cuando consideramos la radiación producida por fuentes naturales, el estado coherente puede representarla de una forma tan precisa como pueda hacerlo la onda monocromática clásica (aunque la energía tendrá oscilaciones cuánticas alrededor de  $\langle E \rangle$ ). A este respecto conviene resaltar que el estado del campo es independiente de la geometría de la distribución espacial del modo de la radiación, que esencialmente está determinada por las condiciones de contorno que se le imponen a la ecuación de ondas espacial.

## 2.4. La radiación isotrópica

Imaginemos una configuración del campo de radiación en la que su energía pueda ser considerada uniformemente distribuida en promedio en todos los puntos del volumen  $V$  que ocupa. Supongamos además que todas las orientaciones de la polarización y de la dirección de propagación, en cada punto del espacio y en cada instante de tiempo son equiprobables. Dicho de otro modo, que cambian con tal rapidez que sus cambios no pueden ser seguidos por los aparatos de medida, para los cuales todas las orientaciones están presentes en cada instante. Teniendo en cuenta la relación entre la frecuencia de la radiación y el momento lineal de sus partículas,  $p = h\nu/c$ , tendremos que la composición espectral de la radiación implica una distribución de ésta en el espacio de momentos.

Seleccionemos ahora los fotones cuyos momentos están orientados dentro de un ángulo sólido  $d^2\Omega$  y con su momento entre  $p$  y  $p + dp$ , como se ilustra en la figura 2.2.

El volumen que estos fotones ocupan en el espacio de fases es, considerando solamente una polarización:

$$d^3V_f = V p^2 dp d^2\Omega = 2V \frac{h^3 \nu^2}{c^3} d\nu d^2\Omega.$$

En la teoría cuántica, según el principio de incertidumbre de Heisenberg, el volumen que ocupa en el espacio de las fases el estado de una partícula es  $\Delta V_f = h^3$ . Así es que el número de distribuciones en posiciones y momentos que caben en el volumen del espacio

de fases  $d^6V_f$  será el número de modos en el volumen  $V$  que se propagan dentro de  $d^2\Omega$  con sus frecuencias comprendidas entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$ :

$$\frac{d^3V_f}{\Delta V_f} = \frac{\nu^2}{c^3} V d\nu d^2\Omega$$

Pero la partícula por cada distribución espacial puede tener dos polarizaciones, por lo que el número de modos que se propagan en todas las direcciones ( $\iint d^2\Omega = 4\pi$ ) con sus frecuencias entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es:

$$dN = \iint d^3N = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu$$

Y la densidad de modos por unidad del volumen  $V$  y de intervalo de frecuencia es

$$\rho_\nu(\nu) = \frac{dN}{V d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

exactamente la misma que hemos deducido en el caso de la cavidad de simetría cúbica para los modos de onda plana. Este razonamiento confirma la universalidad de esta distribución.

Los modos de la radiación obedecen a la dinámica de los osciladores, y en una situación de equilibrio térmico el operador densidad que describe la estadística de un colectivo de sistemas cuyo hamiltoniano individual es  $H$  se escribe así<sup>2</sup>:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp(-H/k_B T)}{\text{tr} \exp(-H/k_B T)}.$$

Este operador permite calcular la energía media de un modo:  $\langle H \rangle = \text{tr} \hat{\rho} H$ , con  $H$  dado por 2.2.

La energía media de un modo es, pues, en términos de la variable  $x = \hbar\omega/k_B T$ :

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-x(a^\dagger a + 1/2)} \hbar\omega (a^\dagger a + 1/2) | n \rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-x(a^\dagger a + 1/2)} | n \rangle} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega (n + 1/2) e^{-x(n+1/2)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(n+1/2)}} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega n e^{-xn}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn}} + \frac{1}{2} \hbar\omega \end{aligned}$$

<sup>2</sup>La ignorancia que tenemos acerca de colectivos estadísticos es de naturaleza clásica, es decir no es estructural como la incertidumbre cuántica, sino fruto de las limitaciones experimentales y/o de cómputo.

## 2 Cuantificación de la radiación

pasando al primer miembro la *energía del punto cero*, que está presente incluso habiendo cero fotones, es decir, en el vacío:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle - \frac{1}{2} \hbar \omega &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \hbar \omega n e^{-xn}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn}} \\ &= -\hbar \omega \frac{\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn}} = \hbar \omega \frac{d}{dx} \ln \left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

pero

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn} \right)^{-1} = \left[ (1 - e^{-x})^{-1} \right]^{-1} = (1 - e^{-x})$$

Por tanto, deshaciendo el cambio de variable,

$$\begin{aligned} \langle H \rangle - \frac{1}{2} \hbar \omega &= \hbar \omega \frac{d}{dx} \ln (1 - e^{-x}) = \hbar \omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \\ &= \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} = \frac{h \nu}{\exp(h \nu / k_B T) - 1} \end{aligned}$$

Si ésta es la energía media de un modo en equilibrio térmico, la densidad *de energía* de la radiación por unidad de volumen e intervalo de frecuencia será el producto de esta magnitud y la densidad frecuencial de modos dada por 1.8:

$$u_{\nu}(\nu) = \langle H \rangle \rho_{\nu}(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h \nu / k_B T) - 1} + \frac{1}{2} h \nu \rho_{\nu}(\nu) \quad (2.8)$$

El primer término es la distribución de Planck para la radiación de equilibrio térmico y el segundo la energía electromagnética del vacío. Si hubiésemos utilizado el teorema de equipartición,  $\langle H \rangle = k_B T$  habríamos obtenido la ley clásica del cuerpo negro (Rayleigh-Jeans).

# 3 La cuantificación de la materia

## 3.1. Átomos hidrogenoides

Los átomos más simples, del tipo del hidrógeno (un sólo electrón), considerados en el sistema del centro de gravedad con masa reducida  $\mu$  y prescindiendo del espín se reducen al estudio una partícula en un potencial coulombiano. Su ecuación de Schrödinger es:

$$H \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}), \quad H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.1)$$

Las soluciones de esta ecuación como en todos los casos de potenciales centrales están separadas en parte angular (los armónicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ ) y parte radial,  $R_{nl}(r)$ :

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

La parte radial depende del potencial central; para el Hidrógeno ha de verificar

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2(rR)}{dr^2} + \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} \right) (rR) = E_n(rR)$$

donde el término dependiente del número cuántico angular se denomina *centrífugo*. La resolución de esta ecuación permite obtener el espectro de energías  $E_n$  de forma exacta:

$$E_n = - \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\mu e^2}{2n^2 \hbar^2}.$$

En el caso de un átomo multielectrónico se emplea normalmente la *aproximación de un electrón*. Como punto de partida para esta aproximación podemos separar el hamiltoniano atómico en una suma de hamiltonianos de átomo de Hidrógeno, cada uno correspondiente a la energía de un electrón individual frente al núcleo de carga  $Ze$ , y las energías entre los electrones estimadas separadamente. Así escribiremos

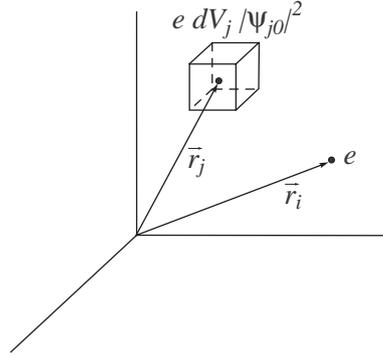
$$H = H_0 + V_{ee}$$

Con la notación  $\mathbf{r}_i$  para las coordenadas del  $i$ -ésimo electrón tenemos

$$H_0(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n) = H_{01}(\mathbf{r}_1) + H_{02}(\mathbf{r}_2) + \dots + H_{0n}(\mathbf{r}_n) = \sum_{i=1}^n H_{0i}(\mathbf{r}_i)$$

donde cada  $H_{0i}$  es del tipo 3.1:

$$H_{0i} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_i - \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 r_i}$$



**Figura 3.1:** La carga en un pequeño recinto es el producto de la densidad de carga  $e|\varphi_{j0}|^2$  por el volumen del recinto,  $d^3V_j$ .

Los autoestados de estos hamiltonianos hidrogenoides son esencialmente los conocidos del átomo de Hidrógeno. Su ecuación de autovalores es

$$H_{0i}(\mathbf{r}_i) \varphi_{i0}(\mathbf{r}_i) = E_{i0} \varphi_{i0}(\mathbf{r}_i)$$

y la del sistema total sin considerar la perturbación debida a la interacción interelectrónica  $V_{ee}$  es:

$$H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0$$

En términos de las funciones de onda y energías del problema individual, la función de onda y la energía totales se escriben así:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \varphi_{10}(\mathbf{r}_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_{n0}(\mathbf{r}_n) \\ E_0 &= E_{10} + \cdots + E_{n0} \end{aligned}$$

Asumiendo la carga del electrón repartida en el espacio en proporción a la onda de probabilidad podemos calcular con estas funciones el potencial que produce sobre un electrón  $i$  el conjunto de electrones  $j = 1 \dots n, j \neq i$  del siguiente modo (figura 3.1):

$$V_{i0}(\mathbf{r}_i) = \sum_{j \neq i} \int \frac{e^2 |\varphi_{j0}(\mathbf{r}_j)|^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} d^3V_j$$

donde  $\varphi_{j0}$  viene de la ecuación de autovalores de un electrón.

Con este potencial podemos escribir la ecuación del electrón  $i$ . En efecto, en este orden de aproximación,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i - \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r_i} + V_{i0}(r_i) \right] \varphi_{i1}(\mathbf{r}_i) = E_{i1} \varphi_{i1}(\mathbf{r}_i)$$

En esto consiste la aproximación de un electrón: sustituir  $V_{ee}$  por el efecto promedio de todos los electrones. La solución (generalmente numérica) de estas ecuaciones nos

permite calcular un nuevo grupo de autofunciones  $\varphi_{i1}$  que ya tiene en cuenta el potencial mutuo entre los electrones. Con estas autofunciones se puede volver a calcular el potencial sobre  $i$  debido a los otros electrones:

$$V_{i1}(\mathbf{r}_i) = \sum_{i \neq j} \int \frac{e^2 |\varphi_{j1}(\mathbf{r}_j)|^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} d^3V_j$$

Que ahora será más exacto que el  $V_{i0}$  que producían las funciones  $\varphi_{i0}$ . El proceso se puede repetir iterativamente hasta que las autofunciones y los potenciales se reproduzcan y sean autoconsistentes (*método de Hartree*).

Es importante apuntar que el conjunto de funciones hidrogenoideas  $\varphi_{i0}(\mathbf{r}_i)$  tomadas para formar  $\varphi_0$  debe ser tal que al estar ocupados por los electrones respeten el principio de exclusión de Pauli; es decir, que no haya más de dos electrones (con espines opuestos) en cada estado  $\varphi_{i0}$ . Cuando se considera esta restricción, el método autoconsistente pasa a denominarse *método de Hartree-Fock*.

## 3.2. Sistemas poliatómicos

Los átomos que en último término constituyen la materia se agrupan formando agregados de complejidad variable: van desde unos pocos (moléculas), hasta del orden de  $10^{23}$  o más (sólidos), a veces con estructuras ordenadas (cristales).

En los sistemas polielectrónicos se asume que el corazón atómico formado por el núcleo y los electrones de las capas internas (*core*), permanece inalterado dentro del conjunto. Es en este sentido en el que los átomos que lo forman conservan una cierta individualidad. El conjunto de los corazones atómicos forma una estructura de iones positivos, que genera un potencial en el que se mueven los electrones de la última capa de los átomos originales. Estos son los que mantendrán unidos a los iones positivos. Consideremos entonces el sistema poliatómico como formado por los corazones atómicos.

Si llamamos  $\mathbf{x}_i$  a las coordenadas de los electrones corticales y  $\mathbf{q}_i$  a las de los corazones atómicos el hamiltoniano del sistema se puede escribir como una suma,  $H = T_e + T_n + U$  donde

$$T_e(x) \equiv \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{x}_i} \quad (\text{energía cinética } e^-)$$

$$T_n(q) \equiv \sum_j -\frac{\hbar^2}{2M_j} \Delta_{\mathbf{q}_j} \quad (\text{energía cinética corazones})$$

$$U(x, q) \equiv U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots) \quad (\text{interacción corazones-corteza})$$

Y la ecuación de Schrödinger del sistema poliatómico se puede escribir

$$(T_e + T_n + U) \psi(x, q) = E \psi(x, q).$$

En un sistema poliatómico en equilibrio todos los componentes deben estar en un mínimo de potencial. Si se apartan del fondo del pozo de potencial, la fuerza que actúa

en pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio es

$$\begin{aligned} F_e &= - m\omega_e^2 \Delta x \\ F_n &= - M\omega_n^2 \Delta q \end{aligned}$$

Pero como los potenciales que afectan a los electrones exteriores y corazones son de origen coulombiano y del mismo orden (misma curvatura)

$$\left. \begin{aligned} F_e &\simeq F_n \\ \Delta x &\simeq \Delta q \end{aligned} \right\} \implies \frac{\omega_e}{\omega_n} \simeq \sqrt{\frac{M}{m}} \simeq 10^2$$

Es decir que en el tiempo en el que el ion positivo realiza una oscilación el electrón realiza del orden de 100. Las grandes masas de los iones positivos no pueden seguir el movimiento de las pequeñas masas electrónicas. Sus funciones de onda no pueden pues depender de las posiciones instantáneas de los electrones. Los núcleos sólo perciben el efecto promedio del electrón en su orbital.

Por el contrario los orbitales electrónicos cambian en función de las posiciones de los iones positivos en cada momento. Resulta así razonable separar en la función de onda la parte de los iones positivos de la parte electrónica:

$$\psi(x, q) = \psi_e(x, q) \psi_n(q)$$

Y proceder igualmente con los operadores,  $H = H_e + H_n$  con

$$\begin{aligned} H_e &\equiv T_e + U(x, q) \\ H_n &\equiv T_n \end{aligned}$$

La ecuación de Schrödinger con esta separación resulta

$$H_e [\psi_e(x, q) \psi_n(q)] + H_n [\psi_e(x, q) \psi_n(q)] = E \psi_e(x, q) \psi_n(q)$$

Como las deformaciones que sufren los orbitales electrónicos al cambiar las posiciones de los núcleos son mucho menores que las dependencias que tienen en las propias variables electrónicas, podemos despreciar algunas derivadas. Es a esto a lo que se llama *aproximación adiabática*:

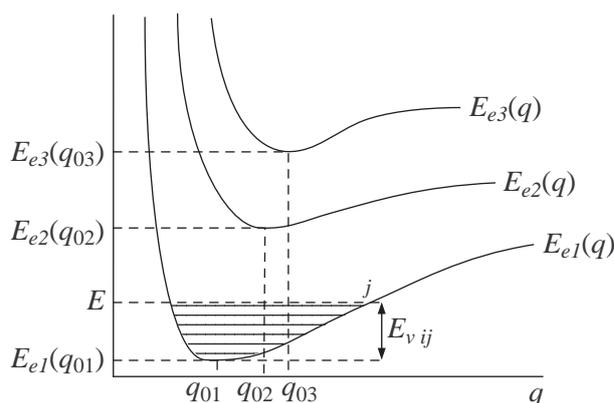
$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial q} \frac{\partial \psi_e}{\partial q} \right| \\ \left| \psi_n \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial q^2} \right| \end{aligned} \right\} \ll \left| \psi_e \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial q^2} \right|, \left| \psi_n \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial q^2} \right|$$

Estas suposiciones permiten simplificar la ecuación de autovalores

$$\psi_n H_e \psi_e + \psi_e H_n \psi_n = E \psi_e \psi_n$$

con lo que podemos efectuar una semiseparación de variables

$$-E_e(q) \equiv -\frac{1}{\psi_e} H_e \psi_e = \frac{1}{\psi_n} H_n \psi_n - E$$



**Figura 3.2:** Esquema de niveles electrónicos de un sistema molecular en función de una coordenada  $q$  de los corazones. Las líneas paralelas en el nivel electrónico más bajo,  $E_{e1}$  representan subniveles vibracionales  $E_{v1j}$ .  $E$  representa la energía total del nivel  $i = 1, j = 6$ .

dando lugar a las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} H_e \psi_e(x; q) &= E_e(q) \psi_e(x; q) \\ [H_n + E_e(q)] \psi_n(q) &= E \psi_n(q) \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones ha de ser resuelta en las variables electrónicas y para unas posiciones fijas  $q$  de los iones positivos, que funcionan como constantes en la integración de la primera ecuación (parámetros adiabáticos). Los autovalores  $E_e(q)$  obtenidos al efectuar esta integración son la energía potencial en que se mueven los núcleos en la segunda ecuación. Por lo tanto en principio el orden lógico consiste en resolver previamente la primera ecuación para poder abordar después el problema de la segunda, que es la que da las energías  $E$  del sistema poliatómico.

Hasta ahora hemos supuesto implícitamente que el centro de gravedad de la molécula está en reposo. Vamos a suponer además ahora que la molécula tampoco rota. De este modo sólo le quedan al sistema los grados de libertad internos.

Podemos representar en un diagrama simple (figura 3.2) las coordenadas configuracionales de los estados de la molécula. Las soluciones de la ecuación electrónica son los pozos de potencial  $E_{ei}(q)$  en los que se mueven los iones positivos. El fondo de cada uno de estos pozos corresponde a una posición de equilibrio de los iones. En estas posiciones de equilibrio los iones no vibran y la energía  $E_{ei}(q_{0i})$  es puramente electrónica.

En cada uno de estos pozos vibran los núcleos de manera que al resolver la segunda ecuación se obtienen los niveles de energía  $E$  del sistema. En estos niveles desde la energía  $E_{ei}(q_{0i})$  hasta  $E$  podemos asumir una contribución de energía de vibración  $E_{vij}$  de modo que

$$E = E_{ei}(q_{0i}) + E_{vij}$$

Frecuentemente las vibraciones son de poca amplitud<sup>1</sup> y entonces el desarrollo de

<sup>1</sup>Si las oscilaciones de los iones positivos no pueden considerarse pequeñas se pueden utilizar potenciales

### 3 La cuantificación de la materia

$E_{ei}(q)$  alrededor del mínimo hasta orden cuadrático (parabólico) es suficiente:

$$E_{ei}(q) = E_{ei}(q_{i0}) + \left. \frac{\partial E_{ei}}{\partial q} \right|_{q_{i0}} (q - q_{i0}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_{ei}}{\partial q^2} \right|_{q_{i0}} (q - q_{i0})^2 + \dots$$

y como la primera derivada se anula, si llamamos  $K$  al valor de la segunda tenemos la forma armónica de los pozos vibracionales:

$$E_{vi}(q) = E_{ei}(q) - E_{ei}(q_{i0}) \simeq \frac{K}{2} (q - q_{i0})^2.$$

Si la molécula gira alrededor de un eje que pasa por su centro de gravedad, su energía de rotación es

$$E_{Rir} = \frac{\hbar^2 r(r+1)}{2I}$$

donde  $I$  es el momento de inercia respecto al eje de rotación. La degeneración de estos niveles, que se superponen a los vibracionales, es  $2r + 1$ .

Finalmente, vemos que los números cuánticos que caracterizarán a los autoestados electrónicos son

- un número cuántico genérico,  $e$ , que caracteriza a la parte electrónica  $\psi_e(x, y)$  de la función de ondas y que es una abreviatura que puede contener más de un número cuántico,
- un número cuántico vibracional,  $v$ , que también puede ser una abreviatura de varios números correspondientes a los diversos modos normales de vibración de la molécula, y
- un número cuántico de rotación,  $r$ , que puede ser también múltiple al tener la molécula varios ejes de rotación no equivalentes.

Es decir, que la función de ondas molecular se puede escribir abreviadamente con la notación:

$$\psi_{evr} = \psi_e(x, q) \psi_{ev}(q) \psi_r(\theta, \varphi). \quad (3.2)$$

---

fenomenológicos más parecidos al real, como el de Morse:

$$E_e(q) = D \left[ \left( 1 - e^{-\beta(q-q_0)} \right)^2 - 1 \right]$$

En esta expresión  $D$  representa la energía de disociación.

## 4 La evolución temporal de los estados

### 4.1. Introducción

Sea un sistema físico representado por un hamiltoniano  $H_0$  cuyo problema espectral

$$H_0 |n\rangle = E_n^0 |n\rangle$$

está resuelto, de forma que los estados  $\{|n\rangle\}$  forman una base ortonormalizada del espacio de Hilbert de los estados del sistema,  $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ . Su evolución obedecerá a la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |n(t)\rangle = H_0 |n(t)\rangle.$$

Podemos describir también esta evolución utilizando un operador  $U(t)$  unitario ( $U^\dagger U = U U^\dagger = I$ ):

$$|n(t)\rangle = U(t) |n(0)\rangle = U(t) |n\rangle$$

de modo que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) |n\rangle = H_0 U(t) |n\rangle \quad \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H_0 U(t).$$

Si  $H_0$  no depende explícitamente del tiempo, la solución formal de esta ecuación es

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right)$$

o sea

$$\begin{aligned} |n(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |n\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_0 t + \dots\right) |n\rangle \\ &= \left(1 - i \frac{E_n^0}{\hbar} t + \dots\right) |n\rangle = \exp\left(-i \frac{E_n^0}{\hbar} t\right) |n\rangle. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la ortonormalidad de los autoestados  $|n(t)\rangle$  se conserva en el transcurso del tiempo y por tanto siguen formando una base del espacio.

### 4.2. Evolución temporal en presencia de una perturbación

Supongamos ahora que nuestro sistema está representado por un hamiltoniano  $H$  que difiere de  $H_0$  en el hamiltoniano  $V$  que actúa sobre los estados del mismo espacio de Hilbert

$$H = H_0 + V$$

Un vector estado del sistema será ahora  $|\psi(t)\rangle$ , solución de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V)|\psi(t)\rangle. \quad (4.1)$$

Este vector estado se puede expandir como una combinación lineal de los vectores de la base  $|n(t)\rangle$  de soluciones no perturbadas,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t} |n\rangle$$

Llevando este desarrollo a la ecuación de evolución 4.1

$$i\hbar \sum_n \frac{dC_n(t)}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t} |n\rangle + \sum_n E_n^0 C_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t} |n\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t} (E_n^0 + V) |n\rangle$$

Cancelando los términos en  $E_n^0$  y multiplicando escalarmente por el autoestado  $\langle m|$  obtenemos

$$\frac{dC_m}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} (E_n^0 - E_m^0) t} C_n(t) \langle m|V|n\rangle \quad (4.2)$$

Resolver este conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas es equivalente a resolver la ecuación de Schrödinger 4.1. En la práctica frecuentemente se trata de un conjunto infinito de ecuaciones y por tanto su resolución exacta puede resultar imposible.

### 4.3. El desarrollo perturbativo

Las ecuaciones 4.2 se pueden escribir de una forma más compacta introduciendo la frecuencia de transición entre los niveles  $m$  y  $n$  y el elemento de matriz del potencial entre ambos:

$$\omega_{mn} \equiv \frac{E_m^0 - E_n^0}{\hbar}, \quad V_{mn} \equiv \langle m|V|n\rangle.$$

Así:

$$\frac{dC_m(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n e^{i\omega_{mn} t} V_{mn} C_n(t) \quad (4.3)$$

Vamos ahora a escribir los coeficientes  $C_n(t)$  en la forma de un desarrollo en serie de potencias del elemento o elementos de matriz del hamiltoniano  $V$ :

$$C_n(t) = C_n^{(0)}(t) + C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t) + \dots \quad \text{con} \quad C_n^{(l)}(t) \propto \left(\frac{Vt}{\hbar}\right)^l \quad (4.4)$$

El orden cero de perturbación corresponderá a la situación en que  $V = 0$ . En este caso los coeficientes  $C_n(t)$  se mantendrían en los valores iniciales:

$$C_n^{(0)}(t) = C_n(0), \quad \frac{dC_n^{(0)}(t)}{dt} = 0$$

El desarrollo 4.4 debe cumplir la ecuación de evolución (4.3),

$$\frac{dC_m^{(1)}}{dt} + \frac{dC_m^{(2)}}{dt} + \dots = \frac{1}{i\hbar} \sum_n (C_n(0) + C_n^{(1)}(t) + \dots) e^{i\omega_{mn}t} V_{mn}$$

Aquí  $V$  es arbitrario, por lo que se deberán anular individualmente los términos en las diversas potencias de  $Vt/\hbar$ . Tenemos así el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dC_m^{(1)}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n(0) e^{i\omega_{mn}t} V_{mn} \\ \frac{dC_m^{(2)}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n^{(1)} e^{i\omega_{mn}t} V_{mn} \\ &\vdots = \vdots \end{aligned} \quad (4.5)$$

que puede en principio ser resuelto iterativamente a partir de las condiciones iniciales  $C_n(0)$ .

Para fijar ideas, imaginemos que el hamiltoniano  $V$  comienza a actuar en el instante  $t = 0$  y que el sistema ha sido preparado en este instante inicial en el autoestado  $|j\rangle$  de  $H_0$ , de modo que  $C_n(0) = \delta_{nj}$ . Las ecuaciones 4.5 para el primer orden de perturbación en  $V$  serán ahora

$$\frac{dC_n^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} e^{i\omega_{nj}t} V_{nj}$$

Por tanto

$$C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t V_{nj} e^{i\omega_{nj}t_1} dt_1 \quad (4.6)$$

que cumple con lo estipulado en 4.4 para  $l = 1$ :

$$C_n^{(1)} \propto \frac{Vt}{\hbar}.$$

Si llevamos la solución a primer orden 4.6 a la ecuación del segundo orden obtenemos

$$\frac{dC_m^{(2)}}{dt} = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \sum_n e^{i\omega_{mn}t} V_{mn} \int_0^t e^{i\omega_{nj}t_1} V_{nj}(t_1) dt_1$$

que al integrar proporciona

$$C_m^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \sum_n \int_0^t e^{i\omega_{mn}t_2} V_{mn}(t_2) \left[ \int_0^{t_2} e^{i\omega_{nj}t_1} V_{nj}(t_1) dt_1 \right] dt_2$$

Y por tanto

$$C_m^{(2)} \propto \frac{V^2 t^2}{\hbar^2}, \text{ e inducimos que } C_m^{(l)} \propto \left(\frac{Vt}{\hbar}\right)^l.$$

#### 4 La evolución temporal de los estados

Entonces, si los elementos de matriz cumplen  $V_{mn}t/\hbar \ll 1$  (o equivalentemente el tiempo es tan pequeño que  $t \ll \hbar/V_{mn}$ ), el desarrollo perturbativo 4.4 converge rápidamente y lo aproximamos reteniendo solamente el primer orden de perturbación:

$$C_m(t) \simeq C_m^{(1)}(t)$$

Un estado inicial general es una combinación lineal de elementos  $|n\rangle$  de la base,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n(0)|n\rangle.$$

Según 4.5 el primer orden de perturbación es

$$\frac{dC_m}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n(0) e^{i\omega_{mn}t} V_{mn}$$

que se puede integrar formalmente

$$C_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n(0) \int_0^t e^{i\omega_{mn}t_1} V_{mn} dt_1$$

De manera que si  $V$  no depende explícitamente del tiempo se tiene

$$C_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n C_n(0) V_{mn} \frac{e^{i\omega_{mn}t} - 1}{i\omega_{mn}}. \quad (4.7)$$

# 5 Absorción y emisión de radiación

## 5.1. Hamiltoniano del sistema radiación-materia

En los temas anteriores hemos estudiado los estados del campo de radiación y también el espectro de autoestados de los sistemas moleculares. Por otra parte, hemos comprobado cómo se puede hacer el estudio de un sistema sometido a una pequeña perturbación. Es el momento de aprovechar estas herramientas para afrontar la descripción del sistema acoplado radiación-materia, como un sistema aislado.

Si el sistema material es tratado en la aproximación de una partícula, obedece al hamiltoniano atómico  $H_a$ ,

$$H_a = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eV(\mathbf{r})$$

El hamiltoniano de *un* modo de radiación es, por su parte

$$H_r = \hbar\omega \left( a^\dagger a + 1/2 \right)$$

Como es sabido, en la formulación del hamiltoniano de un sistema cuántico el operador de momento lineal está asociado al momento hamiltoniano de la partícula (la variable canónicamente conjugada de las coordenadas generalizadas). Este momento frecuentemente coincide en los sistemas conservativos con el momento mecánico,  $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v}$  o *cantidad de movimiento* de la partícula. No obstante, si la partícula está en interacción con un campo electromagnético esto no es así. En este caso el momento mecánico de la partícula es

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

donde  $\mathbf{p}$  es el momento hamiltoniano y por tanto es el que tiene asociado el operador  $\mathbf{p} = -i\hbar \text{grad}$  y  $\mathbf{A}$  es el potencial vector del campo electromagnético. Esto es consecuencia del carácter no conservativo del campo electromagnético, pues la fuerza de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  depende de la velocidad. Entonces el hamiltoniano total del sistema, incluyendo la interacción radiación materia es

$$\begin{aligned} H &= \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eV(\mathbf{r}) + H_r \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eV(\mathbf{r}) + H_r + \frac{e}{2m}(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \end{aligned}$$

Aquí  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  en principio no conmuta con  $\mathbf{p}$ , pero sí cumple<sup>1</sup>

$$p_i A_i - A_i p_i = -i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

<sup>1</sup>El lector puede comprobar que una función arbitraria  $F(q_i)$  cumple  $[p_i, F(q_i)] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial q_i}$ .

que se da la circunstancia de que utilizando la condición de Coulomb o gauge de radiación ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) se transforma en:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Entonces, como  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  el término lineal en  $\mathbf{A}$  se simplifica:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eV(\mathbf{r}) + H_r - \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2$$

En esta expresión  $\mathbf{p}$  es el momento hamiltoniano y no el momento mecánico de la partícula pero aun así  $|e\mathbf{A}| \ll |\mathbf{p}|$  consideraremos como hamiltoniano no perturbado

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eV(\mathbf{r}) + H_r$$

Y como perturbación debida a la interacción el hamiltoniano

$$H_i = -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2.$$

Usualmente, incluso para grandes intensidades de radiación,

$$\left| \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \right| \gg \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2$$

así que despreciamos el término en  $\mathbf{A}^2$ , cuyas contribuciones más importantes se producen a los procesos a dos fotones:

$$H_i \simeq -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \quad (5.1)$$

Escribimos las ecuaciones de autovalores de la radiación y del átomo con la siguiente notación, respectivamente:

$$\begin{aligned} a^\dagger a |n\rangle &= n |n\rangle && \text{(radiación)} \\ H_a |s\rangle &= \Sigma_s |s\rangle && \text{(materia)} \end{aligned}$$

Las autofunciones y autovalores de  $H_0$  (es decir, sin considerar la interacción radiación–materia) tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |s, n\rangle &= |s\rangle \otimes |n\rangle \\ E_{sn} &= \Sigma_s + \hbar\omega (n + 1/2) \end{aligned}$$

Entonces el coeficiente de probabilidad del estado  $|s', n'\rangle$  es, suponiendo la perturbación  $V \equiv H_i$  independiente del tiempo (ec. 4.7):

$$C_{s'n'}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{sn} C_{sn}(0) H_{i,s'n'sn} \frac{e^{i\omega_{s'n'sn}t} - 1}{i\omega_{s'n'sn}}$$

donde

$$\omega_{s'n'sn} = (\Sigma_{s'} - \Sigma_s) / \hbar + \omega(n' - n) = \omega_{s's} + \omega(n' - n)$$

con  $\hbar\omega$  la energía del cuanto de radiación en el modo,  $H_{i,s'n'sn} = \langle s', n' | H_i | s, n \rangle$  el elemento de matriz de la transición y  $\omega_{s's} = (\Sigma_{s'} - \Sigma_s) / \hbar$  la frecuencia de Bohr.

### 5.1.1. Probabilidad de transición

En la onda electromagnética (ec. 1.5):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}} \left[ a\mathbf{u}(\mathbf{r}) + a^\dagger\mathbf{u}^*(\mathbf{r}) \right]$$

usando que  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}u(\mathbf{r})$  el operador de interacción 5.1 se expresa

$$H_i = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}} \left[ a u(\mathbf{r}) + a^\dagger u^*(\mathbf{r}) \right] \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}$$

y el elemento de matriz de  $H_i$  para la transición resulta

$$H_{i,s'n'sn} = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}} \left[ \langle n' | a | n \rangle \langle s' | u(\mathbf{r}) \mathbf{p} | s \rangle + \langle n' | a^\dagger | n \rangle \langle s' | u^*(\mathbf{r}) \mathbf{p} | s \rangle \right] \cdot \mathbf{e}.$$

Las funciones de onda de los estados  $|s\rangle$  y  $|s'\rangle$  sólo toman valores apreciables en las proximidades de la posición  $\mathbf{r}_a$  del sistema acoplado al campo. Es decir, en regiones de tamaño atómico, del orden de  $10^{-10}$  metros. Sin embargo, la distribución espacial  $u(\mathbf{r})$  del campo tiene sus variaciones más rápidas en distancias del orden de la longitud de onda  $\lambda$ . En las regiones del espectro electromagnético que nos interesan  $\lambda \gg 10^{-10}$  metros: la distribución espacial es mucho más uniforme. Por lo tanto en el cálculo de los elementos de matriz se puede considerar  $u$  constante con el valor que toma en la posición  $\mathbf{r}_a$ . Así:

$$\langle s' | u(\mathbf{r}) \mathbf{p} | s \rangle \simeq u(\mathbf{r}_a) \langle s' | \mathbf{p} | s \rangle$$

Queremos reexpresar el operador momento. Para ello, nos valemos de la expresión<sup>2</sup>

$$[x_i, F(p_i)] = i\hbar \frac{\partial F}{\partial p_i}$$

que permite escribir

$$[\mathbf{r}, H_a] = \left[ \mathbf{r}, \frac{p^2}{2m} \right] = i\hbar \frac{\mathbf{P}}{m} = \mathbf{r} H_a - H_a \mathbf{r}$$

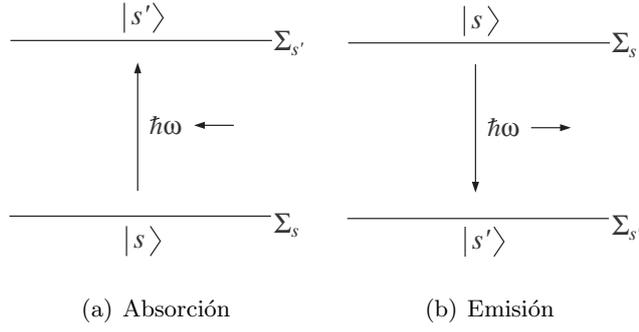
y entonces, llamando  $\mathbf{r}_{s's} \equiv \langle s' | \mathbf{r} | s \rangle$

$$\begin{aligned} \langle s' | \mathbf{p} | s \rangle &= -\frac{i}{\hbar} m (\langle s' | \mathbf{r} H_a | s \rangle - \langle s' | H_a \mathbf{r} | s \rangle) \\ &= \frac{i}{\hbar} m \langle s' | \mathbf{r} | s \rangle (\Sigma_{s'} - \Sigma_s) = i m \omega_{s's} \mathbf{r}_{s's} \end{aligned}$$

Designamos por  $\mathbf{D}_{s's}$  al elemento de matriz del momento dipolar de la carga acoplada al campo,  $\langle s' | e\mathbf{r} | s \rangle = \mathbf{D}_{s's}$ . Entonces:

$$H_{i,s'n'sn} = -i \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0}} \omega_{s's} \left[ u(\mathbf{r}_a) \langle n' | a | n \rangle + u^*(\mathbf{r}_a) \langle n' | a^\dagger | n \rangle \right] \mathbf{e} \cdot \mathbf{D}_{s's} \quad (5.2)$$

<sup>2</sup>Esta ecuación se cumple cuando se puede desarrollar  $F$  en serie de potencias y se obtiene a partir de  $[x, p] = i\hbar$



**Figura 5.1:** Procesos de absorción (izquierda) y emisión (derecha) entre dos estados de la materia  $|s\rangle$  y  $|s'\rangle$ .

Los elementos de matriz de la radiación se calculan empleando las ecuaciones 2.7 y 2.6; podemos abreviar el factor dependiente de la materia como,

$$H_{i,s's} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}}\omega_{s's}\mathbf{e}\cdot\mathbf{D}_{s's}$$

con lo que finalmente el elemento de matriz de la transición es

$$H_{i,s'n'sn} = H_{i,s's} [u(\mathbf{r}_a)\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + u^*(\mathbf{r}_a)\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}]$$

con él la amplitud de probabilidad del estado al que se efectúa la transición será

$$C_{s'n'}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{sn} C_{sn}(0) H_{i,s's} [u(\mathbf{r}_a)\sqrt{n}\delta_{n',n-1} + u^*(\mathbf{r}_a)\sqrt{n+1}\delta_{n',n+1}] \times \frac{e^{i[\omega_{s's} + \omega(n'-n)]t} - 1}{i[\omega_{s's} + \omega(n'-n)]}. \quad (5.3)$$

## 5.2. Resonancia

Supongamos que sólo dos niveles de la materia (el  $|s\rangle$  y el  $|s'\rangle$ ) cumplen la condición  $|\omega_{s's}| \sim \omega$  y por tanto sólo éstos pueden hacer resonante el denominador de la expresión 5.3. Entonces los términos de la suma correspondientes a los demás estados serán siempre muy pequeños y se podrán ignorar. Además teniendo en cuenta las deltas que contiene la expresión sólo son posibles las transiciones en que el número de cuantos del modo cambie en una unidad,  $|n - n'| = 1$ .

Tenemos así dos coeficientes correspondientes a dos procesos resonantes:

- Absorción de radiación por la materia (figura 5.1(a)), con coeficiente

$$C_{s'n-1}(t) = \frac{H_{i,s's}}{i\hbar} C_{sn}(0) \sqrt{n} u(\mathbf{r}_a) \frac{e^{i(\omega_{s's} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{s's} - \omega)}$$

Es resonante si  $\omega_{s's} > 0$  cuando  $\omega_{s's} - \omega \simeq 0$ .

En este proceso el campo pasa de tener  $n$  fotones a tener  $n-1$  y la materia aumenta su energía de  $\Sigma_s$  a  $\Sigma_{s'}$ . Obsérvese que cuanto mayor sea el número de fotones en el modo, mayor es la amplitud de probabilidad de absorción.

- Emisión de radiación por la materia (figura 5.1(b)). Su amplitud de probabilidad es

$$C_{s'n+1}(t) = \frac{H_{i,s's}}{i\hbar} C_{sn}(0) \sqrt{n+1} u^*(\mathbf{r}_a) \frac{e^{i(\omega_{s's}+\omega)t} - 1}{i(\omega_{s's} + \omega)}$$

Hay resonancia si  $\omega_{s's} < 0$  cuando  $\omega_{s's} + \omega \simeq 0$ .

En este proceso el campo pasa de tener  $n$  fotones a tener  $n+1$ . La materia, al ser ahora  $\Sigma_s > \Sigma_{s'}$ , pierde la energía que se lleva el fotón incorporado al modo. La amplitud de probabilidad también crece con el número  $n$  de fotones preexistentes en el modo. Pero en este caso es no nula *aún en ausencia de fotones en el modo*.

### Absorción

La probabilidad de la transición de absorción cuando se considera la resonancia con  $n$  fotones es

$$|C_{s'n-1}(t)|^2 = \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} |C_{sn}(0)|^2 n |u(\mathbf{r}_a)|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2}$$

Es evidente que la resonancia se produce con cualquier número de fotones que haya en los estados que forman parte del estado inicial (piénsese en estados que no son Fock). Por tanto la probabilidad *total* de paso del estado  $|s\rangle$  al  $|s'\rangle$  es una suma,

$$\begin{aligned} |C_{s'}|_a^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |C_{sn-1}(t)|^2 \\ &= \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} |u(\mathbf{r}_a)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_{sn}(0)|^2 n \end{aligned}$$

Supongamos ahora que en el estado inicial radiación-materia,  $|\psi(0)\rangle$  la radiación está en un estado coherente

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= |s\rangle \otimes |\alpha\rangle = |s\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{sn}(0) |s\rangle \otimes |n\rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$C_{sn}(0) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

y así la suma en  $|C_{s'}|_a^2$  se puede concretar:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |C_{sn}(0)|^2 n &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} n \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-1)!} |\alpha|^2 = |\alpha|^2 = \langle n \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|C_{s'}(t)|_a^2 = \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} |u(\mathbf{r}_a)|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} \langle n \rangle. \quad (5.4)$$

### Emisión

En el proceso de emisión,

$$|C_{s'n+1}(t)|^2 = \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} |C_{sn}(0)|^2 (n+1) |u(\mathbf{r}_a)|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega - \omega_{ss'})t}{(\omega - \omega_{ss'})^2}$$

La probabilidad total queda

$$\begin{aligned} |C_{s'}|_e^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_{sn+1}(t)|^2 \\ &= \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} |u(\mathbf{r}_a)|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega - \omega_{ss'})t}{(\omega - \omega_{ss'})^2} \sum_{n=0}^{\infty} |C_{sn}(0)|^2 (n+1) \end{aligned}$$

Si la radiación está inicialmente en un estado coherente

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |C_{sn}(0)|^2 (n+1) &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (n+1) \\ &= e^{-|\alpha|^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \right) \\ &= |\alpha|^2 + 1 = \langle n \rangle + 1 \end{aligned}$$

Y la probabilidad de emisión es

$$|C_{s'}|_e^2 = \frac{|H_{i,s's}|^2}{\hbar^2} |u(\mathbf{r}_a)|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega - \omega_{ss'})t}{(\omega - \omega_{ss'})^2} (\langle n \rangle + 1). \quad (5.5)$$

### Onda coherente plana

Si la radiación fuera una onda plana normalizada en el volumen  $V$  que confina a la radiación, se tendría (ec. 1.4):

$$u(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{V}}$$

Y en este caso

$$|u(\mathbf{r}_a)|^2 = \frac{1}{V}.$$

De modo que la probabilidad no dependería de la posición del centro acoplado a la radiación. No obstante en general esto no es así, y en particular no lo es siempre que la distribución de la radiación sea inhomogénea. Como veremos, la distribución de la radiación en un modo gaussiano (de interés en los resonadores empleados en los láser) es inhomogénea.

### Emisión espontánea y emisión estimulada

En 5.5 vemos que, como habíamos apuntado, la emisión se puede producir incluso cuando  $\langle n \rangle = 0$ . El estado coherente, en que el valor esperado  $\langle n \rangle = 0$  coincide con el estado Fock  $|0\rangle$ , clásicamente sería un estado sin radiación, pero cuánticamente sabemos que la energía residual en el modo es  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ . Esta energía puede inducir la emisión en ausencia de cuantos. Así, las transiciones inducidas por la presencia de cuantos se llaman *transiciones estimuladas* y las inducidas por el campo residual se llaman *transiciones espontáneas*.

En el caso de que la radiación del modo se hubiera preparado en un estado de Fock  $|n\rangle$  en lugar de en un estado coherente  $|\alpha\rangle$  el valor esperado sería  $\langle n \rangle = n$  y por tanto las expresiones de  $|C_{s'}|^2$  serían las mismas sustituyendo  $\langle n \rangle$  por  $n$ .

El resultado 5.5 indica que la probabilidad  $|C_{s'}|^2$  es la misma a través de la emisión estimulada, cuando hay un valor esperado  $\langle n \rangle = 1$ , que a través de la emisión espontánea.

En lo que sigue vamos a utilizar el promedio espacial de los coeficientes de probabilidad con el objeto de obtener resultados que no dependan de la posición  $\mathbf{r}_a$  del centro y sean al mismo tiempo realistas. Es decir, sustituiremos  $|u(\mathbf{r}_a)|^2$  por

$$\overline{|u(\mathbf{r})|^2} = \frac{1}{V} \int |u(\mathbf{r})|^2 d^3V = \frac{1}{V} \quad \text{pues} \quad \int |u(\mathbf{r})|^2 d^3V = 1$$

siendo  $V$  el volumen del resonador en que está confinada la radiación. También recordaremos que

$$|H_{i,s's}|^2 = \frac{\hbar\omega_{s's}^2}{2\omega\varepsilon_0} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2.$$

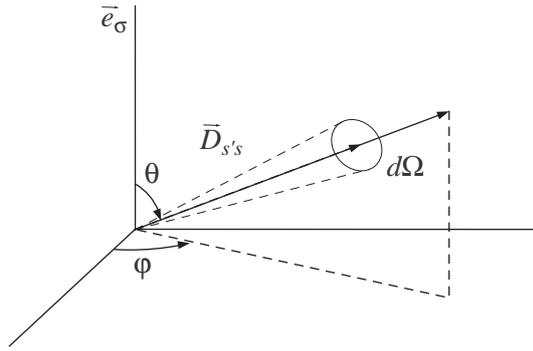
## 5.3. Los coeficientes de Einstein

### 5.3.1. Probabilidades de los procesos de absorción

El coeficiente de probabilidad de la absorción, usando la expresión explícita de  $H_{i,s's}$  es

$$|C_{s'}(t)|^2 = \frac{\omega_{s's}^2}{2\hbar\varepsilon_0 V \omega} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n \rangle \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2}$$

Esta expresión corresponde al caso en que una sola frecuencia (la del modo de radiación) interacciona con la materia. Su comportamiento cerca de la resonancia es cuadrático en



**Figura 5.2:** La probabilidad total de absorción depende de la orientación relativa de los momentos dipolares de la materia  $\mathbf{D}_{s's}$  y la polarización de la radiación  $\mathbf{e}_\sigma$ .

el tiempo<sup>3</sup>:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{s's}} |C_{s'}(t)|^2 = \frac{\omega_{s's}^2}{2\hbar\epsilon_0 V \omega} |\mathbf{e} \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n \rangle t^2$$

Sin embargo, el comportamiento proporcional a  $t^2$  es poco usual, siendo en general la probabilidad proporcional a  $t$ . La razón esencial de esta discrepancia se encuentra en las hipótesis simplificadoras que asumen una sola frecuencia en la radiación y niveles de la materia infinitamente estrechos. En la práctica ni los niveles atómicos ni la radiación lo son.

Como en el caso estudiado se ha supuesto la interacción de los niveles de la materia con una sola frecuencia de la radiación, para tener la probabilidad inducida por todas las frecuencias presentes se habrán de sumar las probabilidades sobre ellas. Si también hay diferentes direcciones de propagación y polarizaciones se deben sumar de igual modo. Imaginemos por ejemplo que (como en el caso de la radiación de equilibrio térmico) tenemos la energía distribuida en todos los modos: en todas las frecuencias angulares  $\omega$ , direcciones de propagación  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  y polarizaciones  $\sigma$ :

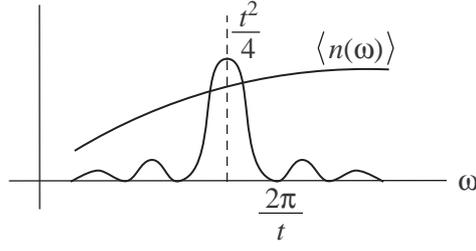
$$\langle n \rangle = \langle n \rangle (\omega, \hat{\mathbf{k}}, \sigma).$$

Según hemos estudiado, el número de modos con frecuencia angular  $\omega$  en un intervalo  $d\omega$ , vector de ondas  $\mathbf{k}$  dentro del ángulo sólido  $d^2\Omega$  y polarización  $\sigma$  viene dado por

$$d^3 N_\sigma = \frac{V}{(2\pi c)^3} \omega^2 d\omega d^2\Omega.$$

Entonces la probabilidad de que un cuanto de esta radiación sea absorbido será el producto de la probabilidad de absorción  $|C_{s'}(t)|^2$  de un cuanto en una frecuencia por el número de modos ó frecuencias disponibles,

<sup>3</sup>Si  $x \ll 1$ ,  $\sin x \simeq x$ .



**Figura 5.3:** Para tiempos suficientemente largos la variación rápida de la función  $g(\omega)$  permite considerar solamente el valor en el máximo  $\langle n(\omega_{s's}) \rangle$  de la función lentamente variable  $\langle n(\omega) \rangle$ .

$$d^3 P_{\sigma,a} = |C_{s'}(t)|^2 \frac{V}{(2\pi c)^3} \omega^2 d\omega d^2\Omega$$

Y la probabilidad total de absorción será

$$P_a = \frac{\omega_{s's}^2}{2\hbar\epsilon_0(2\pi c)^3} \sum_{\sigma=1,2} \int_0^\infty \left[ \omega \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} \int |\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n_\sigma \rangle d^2\Omega \right] d\omega$$

Como se aprecia en esta expresión lo que cuenta en la integral geométrica es cómo están orientados los momentos dipolares de la materia  $\mathbf{D}_{s's}$  respecto a la polarización de la radiación  $\mathbf{e}_\sigma$ . Dejando fija la polarización  $\mathbf{e}_\sigma$ , si las orientaciones atómicas están distribuidas isotrópicamente respecto a  $\mathbf{e}_\sigma$  podemos tomar el ángulo sólido  $d^2\Omega$  alrededor de la dirección de  $\mathbf{D}_{s's}$  (figura 5.2):

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1,2} \int |\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n_\sigma \rangle d\Omega &= \sum_{\sigma=1,2} \langle n_\sigma \rangle |\mathbf{D}_{s's}|^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{4\pi}{3} |\mathbf{D}_{s's}|^2 \sum_{\sigma=1,2} \langle n_\sigma \rangle = \frac{4\pi}{3} |\mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n \rangle \end{aligned} \quad (5.6)$$

( $\langle n \rangle$  es el valor esperado del número total de cuantos en las dos polarizaciones). Con lo cual

$$P_a = \frac{8\pi \omega_{s's}^2 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{3 \hbar\epsilon_0(2\pi c)^3} \int_0^\infty \omega \langle n(\omega) \rangle \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} d\omega$$

La función subintegral contiene el factor rápidamente variable

$$g(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2},$$

que representamos en la figura 5.3. La anchura del pico central, estimada como la distancia del máximo al primer mínimo, vale  $2\pi/t$ . Si el tiempo transcurrido es lo suficientemente largo como para que ésta sea mucho menor que la anchura  $\Delta\omega$  de  $\langle n(\omega) \rangle$ , es decir, si se cumple

$$\frac{2\pi}{t} \ll \Delta\omega$$

entonces se puede considerar  $\langle n(\omega) \rangle \simeq \langle n(\omega_{s's}) \rangle$  y por lo tanto aproximar así la integral

$$P_a(t) \simeq \frac{8\pi}{3} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 (2\pi c)^3} \langle n(\omega_{s's}) \rangle \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} d\omega$$

Con el cambio  $x = \omega_{s's} - \omega$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega_{s's} - \omega)t}{(\omega_{s's} - \omega)^2} d\omega \simeq \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 (xt/2)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} t$$

y queda

$$P_a(t) = \frac{1}{6\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 c^3} \langle n(\omega_{s's}) \rangle t.$$

Finalmente, la probabilidad de absorción estimulada por la radiación será, por unidad de tiempo  $W_a^{\text{est}} \equiv P_a(t)/t$  o,

$$W_a^{\text{est}} = \frac{1}{6\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 c^3} \langle n(\omega_{s's}) \rangle.$$

### 5.3.2. Probabilidades de los procesos de emisión

Si comparamos las expresiones 5.4 y 5.5 para la absorción y para la emisión vemos que esencialmente sólo se diferencian en el factor del número de fotones,  $\langle n_\sigma \rangle$  en un caso y  $\langle n_\sigma \rangle + 1$  en el otro. Al sumar sobre las dos polarizaciones el factor para la emisión será  $\langle n(\omega_{s's}) \rangle + 2$ , por lo tanto, la probabilidad *total* de emisión será

$$W_e = \frac{1}{6\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 c^3} (\langle n(\omega_{s's}) \rangle + 2) \quad (5.7)$$

Las emisiones estimuladas, correspondientes al primer término, se producen con una probabilidad igual que la de absorción estimulada,

$$W_e^{\text{est}} = \frac{1}{6\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 c^3} \langle n(\omega_{s's}) \rangle.$$

Si la radiación tiene su energía isotrópicamente distribuida,  $\langle n(\omega_{s's}) \rangle = 2\langle n_\sigma(\omega_{s's}) \rangle$ , donde  $n_\sigma(\omega_{s's})$  es el número de cuantos por modo en la frecuencia de la transición. Entonces

$$W_a^{\text{est}} = W_e^{\text{est}} = \frac{1}{3\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar \varepsilon_0 c^3} \langle n_\sigma(\omega_{s's}) \rangle \quad (5.8)$$

Por otra parte, si  $u_\nu(\nu)$  es la densidad de energía de radiación por unidad de volumen y de intervalo de frecuencia, como  $\langle n_\sigma \rangle h\nu$  es la energía por modo

$$u_\nu(\nu) = \rho(\nu) \langle n_\sigma \rangle h\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu \langle n_\sigma \rangle = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3} \langle n_\sigma \rangle \rightarrow \langle n_\sigma \rangle = \frac{\pi c^3}{2\hbar\omega^3} u_\nu(\nu)$$

se pueden poner las probabilidades de los procesos estimulados en función de la densidad de energía de la radiación:

$$W_a^{\text{est}} = W_e^{\text{est}} = B_{s's} u_\nu(\nu_{s's})$$

donde los coeficientes  $B$  se conocen como *coeficientes de Einstein de las transiciones estimuladas* y valen:

$$B_{s's} = \frac{|\mathbf{D}_{s's}|^2}{6\hbar^2\epsilon_0} = B_{ss'} \quad (5.9)$$

El segundo término de 5.7 nos indica que puede haber emisión de un cuanto aunque no haya cuantos en la radiación ( $\langle n_\sigma \rangle = 0$ ). Por ello este término se conoce como la *probabilidad de emisión espontánea*. Su expresión será la 5.8 pero tomando en ella  $\langle n_\sigma \rangle = 1$ , ya que como se desprende de la expresión para  $W_e$  el campo de cero fotones produce la misma emisión que el de un fotón:

$$A_{s's} = \frac{1}{3\pi} \frac{\omega_{s's}^3 |\mathbf{D}_{s's}|^2}{\hbar\epsilon_0 c^3}$$

El cociente entre el coeficiente de emisión espontánea y el coeficiente de uno cualquiera de los procesos estimulados (de emisión o de absorción) depende únicamente de la longitud de onda de la radiación (en el medio, ya que  $c$  está referida al medio):

$$\frac{A_{s's}}{B_{s's}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} \quad (5.10)$$

La fórmula es de aplicabilidad general a toda radiación electromagnética. Así, sabemos ahora que la radiación estimulada, que es la de interés en el láser, predominará con mayor facilidad cuanto mayor sea la longitud de onda. En efecto, una emisora de radio emite estimuladamente, y por lo tanto con muy poco ruido cuántico (emisión espontánea), mientras que los átomos y moléculas representan una situación intermedia; en los núcleos, dada la cortísima longitud de onda en la que emiten (rayos  $\gamma$ ), la radiación estimulada está en proporción despreciable.

El uso de radiaciones de onda muy corta en los resonadores láser plantea además numerosos problemas tecnológicos; a pesar de ello, se ha conseguido diseñar sistemas láser que trabajan en el dominio de los rayos  $X$ .

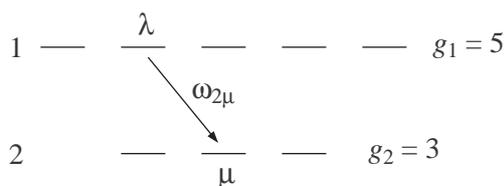
### 5.3.3. Efecto de la polarización

En el caso en que la radiación está planopolarizada, los momentos dipolares  $\mathbf{D}_{s's}$  inducidos en el sistema material se alinean rápidamente con el campo eléctrico de la radiación ( $\mathbf{e} \parallel \mathbf{D}_{s's}$ ), y tenemos que la integral geométrica en la ec. 5.6 vale

$$\sum_{\sigma=1,2} \int |\mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n_\sigma \rangle d^2\Omega = |\mathbf{D}_{s's}|^2 \left( \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d^2\Omega \right) \sum_{\sigma=1,2} \langle n_\sigma \rangle = 4\pi |\mathbf{D}_{s's}|^2 \langle n \rangle$$

Comparando esta expresión con la correspondiente a una orientación isotropa, 5.6 vemos que ambas difieren en un factor  $1/3$ . Resulta que los coeficientes estimulados pueden tener un valor entre estos dos extremos, según sea la polarización de la radiación estimulante:

$$\frac{|\mathbf{D}_{s's}|^2}{6\hbar^2\epsilon_0} \leq B_{s's} \leq \frac{|\mathbf{D}_{s's}|^2}{2\hbar^2\epsilon_0}$$



**Figura 5.4:** Desde cada estado  $\lambda$  del nivel 1 podemos transitar a cualquiera de los estados  $\mu$  del nivel 2. El número de estados con energía  $E_1$  es la degeneración del nivel 1 y se denota por  $g_1$ ; análogamente para el nivel 2.

El valor más pequeño del coeficiente  $B$  es el correspondiente a la radiación isotrópica o a la desorientación atómica isotrópica, y fue el calculado por Einstein. La radiación polarizada da lugar a mayor eficiencia en los procesos estimulados.

### 5.3.4. Efecto de la degeneración

Los valores calculados de los coeficientes corresponden a transiciones entre distintos *estados* de diferente energía. Se pueden encontrar también fácilmente los coeficientes correspondientes a transiciones entre *niveles* de energía que comprenden varios estados, es decir, niveles degenerados.

En efecto, asignemos los subíndices  $\lambda$  y  $\mu$  a los estados degenerados de los niveles 1 y 2 del sistema (figura 5.4). La probabilidad de transición desde un estado  $\lambda$  a un estado  $\mu$  es  $W_{\lambda\mu} = B_{\lambda\mu}u_\nu(\nu_{12})$  y la probabilidad desde el estado  $\lambda$ , que es la probabilidad desde el nivel 1, a todos los estados del nivel 2 será la suma  $W_{12} = \sum_{\mu} W_{\lambda\mu}$ . Pero usualmente los elementos de matriz  $\mathbf{D}_{\lambda\mu}$  (los armónicos esféricos) son iguales cualesquiera que sean los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ , por lo que

$$\begin{aligned} W_{12} &= g_2 W_{\lambda\mu} = g_2 B_{\lambda\mu} u_\nu(\nu_{12}) = B_{12} u_\nu(\nu_{12}) \\ W_{21} &= g_1 W_{\mu\lambda} = g_1 B_{\mu\lambda} u_\nu(\nu_{12}) = B_{21} u_\nu(\nu_{12}) \end{aligned}$$

Hemos demostrado con anterioridad que  $B_{\mu\lambda} = B_{\lambda\mu}$ , así que

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1}.$$

### 5.3.5. Tiempo de vida radiativo y ensanchamiento natural

El coeficiente espontáneo  $A_{s's}$  representa la probabilidad de que el sistema se desexcite radiativamente una vez por unidad de tiempo de forma espontánea. Es claro que su inverso será el *tiempo de vida radiativo* del estado excitado  $|s'\rangle$ ,

$$\tau_{s's} = \frac{1}{A_{s's}}$$

El cambio por unidad de tiempo del número  $N_{s'}$  de átomos excitados debido a la emisión espontánea será, omitiendo los subíndices  $s$  y  $s'$ ,

$$\frac{dN}{dt} = -AN$$

Integrando con la condición inicial  $N(0) = N_0$  átomos inicialmente excitados en  $|s'\rangle$  se obtiene

$$N = N_0 e^{-At} = N_0 e^{-t/\tau}$$

Los procesos de desexcitación espontánea provocan un decrecimiento exponencial de la población del nivel.

Como por cada desexcitación se produce un cuanto de radiación, el cambio por unidad de tiempo en el número de cuantos en la frecuencia de la transición será

$$\frac{d\langle n(\omega_{s's}) \rangle}{dt} = -\frac{dN}{dt} = -AN_0 e^{-t/\tau}$$

Esta magnitud es evidentemente proporcional a la potencia emitida, que a su vez es proporcional al módulo al cuadrado del campo  $\mathbf{E}$  de la radiación emitida

$$|\mathbf{E}|^2 \propto e^{-t/\tau}$$

Por lo tanto podemos escribir el campo clásico emitido como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-t/2\tau_{s's}} e^{-i\omega_{s's}t} \quad (5.11)$$

Cuando  $\tau_{s's} \gg \omega_{s's}^{-1}$  este campo es muy aproximadamente el del estado coherente, porque el amortiguamiento es muy lento comparado con el período (la emisión de los fotones va sustrayendo energía, figura 5.5). La no monocromaticidad estricta se pone de manifiesto en su espectro de Fourier,

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{-t/2\tau} e^{i\omega_{s's}t} dt = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1/2\tau + i(\omega - \omega_{s's})}$$

El cuadrado del módulo de  $\tilde{E}(\omega)$  es proporcional a la intensidad en la frecuencia  $\omega$ ,  $\tilde{I}(\omega)$  por lo cual el espectro de la intensidad será

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 \propto \frac{E_0^2}{2\pi} \frac{1}{(1/2\tau)^2 + (\omega - \omega_{s's})^2}$$

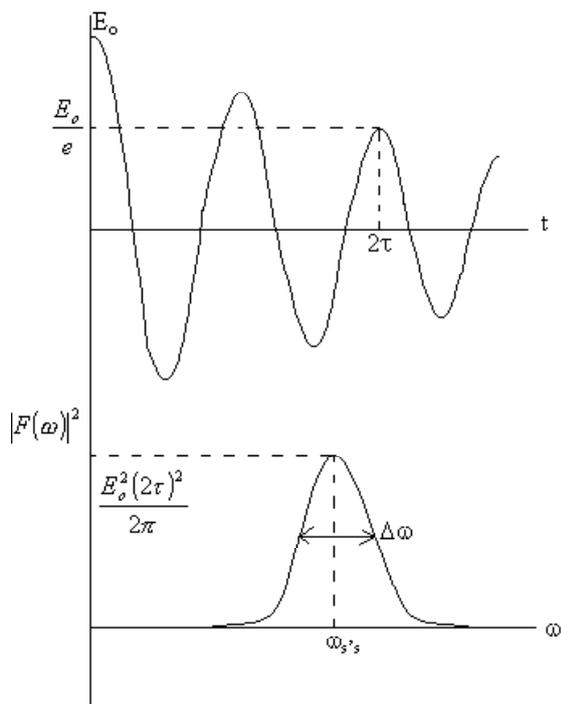
La anchura de este espectro a mitad de altura (*Full Width at Half Maximum*, FWHM); se obtiene de

$$\frac{E_0^2(2\tau)^2}{4\pi} = \frac{E_0^2}{2\pi} \frac{1}{(1/2\tau)^2 + (\Delta\omega_n/2)^2}$$

y resulta ser  $\Delta\omega_n = \tau^{-1}$ . Por lo tanto, la intensidad de la radiación emitida espontáneamente se reparte sobre las frecuencias angulares con un *perfil*<sup>4</sup> de Lorentz:

$$g_L(\omega_{s's}, \omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_{s's})^2 + (\frac{\Delta\omega_n}{2})^2}, \quad \int g_L(\omega_{s's}, \omega) d\omega = 1$$

<sup>4</sup>Una distribución se denomina *perfil* cuando está normalizada a la unidad.



**Figura 5.5:** Arriba, evolución temporal del campo. Abajo, espectro de Fourier de la intensidad.

cuya anchura es el inverso del tiempo de vida radiativo del estado excitado. Este ensanchamiento  $\Delta\omega_n$ , que es inherente al proceso de emisión espontánea se denomina *anchura natural* (de ahí el subíndice  $n$ ) y como es el mismo para todos los sistemas emisores de la misma naturaleza se dice que es un *ensanchamiento homogéneo*. Como los tiempos de vida de los niveles atómicos son típicamente de orden de  $\tau \sim 10^{-8}$  s,  $\Delta\omega_n = 10^8$  s $^{-1}$  y  $\Delta\nu_n = 1.6 \times 10^7$  Hz.

Dado que la intensidad total emitida espontáneamente es proporcional al coeficiente de Einstein  $A$ , esto es equivalente a considerar que el coeficiente  $A$  está repartido sobre el perfil, de manera que la probabilidad de emisión espontánea en un intervalo  $d\omega$  sea

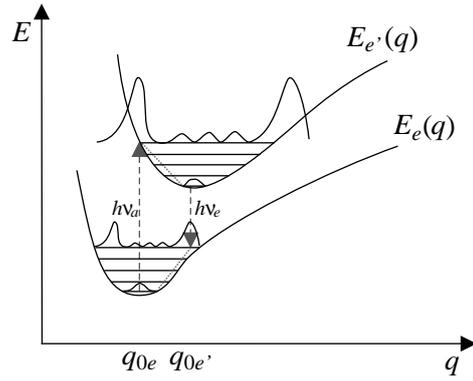
$$dA = A g_L(\omega_{s's}, \omega) d\omega$$

Al ser los otros coeficientes de Einstein proporcionales a  $A$  también se los puede considerar repartidos sobre el perfil  $g_L$ .

## 5.4. Sistemas moleculares

### 5.4.1. Principio de Franck-Condon

Hemos visto que la función de ondas se puede escribir, en virtud de la aproximación adiabática como un producto de función electrónica, vibracional y rotacional (ec. 3.2).



**Figura 5.6:** El proceso de absorción tiene lugar del primer nivel vibracional en el nivel electrónico más bajo a aquel de los niveles vibracionales del nivel electrónico superior con mayor solapamiento. Después ocurre una transición no radiativa muy rápida, señalada con línea punteada, al fundamental vibracional del nivel electrónico superior. Sigue la desexcitación entre niveles electrónicos, que vuelve a obedecer al principio de máximo solapamiento. Finalmente se produce una desexcitación vibracional en el nivel electrónico más bajo.

En lo que sigue prescindiremos de este último aspecto y tomaremos

$$\psi_{ev}^t(x, q) = \psi_e(x, q) \psi_{ev}(q)$$

Como hemos visto (ec. 5.2), la probabilidad de transición es proporcional al elemento de matriz dipolar eléctrico, y para las transiciones entre estados electrónicos  $\mathbf{D} = e\mathbf{x}$  así que el elemento de matriz será

$$\begin{aligned} \langle \psi_{e'v'}^t | \mathbf{D} | \psi_{ev}^t \rangle &= e \iint \psi_{e'}^* \psi_{e'v'}^* \mathbf{x} \psi_e \psi_{ev} dv_x dv_q \\ &= \int \psi_{e'v'}^* \left[ e \int \psi_{e'}^* \mathbf{x} \psi_e dv_x \right] \psi_{ev} dv_q \\ &= \int \psi_{e'v'}^*(q) \mathbf{D}_{e'e}(q) \psi_{ev}(q) dv_q. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Hemos separado la parte electrónica, encapsulándola en

$$\mathbf{D}_{e'e}(q) = e \int \psi_{e'}^* \mathbf{x} \psi_e dv_x$$

Es de señalar que en estas integrales  $dv_q$  no es un verdadero volumen, sino el producto de los diferenciales de las variables de los modos normales de vibración de los iones positivos.

Las funciones  $\psi_{ev}$  son autoestados de oscilador que, para pequeñas amplitudes, serán de oscilador armónico. Las funciones de oscilador (por contener los polinomios de Hermite) suelen tener máximos muy altos en los extremos de la trayectoria de oscilación clásica. El resto de los máximos son relativamente pequeños.

Por otra parte, los centros de oscilación de los diversos estados electrónicos no suelen coincidir. La situación se ha diagramado en la figura 5.6. Para que el elemento de

matriz 5.12 sea grande, deberán solaparse los máximos de las funciones vibracionales, particularmente, los grandes máximos de cada función. Como, normalmente, el estado electrónico inferior suele tener ocupado sólo su nivel vibracional más bajo, en él la función de ondas será  $\psi_{e0}(q)$ , cuya forma es gaussiana (un sólo gran pico, central). El máximo de esta gaussiana solapará, en el estado electrónico excitado, con los máximos de las funciones vibracionales situadas cerca de  $q_{0e}$ . Podemos entonces sacar de la integral sobre las variables  $q$  el elemento de matriz electrónico con su valor en la coordenada  $q_{0e}$  de reposo de los núcleos:

$$(\mathbf{D}_{e'e})_{v'0} = \langle \psi_{e'v'}^t | \mathbf{D} | \psi_{e0}^t \rangle \simeq \mathbf{D}_{e'e}(q_{0e}) \int \psi_{e'v'}^* \psi_{e0} dv_q$$

Esta expresión es la consecuencia más conocida del llamado *principio de Franck-Condon*, que viene a decir que la transición es tan rápida que los iones positivos no tienen tiempo de moverse de su posición de equilibrio durante la absorción. Se basa en la idea clásica de que los electrones se mueven mucho más rápido que los iones positivos, idea que discutimos en el apartado 3.2.

En general, después de la absorción la molécula queda vibracionalmente excitada en el estado electrónico excitado. En la mayoría de los casos la molécula no está aislada, de manera que a través de rápidos procesos no radiativos<sup>5</sup> transmite su energía al entorno y pierde la excitación vibracional, situándose en el nivel vibracional más bajo del estado electrónico excitado.

Es desde este nivel  $\psi_{e'0}$  desde donde se emite al nivel vibracional con mayor solapamiento del estado electrónico inferior. En la emisión, por lo tanto, el elemento de matriz del momento dipolar es

$$(\mathbf{D}_{e'e})_{0v} = \langle \psi_{e'0}^t | \mathbf{D} | \psi_{ev}^t \rangle = \mathbf{D}_{e'e}(q_{0e'}) \int \psi_{e'0}^* \psi_{ev} dv_q$$

como la energía  $h\nu_a$  absorbida en la transición es mayor que la emitida (figura 5.6)

$$h\nu_a > h\nu_e$$

la emisión aparece corrida hacia el rojo, fenómeno denominado *salto de Stokes*.

Como sabemos, la probabilidad de transición espontánea en emisión es

$$(A_{e'e})_{0v} = \frac{1}{3\pi} \frac{\omega_0^3}{\epsilon_0 c^3 \hbar} |(\mathbf{D}_{e'e})_{0v}|^2$$

Pero como el estado vibracional de número cuántico  $v$  puede ser uno cualquiera de los del estado electrónico de llegada  $e$ , la probabilidad total será

$$A_{e'e} = \sum_v (A_{e'e})_{0v} = \frac{1}{3\pi} \frac{\omega_e^3}{\epsilon_0 c^3 \hbar} |\mathbf{D}_{e'e}(q_{0e'})|^2 \sum_v \left| \int \psi_{e'0}^* \psi_{ev} dv_q \right|^2 \quad (5.13)$$

<sup>5</sup>La desexcitación vibracional es, en la práctica, del orden de tres o cuatro órdenes de magnitud más rápida que la electrónica.

Así, en el caso de un modo normal, las autofunciones de vibración forman una base del espacio de Hilbert, por lo que podemos expandir el estado  $\psi_{e'0}$  en la base  $\{\psi_{ev}\}$  (los estados vibracionales del estado electrónico inferior), es decir

$$\psi_{e'0} = \sum_v C_v \psi_{ev} \quad (5.14)$$

con los coeficientes dados por<sup>6</sup>

$$C_v = \int \psi_{ev}^* \psi_{e'0} dq = \left( \int \psi_{e'v}^* \psi_{e0} dq \right)^*$$

y cumpliendo la condición de normalización

$$\sum_v |C_v|^2 = \sum_v \left| \int \psi_{e'0}^* \psi_{ev} dq \right|^2 = 1$$

Por lo tanto (comparar con la ec. 5.13),

$$A_{e'e} = \frac{1}{3\pi} \frac{\omega_e^3}{\epsilon_0 c^3 \hbar} |\mathbf{D}_{e'e}(q_{0e'})|^2.$$

Es decir, la estructura vibracional no influye en la probabilidad total de la transición entre los dos estados electrónicos. De hecho vemos que depende del momento dipolar calculado con los núcleos en la posición de equilibrio en el estado de partida (excitado).

Como los coeficientes  $A$  y  $B$  de Einstein están relacionados por 5.10 todos los razonamientos efectuados se aplican también a los procesos estimulados (pero  $D_{e'e}(q_{0e}) \neq D_{e'e}(q_{0e'})$ ).

#### 5.4.2. Reparto frecuencial de la intensidad

La subestructura vibracional de las bandas electrónicas se refleja en en la distribución espectral de la intensidad absorbida y emitida por la molécula. Así, la intensidad emitida sobre la frecuencia es la de  $(A_{e'e})_{0v}$ . Por lo tanto, será la forma de  $E_e(q)$  la que determine la distribución de la intensidad.

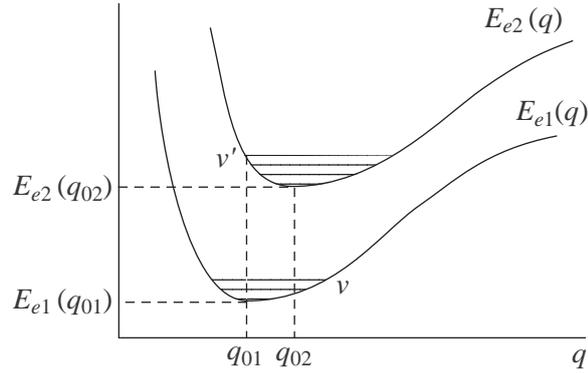
Se llama *factores de Franck-Condon* a los cuadrados de los coeficientes de la expansión 5.14:

$$F_{0v} = |C_v|^2 = \left| \int \psi_{e'0}^* \psi_{ev} dq \right|^2$$

Su conocimiento da la distribución de la intensidad en la emisión.

Así, si se puede emplear la aproximación armónica del potencial  $E_e(q)$  tendríamos que las frecuencias de la emisión y de la absorción serían, respectivamente (ver la figura 5.7):

<sup>6</sup>Cambiamos  $dv_q$  por  $dq$  porque se ha supuesto que interviene solamente un modo normal de vibración, correspondiente a la variable  $q$ .



**Figura 5.7:** Diagrama de transiciones entre los dos primeros estados electrónicos en un sistema molecular.

$$\begin{aligned}\nu_e &= \frac{E_{e2}(q_{02}) - v_0 h \nu_1 - E_{e1}(q_{01})}{h} = \nu_{12} - v_0 \nu_1 \\ \nu_a &= \frac{E_{e2}(q_{02}) + v'_0 h \nu_2 - E_{e1}(q_{01})}{h} = \nu_{12} + v'_0 \nu_2\end{aligned}$$

donde  $v_0$  y  $v'_0$  serían los números cuánticos de vibración de los niveles vibracionales en que se hacen máximos los respectivos factores de Franck-Condon (utilizamos el subíndice cero para subrayar que nos referimos a los números de vibración con máximo solape, de entre los varios que participan en la transición). El corrimiento de Stokes vale

$$\Delta\nu = \nu_a - \nu_e = v'_0 \nu_2 + v_0 \nu_1$$

Dada la relación lineal existente en este caso entre la frecuencia de la radiación y el número vibracional  $v$  o el  $v'$ , el perfil de los factores de Franck-Condon es el de la radiación, es decir, el perfil de línea (figura 5.8, abajo):

$$(A_{e'e})_{0v} = A_{e'e} F_{0v}$$

el número vibracional se calcula así a partir de las frecuencias (emisión):

$$\nu_v = \nu_{12} - v \nu_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\nu_{12} - \nu_v}{\nu_1}$$

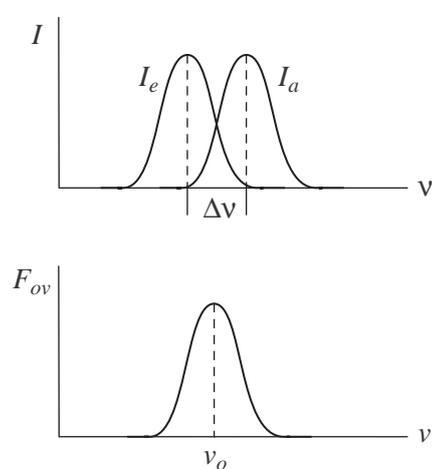
La probabilidad de emisión ( $e', v \rightarrow e, 0$ ) es pues

$$A_{e'e}(\nu_v) = A_{e'e} F_{0,(\nu_{12}-\nu_v)/\nu_1} = A_{e'e} g(\nu_e, \nu_v)$$

Y tomando  $\nu_v$  como una variable continua  $\nu$

$$1 = \sum_v F_{0v} = \sum_v F_{0,(\nu_{12}-\nu_v)/\nu_1} \quad \Rightarrow \quad \int g(\nu_e, \nu) d\nu = 1$$

$$A_{e'e}(\nu) = A_{e'e} g(\nu_e, \nu).$$



**Figura 5.8:** (arriba) El corrimiento de Stokes supone el desplazamiento hacia mayores longitudes de onda del perfil de emisión respecto al de absorción. (abajo) Perfil de los factores de Franck-Condon.



## 6 Transiciones no radiativas

### 6.1. Definición y clasificación

Se llama *transición no radiativa* a la que efectúa un sistema cuántico sin emisión de radiación. Las transiciones no radiativas suelen producirse siempre que el sistema interactúa con el medio en el que está sumergido. La probabilidad de una transición no radiativa depende de su naturaleza particular.

En sistemas cuánticos complejos se pueden distinguir diversos tipos de interacciones:

- **internas**, como la que tiene lugar entre los niveles electrónicos y vibracionales o rotacionales de dos partes del sistema atómico o molecular.
- **externas**, a través de colisiones. Éstas pueden a su vez clasificarse en
  - colisiones de primera clase: aquellas en las que la energía cinética de los agregados que chocan se transforma al menos parcialmente en energía de excitación interna a causa de la inducción de una transición no radiativa de absorción.
  - colisiones de segunda clase: las que tienen lugar cuando en la colisión la energía de excitación de los agregados que chocan se transforma en energía cinética por inducción de una transición no radiativa de emisión.

En todo caso, cualquier transición de tipo no radiativo involucra siempre dos subsistemas que intercambian energía. Utilicemos la mecánica cuántica para dar rigor a la descripción que hemos apuntado.

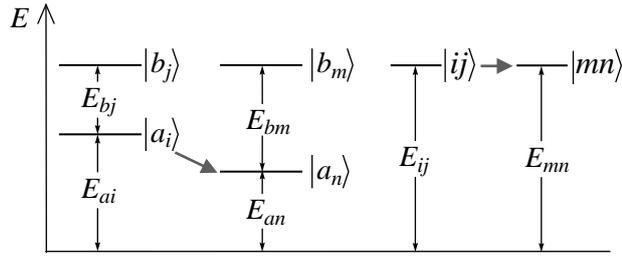
### 6.2. Probabilidades de transición

Sea un sistema formado por dos subsistemas, que llamaremos  $A$  y  $B$  y cuyos autoestados designaremos, respectivamente como  $\{|a_i\rangle\}_{i=1}^k$  con energías  $\{E_{a_i}\}_{i=1}^k$  y  $\{|b_j\rangle\}_{j=1}^l$  con energías  $\{E_{b_j}\}_{j=1}^l$ .<sup>1</sup>

En ausencia de interacción, la energía total cuando los subsistemas están en los estados  $|a_i\rangle, |b_j\rangle$  será  $E_{ij} = E_{a_i} + E_{b_j}$  y las transiciones no radiativas a otros estados  $|a_n\rangle, |b_m\rangle$  sólo serán posibles si se conserva la energía:

$$E_{ij} = E_{a_i} + E_{b_j} = E_{a_n} + E_{b_m} = E_{nm} \quad (6.1)$$

En realidad, sabemos que el proceso se producirá si hay resonancia, y por tanto si hay conservación de energía *en media*, es decir, dentro de la anchura de la resonancia.



**Figura 6.1:** Diagrama de energías para el sistema conjunto en el estado degenerado caracterizado por los números cuánticos  $i, j$  ó  $m, n$ . Como se ve, la transición conserva la energía.

El conjunto de los dos subsistemas considerado como un sistema único estará caracterizado por los autoestados  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  y las energías  $E_{ij}$ . Así visto, el sistema es cerrado y para que se conserve la energía sólo serán posibles las transiciones entre los subniveles de un nivel degenerado; Es decir,

$$|ij\rangle = |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \longrightarrow |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle = |nm\rangle \quad \text{sólo permitida si } E_{ij} = E_{nm}.$$

Si el sistema total no es degenerado no se podrán, por tanto, efectuar transiciones no radiativas. La degeneración se asegura si, como es frecuente, el sistema  $B$  tiene un espectro casi continuo.

Supongamos ahora (figura 6.1) que el sistema total se encuentra en el estado  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  con energía total  $E_{ij} = E_{a_i} + E_{b_j}$  y sea  $|a_i\rangle$  un estado excitado del subsistema  $A$  tal que  $E_{a_i} > E_{a_n}$ . Esa desigualdad implica que en la interacción el subsistema  $A$  se desexcita transfiriendo energía a  $B$ .

Una teoría fenomenológica de las transiciones no radiativas, análoga a la de Einstein para las transiciones radiativas, puede basarse en el siguiente enfoque para un conjunto de sistemas formado por subsistemas en interacción:

- el paso del estado  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  al estado  $|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$  en un tiempo  $dt$  se efectuará con una probabilidad de transición por unidad de tiempo  $P_{ij,nm}$ .
- para que el subsistema  $A$  situado en el estado  $|a_i\rangle$  pueda pasar no radiativamente al estado  $|a_n\rangle$  es preciso que el subsistema  $B$  se encuentre “preparado”, es decir en el estado  $|b_j\rangle$  de energía compatible con la transición  $|a_i\rangle \rightarrow |a_n\rangle$  de  $A$ .
- la probabilidad de transición no radiativa para la transición desde el estado  $|a_i\rangle$  al estado  $|a_n\rangle$  será el producto de la probabilidad de transición  $P_{ij,nm}$  desde el estado  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle$  al estado  $|a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$  por la probabilidad  $\rho_{b_j}$  de que el subsistema  $B$  se encuentre en el estado  $|b_j\rangle$ , es decir, la probabilidad de ocupación o población del estado  $|b_j\rangle$  en el medio que forman los sistemas  $B$ .

<sup>1</sup>En principio supondremos que los niveles no tienen degeneración, ni en  $A$  ni en  $B$ .

Con estas premisas, y denotando por  $n$  el número de subsistemas por unidad de volumen, el número de subsistemas  $A$  que ejecutan la transición del estado  $|a_i\rangle$  al  $|a_n\rangle$  asistida por la transición  $|b_j\rangle \rightarrow |b_m\rangle$  de  $B$  será, en el tiempo  $dt$  y por unidad de volumen,

$$dn_{ij,nm} = P_{ij,nm} \rho_{b_j} n_{a_i} dt.$$

Análogamente, para la transición no radiativa  $|a_n\rangle \rightarrow |a_i\rangle$  asistida por  $|b_m\rangle \rightarrow |b_j\rangle$  (la opuesta) tendremos:

$$dn_{nm,ij} = P_{nm,ij} \rho_{b_m} n_{a_n} dt.$$

Dado que es posible que la transición  $|a_i\rangle \rightarrow |a_n\rangle$  sea asistida por varias transiciones diferentes de  $B$  (cuando existen varios  $b_j$  con energías muy próximas), todas ellas conservando la energía según 6.1, se puede escribir

$$dn_{in} = \sum_j P_{ij,nm} \rho_{b_j} n_{a_i} dt$$

Podemos entonces llamar  $d_{in}$  a la probabilidad de transición no radiativa desde el estado  $|a_i\rangle$  al estado  $|a_n\rangle$ , y  $d_{ni}$  a la del proceso inverso:

$$\begin{aligned} d_{in} &= \sum_j P_{ij,nm} \rho_{b_j} \\ d_{ni} &= \sum_m P_{nm,ij} \rho_{b_m}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Se puede observar que sólo dependen de la distribución de poblaciones en el sistema  $B$ .

Quedan así las siguientes expresiones para el número de transiciones del sistema  $A$  que asistidas por el sistema  $B$  se efectúan de manera no radiativa:

$$\begin{aligned} dn_{in} &= d_{in} n_{a_i} dt \quad (\text{desexcitación}) \\ dn_{ni} &= d_{ni} n_{a_n} dt \quad (\text{excitación}) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Si el conjunto de subsistemas puede ser considerado en equilibrio térmico, por el principio de *balance detallado* (igualdad del número de transiciones en cada sentido), deberán producirse tantas transiciones  $|a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \rightarrow |a_n\rangle \otimes |b_m\rangle$  como en sentido contrario. Por lo tanto, bajo tal supuesto se verifica  $dn_{ij,mn} = dn_{nm,ij}$ , o

$$P_{ij,nm} \rho_{b_j} n_{a_i} = P_{nm,ij} \rho_{b_m} n_{a_n}.$$

En el equilibrio térmico, la distribución de Boltzmann (2.8) fija las probabilidades de ocupación en los sistemas  $A$  y  $B$ :

$$\frac{\rho_{b_j}}{\rho_{b_m}} = \exp\left(-\frac{E_{b_j} - E_{b_m}}{k_B T}\right) \quad \frac{n_{a_i}}{n_{a_n}} = \exp\left(-\frac{E_{a_i} - E_{a_n}}{k_B T}\right)$$

sustituyendo ambas en el balance detallado y recordando 6.1 tenemos

$$P_{ij,nm} = P_{nm,ij}$$

donde hemos supuesto que  $\rho_{b_j}, \rho_{b_m}, n_{a_i}, n_{a_n}$  se refieren a estados, no a niveles. Es el mismo resultado que aparecía para las transiciones radiativas con los coeficientes de Einstein.

Observemos que el planteamiento del principio de balance detallado se efectúa con las poblaciones de los distintos *estados* tanto si hay degeneración como si no la hay.

Cuando hay degeneración se puede plantear el balance de las poblaciones de los *niveles* de distinta energía. Así, el balance (menos detallado, pero el que nos interesa) de poblaciones de niveles  $E_{a_i}$  y  $E_{a_n}$  se escribe como  $dn_{in} = dn_{ni}$  e implica:

$$\frac{d_{in}}{d_{ni}} = \frac{n_{a_n}}{n_{a_i}} = \frac{g_{a_n}}{g_{a_i}} \exp\left(\frac{E_{a_i} - E_{a_n}}{k_B T}\right)$$

Lo curioso es que esta relación entre  $d_{in}$  y  $d_{ni}$  es válida aún en los casos en que el sistema  $A$  no esté en equilibrio térmico, siempre y cuando el sistema  $B$  no vea apreciablemente alterada su estadística por esta circunstancia. Ello es debido a que, como se aprecia en 6.2, las probabilidades  $d_{ni}$  y  $d_{in}$  sólo dependen de la probabilidad  $\rho_{b_j}$ , que es proporcional a la probabilidad de ocupación en el subsistema  $B$  la cual, en equilibrio térmico, está dada por la distribución de Boltzmann:

$$\rho(E_{b_j}) = \frac{g_j \exp(-E_{b_j}/k_B T)}{\sum_i g_i \exp(-E_{b_i}/k_B T)}$$

Esta ampliación del rango de validez de la relación  $d_{in}/d_{ni}$  supone por ejemplo poder tratar casos como aquél en el que  $A$  es un átomo o molécula fuera del equilibrio (excitado) pero  $B$  es un “baño” térmico. El interés reside en que abundan las situaciones en las que sólo  $A$  es lo suficientemente elemental como para hacer cálculos.

### 6.3. Transiciones no radiativas en gases

#### 6.3.1. Probabilidad de transición

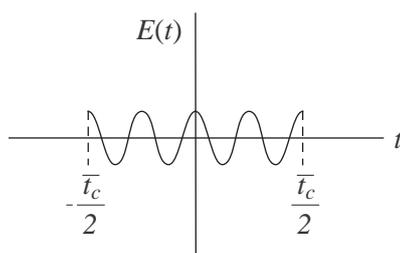
Utilizando la teoría cinética se puede obtener una estimación de la probabilidad de transición no radiativa por colisiones en gases escrita en función de magnitudes características de la sustancia gaseosa (como la masa de sus moléculas,  $m$  o la sección eficaz efectiva para producir las transiciones,  $\sigma$ ) y de su estado termodinámico (como  $P$  o  $T$ ).

Podemos partir de  $d \simeq 1/\bar{t}$ , donde  $\bar{t}$  es el tiempo medio entre colisiones y expresarlo en términos de la velocidad cuadrática media  $\bar{v}$  y del recorrido libre medio,  $\lambda$ :

$$d \simeq \frac{1}{\bar{t}} = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

que tienen los siguientes valores (ver apéndice ??, ecuación ??):

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma n \sqrt{2}}$$



**Figura 6.2:** Si el átomo está emitiendo cuando sufre una colisión, aunque sea elástica, se produce un cambio de fase arbitrario y la radiación emitida pierde la coherencia.

donde  $n = N/V$  es la densidad de moléculas; en un gas perfecto homonuclear vale

$$n = \frac{P}{k_B T}.$$

Se obtiene así la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{\frac{6}{k_B m}} \frac{P}{\sqrt{T}} \sigma. \quad (6.4)$$

Se comprueba experimentalmente que la dependencia predicha en  $P$  y  $T$  es correcta. Lamentablemente, es difícil obtener buenos valores para  $\sigma$ .

### 6.3.2. Ensanchamiento homogéneo. Anchura colisional.

Cuando ocurre una colisión la fase del campo emitido pierde la coherencia con la fase anterior porque se provoca un corte del tren de ondas emitido. Éste queda troceado entonces en tramos coherentes de una duración media igual al tiempo medio entre colisiones,  $\bar{t} = 1/d$  (figura 6.2).

Si, como en efecto ocurre, el tiempo de vida  $\tau$  del nivel excitado es mucho más largo que el periodo de la oscilación ( $\tau \gg \omega_{s's}^{-1}$ ), podemos aproximar el campo 5.11 en un tramo coherente por un campo sinusoidal, no amortiguado en su tiempo de vida,  $\bar{t}_c$ :

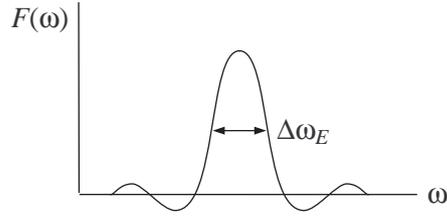
$$E = E_0 e^{-i\omega_{s's} t}, \quad -\bar{t}/2 < t < \bar{t}/2$$

Su espectro<sup>2</sup> será (figura 6.3):

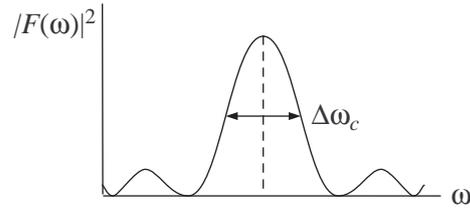
$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\bar{t}/2}^{\bar{t}/2} e^{-i(\omega_{s's} - \omega)t} dt \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin[(\omega_{s's} - \omega)\bar{t}/2]}{\omega_{s's} - \omega} \end{aligned}$$

El cuadrado del módulo de  $\tilde{E}(\omega)$  será el espectro de la intensidad (figura 6.4):

<sup>2</sup>Seguiremos la convención de usar el signo positivo para el argumento de la exponencial en las transformadas de Fourier. Denotaremos a las cantidades transformadas mediante una tilde.



**Figura 6.3:** Espectro de frecuencias del campo.  $\Delta\omega_E$  es la anchura del campo.



**Figura 6.4:** Espectro de frecuencias de la intensidad.

$$|\tilde{E}(\omega)|^2 = \frac{2E_0^2}{\pi} \frac{\sin^2 [(\omega_{s's} - \omega) \bar{t}/2]}{(\omega_{s's} - \omega)^2}$$

Cerca de la resonancia el argumento del seno,  $\omega_{s's} - \omega \equiv x$  se hace muy pequeño. Como  $\sin^2 x = \tan^2 x / (1 + \tan^2 x)$  y para  $x$  pequeño  $\tan x \simeq x$  el espectro de la intensidad se puede escribir allí como

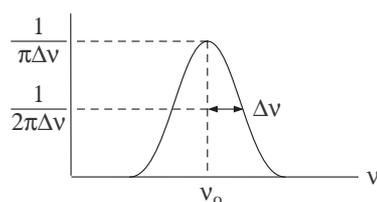
$$\begin{aligned} |\tilde{E}(\omega)|^2 &= \frac{2E_0^2}{\pi} \frac{(\bar{t}/2)^2}{1 + (\omega_{s's} - \omega)^2 (\bar{t}/2)^2} \\ &= \frac{2E_0^2}{\pi} \frac{1}{(2/\bar{t})^2 + (\omega_{s's} - \omega)^2} \end{aligned}$$

Así pues, en una primera aproximación y para las frecuencias en las que la intensidad es más elevada, las colisiones desorientadas producen un ensanchamiento con perfil de Lorentz, como en el caso de la emisión espontánea. La anchura a media altura es ahora, usando los cálculos de la teoría cinética (ec. 6.4):

$$\Delta\omega_c \simeq \frac{4}{\bar{t}} \simeq 4\sqrt{\frac{6}{k_B m}} \frac{P}{\sqrt{T}} \sigma$$

Lo difícil es conocer  $\sigma$ , pues depende del proceso. Una estimación de valor de este ensanchamiento se puede obtener utilizando  $\sigma = \pi r^2$  ( $r$  tamaño de la molécula).

**Ejemplo** En el caso del  $O_2$  tomando el valor de  $r$  del orden de la distancia entre los dos núcleos ( $r \simeq 2.5\text{\AA}$ ) y  $m = 32 \times 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  se tiene  $\sigma \simeq 2 \times 10^{-19} \text{ m}^2$ . A  $T = 300 \text{ K}$  y presión



**Figura 6.5:** Anchura a media altura  $\Delta\nu$  (*FWHM*) en un perfil lorentziano centrado en la frecuencia  $\nu_0$ .

atmosférica ( $P = 1.01 \times 10^5$  Pa), y la anchura colisional vale

$$\Delta\omega_c \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}, \quad \Delta\nu_c \simeq 2 \text{ GHz.}$$

Este ensanchamiento es dos órdenes de magnitud superior al de origen natural.

Como ilustra el ejemplo, el ensanchamiento colisional es considerablemente mayor que el natural. Dado que depende linealmente de la presión, puede controlarse reduciendo ésta. De hecho, a pesar de que este ensanchamiento siempre está presente, a presiones inferiores a 10 mm Hg es bastante próximo a la anchura natural.

Por otra parte, el mecanismo que lo genera es el mismo en media para todos los emisores, así que se trata también de un ensanchamiento homogéneo.

### 6.3.3. Ensanchamiento inhomogéneo. Anchura Doppler.

Los ensanchamientos considerados hasta ahora, de tipo natural y colisional, afectan al espectro de emisión o de absorción por igual en todos los centros. Eso implica que se puede considerar que cada uno de ellos emite con este perfil, que suele ser de tipo lorentziano con anchura  $\Delta\nu$  (figura 6.5):

$$g_L(\nu, \nu_0) = \frac{\Delta\nu}{\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu)^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\nu, \nu_0) d\nu = 1 \quad (6.5)$$

Ahora bien, frecuentemente las moléculas individuales emiten cada una en forma distinta, bien por estar afectadas por un entorno irreproducible de molécula a molécula (caso de los fluidos y otros amorfos) o bien porque el movimiento molecular produce un efecto Doppler en la radiación en el sistema de referencia del observador (caso de los gases).

Vamos ahora a estudiar el caso concreto del efecto Doppler que se aprecia al observar la radiación emitida por un gas de moléculas de masa  $m$  a la temperatura  $T$ . Como sabemos, la distribución de velocidades de un gas es gaussiana y obedece a la estadística de Maxwell-Boltzmann. Es decir, que si  $n$  es la densidad de moléculas por unidad de volumen, el número de éstas con su componente de velocidad  $v_x$  sobre el eje molécula-observador dentro del intervalo  $dv_x$  es

$$dn = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{mv_x^2}{kT}\right) dv_x.$$

**Figura 6.6:** Perfil de ensanchamiento inhomogéneo. Nótese que  $\Delta\nu'_0$  representa la anchura *total* de la gaussiana.

Sea entonces  $\nu_0$  la frecuencia central de emisión de la molécula en su propio sistema de referencia. En el sistema del observador la frecuencia central de la transición será

$$\nu'_0 = \nu_0 \left( 1 + \frac{v_x}{c} \right)$$

de donde

$$dv_x = \frac{c}{\nu_0} d\nu'_0$$

lo que permite transformar la distribución en velocidades en una distribución en frecuencias:

$$\begin{aligned} dn &= \frac{nc}{\nu_0} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp \left[ - \left( \frac{1}{\sqrt{2k_B T/m}} \frac{\nu'_0 - \nu_0}{\nu_0/c} \right)^2 \right] d\nu'_0 \\ &= \frac{n}{\delta\sqrt{\pi}} \exp - \left( \frac{\nu'_0 - \nu_0}{\delta} \right)^2 d\nu'_0 \\ &= ng_G(\nu'_0, \nu_0) d\nu'_0. \end{aligned}$$

con

$$\delta = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

y donde  $g_G$  es el *perfil de Gauss* (ver 6.6), dado por:

$$g_G(\nu'_0, \nu_0) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{\nu'_0 - \nu_0}{\delta} \right)^2 \right], \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_G(\nu'_0, \nu_0) d\nu'_0 = 1. \quad (6.6)$$

Este perfil da el reparto de las frecuencias observadas, que naturalmente tiene que estar centrado en la frecuencia de emisión en reposo, pues la distribución de velocidades es simétrica. Su anchura a media altura es

$$\frac{1}{2\delta\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{\Delta\nu'_0}{2\delta} \right)^2 \right] \longrightarrow \Delta\nu'_0 = 2\sqrt{\ln 2} \delta$$

es decir,  $\Delta\nu'_0 \simeq 1.66\delta$  es el ensanchamiento de Doppler, también denotado  $\Delta\nu_D$ .

Como hemos visto, el ensanchamiento Doppler se produce con un perfil de Gauss que da la distribución de las moléculas sobre las frecuencias centrales de emisión homogénea  $\nu'_0$ , debido en este caso al movimiento de las moléculas, o, de una forma más general, a otras causas.

## 6.4. Ensanchamiento combinado. Anchura total.

En presencia de ambos fenómenos el número de transiciones por unidad de tiempo que se producen espontáneamente con los  $dn$  átomos o moléculas será ( $dn/dt$ )

$$d^2 \left( \frac{dn}{dt} \right) = A g_L(\nu, \nu'_0) n g_G(\nu'_0, \nu_0) d\nu'_0 d\nu$$

y, en todas las frecuencias

$$d \left( \frac{dn}{dt} \right) = An \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\nu, \nu'_0) g_G(\nu'_0, \nu_0) d\nu'_0 \right] d\nu = An g_V(\nu, \nu_0) d\nu$$

donde la convolución del perfil de Gauss con el de Lorentz

$$g_V(\nu, \nu_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g_L(\nu, \nu'_0) g_G(\nu'_0, \nu_0) d\nu'_0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g_V(\nu, \nu_0) d\nu = 1$$

es el llamado *perfil de Voigt*.

Existen dos casos límite:

1. Si el ensanchamiento homogéneo  $\Delta\nu_L$  es pequeño frente al inhomogéneo  $\Delta\nu_D \ll \Delta\nu_D \rightarrow g_L(\nu, \nu'_0) \simeq \delta(\nu - \nu'_0)$  y entonces  $g_V(\nu, \nu_0) \simeq g_G(\nu, \nu_0)$ .
2. Si, por el contrario,  $\Delta\nu_D \ll \Delta\nu_L$  entonces  $g_G \simeq \delta(\nu'_0 - \nu_0)$  y  $g_V(\nu, \nu_0) \simeq g_L(\nu, \nu_0)$ .

En la práctica ambos perfiles suelen estar mezclados y el resultado es parecido a un perfil suma de los dos que se convolucionan.

Como se ha visto en el apartado 5.3.5, la anchura natural de una transición es

$$\Delta\omega_n = A = \tau^{-1} = \gamma/2$$

donde  $\gamma$  es la constante de pérdidas de la energía por emisión espontánea. Para una transición electrónica, como sabemos,  $A \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}$ , por lo cual,  $\Delta\omega_n = 10^8 \text{ s}^{-1}$ , un valor mucho menor que el ensanchamiento colisional que, como vimos en el ejemplo 6.3.2, era  $\Delta\omega_c \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$  para el  $\text{O}_2$  a 1 atm y 300 K.

**Ejemplo** Podemos también estimar la anchura Doppler para la molécula de  $\text{O}_2$ , a la misma temperatura y en la longitud de onda de la luz verde ( $\lambda \simeq 0.5 \mu\text{m}$ ), es decir con

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

Así tenemos  $\delta \simeq 0.8 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ ,  $\Delta\nu'_0 \simeq 1.3 \times 10^9 \text{ Hz}$ ,  $\Delta\omega_D \simeq 8.4 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ , un valor del mismo orden que la anchura colisional y dos órdenes de magnitud por encima de la anchura natural.

Ambos mecanismos (colisional y Doppler) producen ensanchamientos mucho mayores que la anchura natural.

Al estar la temperatura dentro de una raíz cuadrada, su influencia en el ensanchamiento Doppler está muy amortiguada. Así, incluso para moléculas grandes, habría que reducir la temperatura hasta algunas centésimas de grado Kelvin para que  $\Delta\nu_D$  fuera del orden de la anchura natural.

Los ensanchamientos reducen la precisión de las medidas espectroscópicas, por lo que se han buscado mejores técnicas para reducirlos. Tratamos un par de ellas en la sección siguiente, después de considerar con más detalle la convolución de perfiles.

### 6.4.1. Convolución de dos perfiles de Lorentz

Hemos estudiado en el apartado precedente que la superposición del ensanchamiento homogéneo de la radiación emitida por un emisor material con el inhomogéneo de las frecuencias centrales de emisión del conjunto de emisores daba lugar a un perfil formado como la convolución de los dos perfiles correspondientes. Si el ensanchamiento homogéneo tiene un perfil de Lorentz y el inhomogéneo de Gauss, la convolución de ambos produce el de Voight. El cálculo sólo se puede realizar numéricamente, y por lo tanto sus características no aparecen de una manera transparente.

Vamos ahora a estudiar un caso en que puede efectuarse el cálculo completo de forma que el resultado se expresa en forma algebraica. Supongamos que *los dos* perfiles son de tipo lorentziano. Usaremos la siguiente notación para los dos perfiles homogéneos:

$$g_k(\omega, \omega'_0) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega'_0)^2 + \Gamma^2}$$

$$g_i(\omega'_0, \omega_0) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega'_0 - \omega_0)^2 + \gamma^2}$$

la convolución de ambos se calcula en el apéndice ??, y viene dada por

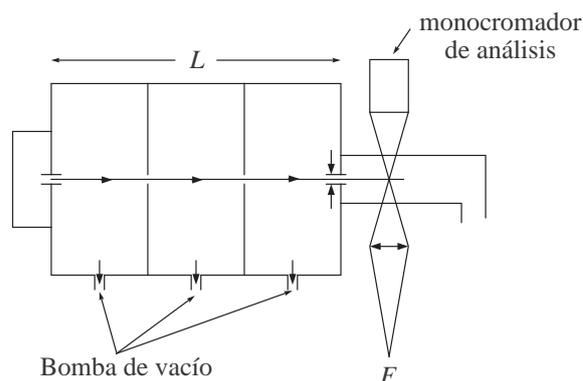
$$g_c(\omega, \omega_0) = \frac{\gamma + \Gamma}{\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma + \Gamma)^2}.$$

Comprobamos que el perfil de convolución en este caso es también un perfil de Lorentz cuya anchura es la suma de las anchuras de los dos perfiles, y que aparece centrado en la frecuencia central del perfil que hemos supuesto inhomogéneo,  $\omega_0$ . Este comportamiento es también muy aproximadamente el de la convolución de Voight y el de casi todos los perfiles usuales.

## 6.5. Técnicas de enfriamiento de átomos

### 6.5.1. Haces atómicos

Se puede conseguir el enfriamiento transversal (baja velocidad transversal  $\sim$  baja temperatura transversal) de los átomos de un gas por colimación sucesiva de un haz.



**Figura 6.7:** Dispositivo para lograr el enfriamiento transversal de un grupo de átomos.

Para conseguirlo, se dispone una fuente gaseosa de átomos de la especie elegida de forma que escapen por un pequeño orificio a una cámara de vacío de la que sólo pueden salir por otro pequeño orificio hacia otra cámara de vacío. Y así sucesivamente (figura 6.7). Todos estos orificios están alineados, de modo que al último sólo llegan los átomos cuya velocidad transversal es lo suficientemente pequeña.

Demos una traducción matemática a esta descripción.

La velocidad de salida  $v$  de los átomos por el primer orificio se obtiene de la temperatura  $T$  de la fuente gaseosa

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \longrightarrow v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Si  $v_t$  es la velocidad transversal con que pueden salir los átomos por el último agujero, de diámetro  $d$  y a una distancia  $L$  del primero

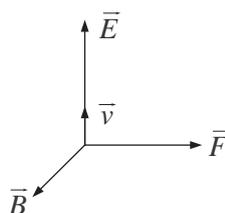
$$v_t = \frac{d}{L}v$$

y la temperatura transversal a que equivale esta velocidad es

$$T_t = \left(\frac{d}{L}\right)^2 T$$

Por lo tanto, si empleamos dos orificios de  $d = 1$  mm y una longitud de  $L = 1$  m con  $T = 300$  K, la temperatura transversal resulta  $T_t \simeq 3 \times 10^{-4}$  K por lo que, en la dirección transversal, los átomos pueden ser considerados prácticamente sin efecto Doppler.

El principal inconveniente de este sistema es que el número de átomos que llegan a la cámara de medida es extraordinariamente pequeño, con lo cual resulta difícil realizar experimentos con ellos.



**Figura 6.8:** Acción de una onda electromagnética sobre una carga con velocidad  $\mathbf{v}$ .

### 6.5.2. Confinamiento por presión de radiación

Recientemente se ha empleado otra técnica basada en la presión de la radiación sobre la materia, el mecanismo detrás de la formación de las colas de los cometas y de las ingeniosas *velas solares*.

#### Imagen clásica

La fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada es  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$  (figura 6.8). El término magnético se puede expresar como

$$q \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge E \hat{u}_B$$

de modo que, dado el pequeño valor usual de  $\mathbf{v}/c$ , la fuerza magnética es pequeña en comparación con la eléctrica. Así, en una onda  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{E}$  y la fuerza magnética apunta en todo momento en la misma dirección, produciéndose un efecto acumulativo (presión de la radiación) debido al campo magnético sobre la carga.

#### Imagen semiclásica

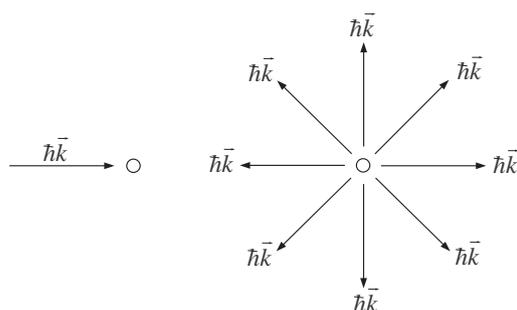
Cada vez que un átomo recibe un fotón, absorbe con él una cantidad de movimiento  $\hbar \mathbf{k}$ . Si el fotón es luego reemitido espontáneamente, el átomo devuelve el momento  $\hbar \mathbf{k}$  al medio pero en una dirección arbitraria con respecto a la dirección inicial de propagación del fotón (figura 6.9). Por lo tanto, en promedio espacial, los fotones emitidos espontáneamente se llevan un momento nulo.

Es decir, que, en promedio, por cada emisión espontánea el átomo gana la cantidad de movimiento  $\hbar \mathbf{k}$  del correspondiente fotón incidente.

Los fotones emitidos estimuladamente no cuentan, pues su cantidad de movimiento  $\hbar \mathbf{k}$  está en la misma dirección que la incidente.

Para saber la fuerza que este intercambio de cantidades de movimiento produce sobre el átomo es preciso conocer la cantidad de movimiento adquirida en la unidad de tiempo.

A fin de efectuar una estimación sencilla podemos considerar el caso en que la radiación es tan intensa que el átomo tiene las probabilidades de emisión y absorción estimuladas mucho mayores que la probabilidad de desexcitación espontánea. En esta situación se dice que la transición está *saturada* y el átomo está la mitad de tiempo en el nivel excitado,



**Figura 6.9:** Si el átomo recibe varios paquetes de momento como el que se muestra a la izquierda, la emisión espontánea de éstos en direcciones arbitrarias (a la derecha) da lugar a una suma vectorial nula de momento cedido por el átomo.

y la otra mitad en el fundamental. Es decir, que en el colectivo, el mismo número de átomos está en cada nivel. Esto es factible sólo si los procesos estimulados dominan, ya que la emisión espontánea tiende a desequilibrar el reparto. Una situación así se puede conseguir utilizando una fuente de radiación láser de unas decenas de mW de potencia.

En el nivel excitado, la probabilidad de desexcitación espontánea por unidad de tiempo es  $A$ . Entonces, en la situación de saturación, el número de desexcitaciones espontáneas de los átomos por unidad de tiempo es  $A/2$  y, como por cada emisión espontánea el átomo ha absorbido, en media espacial, la cantidad de movimiento  $\hbar\mathbf{k}$ , la fuerza será

$$\mathbf{F} = \frac{A}{2} \hbar\mathbf{k}.$$

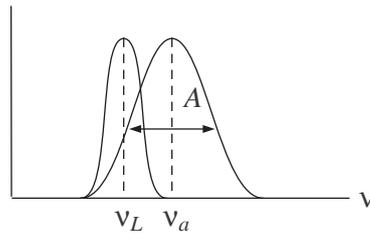
Para una longitud de onda de 500 nm y una probabilidad espontánea típica de  $10^8 \text{ s}^{-1}$ , esta fuerza sería la que produciría sobre un electrón un campo eléctrico de  $5 \times 10^8 \text{ V/cm}$ , unas 40.000 veces mayor que el peso de un átomo de 100 u.a. de masa. Harían falta diez mil procesos de absorción-emisión espontánea para detener un átomo con la energía cinética térmica que corresponde a una temperatura  $T = 300 \text{ K}$ .

En la práctica, el proceso de enfriamiento de los átomos se realizará mediante la luz de un láser emitiendo en una frecuencia  $\nu_L$  algo menor que la de absorción atómica  $\nu_a$  pero dentro de la anchura de línea (figura 6.10).

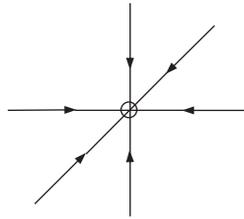
Como el número de absorciones por segundo es mayor cuánto más próxima esté  $\nu_L$  a  $\nu_a$ , también lo es entonces la presión de radiación.

Así, cuando el átomo se mueve en sentido opuesto a la luz recibe la radiación láser desplazada por efecto Doppler hacia frecuencias más próximas a  $\nu_a$  y es frenado con una fuerza mayor cuanto mayor sea su velocidad. Bajo la acción de la luz los átomos que se mueven contra ella, por lo tanto, se frenarían primero, para avanzar luego en la dirección de la luz.

Para evitar esa fase posterior de retroceso se sitúa otro haz de luz de la misma frecuencia e intensidad en sentido opuesto al primero. De esta manera, los átomos son detenidos en cuanto se mueven en cualquiera de los dos sentidos.



**Figura 6.10:** La curva de emisión del láser está centrada en una frecuencia  $\nu_L$  inferior a frecuencia central de la de la curva de absorción atómica.



**Figura 6.11:** Esquema de una melaza óptica.

Si según cada uno de los tres ejes se dirigen dos rayos enfrentados, en la intersección de todos ellos los átomos quedarán en reposo (figura 6.11). Es lo que se llama una *melaza óptica*.

Utilizando este tipo de sistemas se ha conseguido establecer en una región temperaturas tan reducidas como  $10^{-9}$  K, lo que permite la investigación con átomos coherentes en condensados de Bose-Einstein, como si se tratase de luz coherente.

## 7 El modelo probabilístico

Si bien la electrodinámica cuántica es la teoría más rigurosa y fundamental de la interacción de la radiación con la materia, es imposible, en la práctica, encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de la óptica cuántica. Por otra parte, el uso de la teoría de perturbaciones y de otras aproximaciones, restringe en gran medida la aplicabilidad de los resultados finales. En particular, en los casos en que el operador de interacción es grande, la teoría de perturbaciones resulta inadecuada.

Por estas razones muchos de los problemas son resueltos por el método probabilístico de los coeficientes de simetría, cuyas bases hemos ya estudiado.

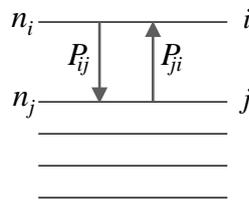
En este método se suponen conocidas las energías de los niveles y los coeficientes de Einstein, quedando el problema reducido a determinar las poblaciones de los niveles y las densidades de radiación. Como los coeficientes se pueden medir experimentalmente, y como no necesitamos información de fase, no es necesario recurrir a la electrodinámica cuántica.

### 7.1. La evolución de la población de los niveles

Así, dado que suponemos que el número de transiciones por unidad de tiempo y por unidad de volumen que se producen del nivel  $i$  al  $j$  es proporcional a la población del nivel (figura 7.1):

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_j P_{ij} + \sum_j n_j P_{ji} \quad (7.1)$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones diferenciales tenemos la dinámica de las poblaciones.



**Figura 7.1:** El número de transiciones es proporcional a la población del nivel. Aquí  $P_{ij}$  y  $P_{ji}$  son las probabilidades de transición y  $n_i, n_j$  las densidades de población de los niveles  $i, j$  por unidad de volumen.

Suponiendo  $E_i > E_j$  (es decir, puede haber transiciones espontáneas de  $i$  a  $j$ , pero no al revés) las probabilidades de transición son

$$\begin{aligned} P_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}u_{ij} + d_{ij} \\ P_{ji} &= B_{ji}u_{ij} + d_{ji} \end{aligned}$$

Aquí  $u_{ij} = u_\nu(\nu_{ij})$  es la densidad de energía de la radiación por unidad de volumen y de intervalo de frecuencia en la frecuencia  $\nu_{ij} = (E_i - E_j)/h$  de la transición;  $d_{ij}$  y  $d_{ji}$  son las probabilidades de transición no radiativas. Finalmente, y según se ha demostrado (ec. 5.10), para una orientación isotropa átomo-radiación

$$\frac{B_{ij}}{B_{ji}} = \frac{g_j}{g_i}, \quad \frac{A_{ij}}{B_{ij}} = \frac{8\pi h \nu_{ij}^3}{c^3}$$

donde  $g_i$  y  $g_j$  son las degeneraciones de los niveles  $i$  y  $j$ .

Como se ve, la ec. 7.1 está en función de la densidad de radiación por unidad de volumen y unidad de intervalo de frecuencia que está siendo intercambiada, así que se necesitan ecuaciones específicas para esta variable. Más adelante estudiaremos cómo la radiación suele obedecer a ecuaciones de tipo difusivo o tipo Boltzmann (de propagación), que bajo ciertas condiciones pueden reducirse a ecuaciones de balance, en cuyo caso las estudiaremos.

## 7.2. Tiempo de vida radiativo

Supongamos que excitamos la molécula con una radiación resonante en la frecuencia de absorción. Asumimos que la relajación mecánica del estado excitado es muy rápida. En estado estacionario (figura 7.2) se anula la derivada de 7.1 y para el nivel 2 tenemos:

$$W_{12}n_1 - An_2 - d_{21}n_2 = 0$$

es decir, teniendo en cuenta que  $A = \tau_r^{-1}$  y  $d_{12} = \tau_n^{-1}$ ,

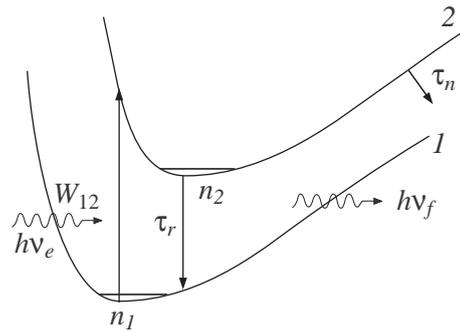
$$W_{12}n_1 - \frac{n_2}{\tau_r} \left( 1 + \frac{\tau_r}{\tau_n} \right) = 0 \quad (7.2)$$

Se define la *eficiencia cuántica* de la luminiscencia como relación entre la salida *radiativa* y la entrada,

$$\eta \equiv \frac{n_2 \tau_r^{-1}}{W_{12}n_1}$$

por lo tanto 7.2 se reescribe como

$$1 - \eta \left( 1 + \frac{\tau_r}{\tau_n} \right) = 0$$



**Figura 7.2:** En el estado estacionario el ritmo de excitación  $W_{12}n_1$  iguala al de desexcitación, radiativa ( $\tau_r^{-1}n_2$ ) o no ( $\tau_n^{-1}n_2$ ).

Cuando un proceso de desexcitación se puede efectuar por varias vías, no se pueden medir los tiempos de relajación asociados a cada una individualmente. En su lugar, se mide un tiempo  $\tau$  del proceso global (aquí, el proceso de desexcitación por ambas vías a la vez) que está relacionado con los individuales por la *regla de Mathiessen*, que no es otra cosa que afirmar que la probabilidad total es la suma de las probabilidades individuales. Dicho de otro modo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_n} \\ \frac{\tau_r}{\tau_n} &= \frac{\tau_r}{\tau} - 1\end{aligned}$$

Entonces el tiempo de vida radiativo se puede estimar conociendo la eficiencia cuántica  $\eta$  (que se puede medir) y el tiempo de vida total de la luminiscencia,  $\tau$  (ídem):

$$1 - \eta \left(1 + \frac{\tau_r}{\tau} - 1\right) = 0 \longrightarrow \tau_r = \frac{\tau}{\eta}$$

De otro modo ( $\mu(\omega_0)$  es el índice de refracción a la frecuencia  $\omega_0$ ):

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{\omega_0^3 |\mathbf{D}_{12}|^2}{3\pi\hbar\epsilon_0 c_0^3} \mu^3(\omega_0).$$



## 8 El campo electromagnético paraxial

Una de las formas de construir un láser es como un dispositivo formado por un medio amplificador encerrado en un resonador Fabry-Perot. En el seno del medio amplificador se propagan ondas según el eje del resonador. En este capítulo vamos a estudiar con más detalle las características de estas ondas.

### 8.1. La ecuación de ondas

Como vimos al revisar la electrodinámica clásica (sección 1.1) el potencial vector queda sometido a una ecuación de ondas clásica, al igual que los campos,

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = 0$$

Vamos ahora a suponer que, como ocurre en el láser, la onda se propaga básicamente en la dirección del eje  $z$  con una frecuencia angular  $\omega$  y con una determinada polarización  $\mathbf{e}$ . Estas hipótesis permiten una descripción escalar del campo,  $\mathbf{E} = \mathbf{e}E$ . La ecuación de ondas se expresa entonces así:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1)$$

Las soluciones que nos interesan son ondas planas que tienen una dependencia espacio-temporal rápida en la fase, con el vector de ondas  $\mathbf{k}$  casi paralelo al eje  $z$  y frecuencia angular  $\omega$ , pero con una amplitud  $u(\mathbf{r})$  lentamente variable<sup>1</sup>, es decir

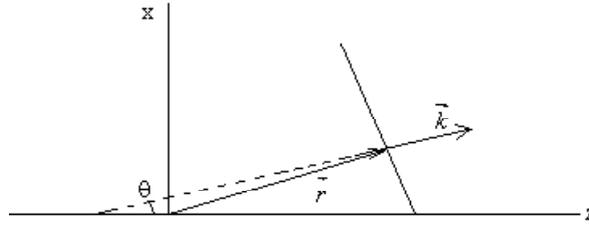
$$E = u(\mathbf{r}) e^{i(\omega t - kz)} \quad (8.2)$$

con la relación de dispersión usual  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

Podemos reescribir la ecuación de ondas 8.1 para esta onda menos general. En efecto, al sustituir allí las derivadas segundas del campo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} - k^2 u \right) e^{i(\omega t - kz)} & \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 u e^{i(\omega t - kz)}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Una dependencia temporal lenta en  $u$ ,  $u(\mathbf{r}, t)$  es también en principio posible, pero ésta no cambiaría esencialmente la física de la radiación que nos proponemos estudiar y por ello no la vamos a considerar.



**Figura 8.1:** La aproximación paraxial es válida cuando el ángulo  $\theta$  entre la dirección de propagación (dada por  $\mathbf{k}$ ) y el eje es pequeño.

obtenemos una ecuación en la amplitud  $u(\mathbf{r})$ :

$$\Delta u - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (8.3)$$

La dependencia que queda en  $u$  respecto a las variables espaciales es, esencialmente, de origen difraccional, es decir, de dependencia lenta en las variables transversas  $x, y$  y lenta en  $z$ .

## 8.2. Introducción a la aproximación paraxial

Las dependencias espaciales lentas en  $u$  nos llevan a establecer la *aproximación paraxial*. Podemos considerar que esta ésta es aplicable cuando los cambios de  $\partial u / \partial z$  con  $z$ , representados por la segunda derivada, son tan pequeños que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll \left| 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \right| \rightarrow \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ll \frac{\partial u}{\partial z} \quad (8.4)$$

Bajo la aproximación paraxial la ecuación de ondas 8.3 se reescribe así ( $\Delta_t$  es el laplaciano transversal):

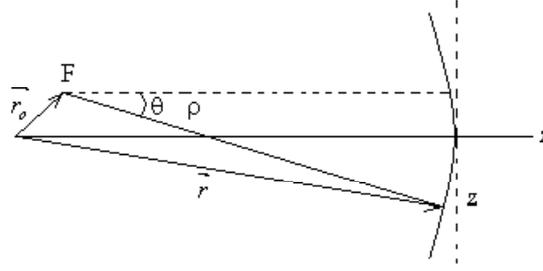
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = \Delta_t u - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \simeq 0 \quad (8.5)$$

Para discutir de una forma más diáfana la aplicabilidad de la aproximación paraxial vamos a considerar el siguiente razonamiento (figura 8.1).

Supongamos que la onda plana se propaga formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $Z$ . En el plano  $XZ$  el campo escalar de este frente de ondas viene dado por

$$\begin{aligned} E &\propto \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp(-i(k_x x + k_z z)) = \exp(-ik(z \cos \theta + x \sin \theta)) \\ &= \exp(-ik[z(\cos \theta - 1) + x \sin \theta]) \exp(-ikz) \\ &= u(x, z) e^{-ikz}, \end{aligned}$$

habiendo llamado  $u(x, z) = \exp(-ik[z(\cos \theta - 1) + x \sin \theta])$  a la dependencia lenta en  $z$  debida al ángulo  $\theta$ . Veamos, pues, si sus derivadas cumplen la aproximación paraxial



**Figura 8.2:** Ondas esféricas en la aproximación paraxial. Atención: el punto de tangencia del frente de ondas con la línea vertical rayada debería producirse a la altura de la línea horizontal rayada.

y en qué condiciones lo hacen. Para ángulos  $\theta \ll 1$  vale  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ , así que

$$\begin{aligned} -2ik \frac{\partial u}{\partial z} &= 2k^2 (1 - \cos \theta) u \simeq k^2 \theta^2 u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -k^2 (1 - \cos \theta)^2 u \simeq k^2 \frac{\theta^4}{4} u \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -k^2 \sin^2 \theta u \simeq -k^2 \theta^2 u \end{aligned} \quad (8.6)$$

Por tanto, si  $\theta < 0.5$  ( $\theta < 30^\circ$ ) el término  $\partial^2 u / \partial z^2$  es, al menos, un orden de magnitud menor que  $2ik \partial u / \partial z$  y que las otras derivadas. Despreciamos pues términos en  $\theta^4$ . Así pues, la aproximación paraxial no es demasiado exigente y resulta fácil de cumplir. Ello permite tratar ondas esféricas dentro de esta aproximación.

### 8.3. Ondas esféricas en la aproximación paraxial

Consideremos entonces una onda esférica, solución asintótica a larga distancia de la ecuación de ondas 8.1. La expresión en el punto  $\mathbf{r}$  (a la distancia  $\rho$  del foco) de una onda esférica con centro en  $\mathbf{r}_F$  es (ver figura 8.2):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F) &= \frac{e^{-ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F)}}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F)} \\ \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F) &= \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 + (z - z_F)^2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Para que el frente de ondas pueda ser tratado dentro de la aproximación paraxial es preciso que las componentes transversales  $x_F, y_F$  de  $\mathbf{r}_F$  y  $x, y$  de  $\mathbf{r}$  sean pequeñas frente a la componente axial de  $\mathbf{r}$ ,  $z$ . Entonces podemos desarrollar la raíz en  $\rho$ :

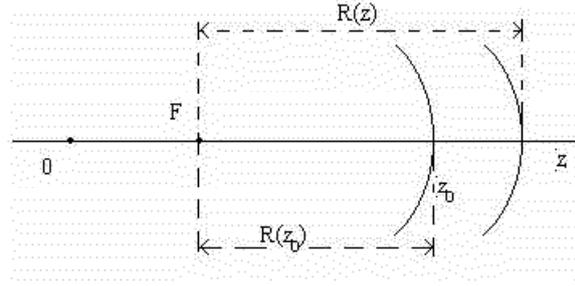


Figura 8.3: Radio de curvatura de la onda esférica.

$$\begin{aligned}
 \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F) &= (z - z_F) \left[ 1 + \frac{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}{(z - z_F)^2} \right]^{1/2} \\
 &\simeq (z - z_F) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{(y - y_F)^2 + (x - x_F)^2}{(z - z_F)^2} \right) \\
 &= z - z_F + \frac{1}{2} \frac{(y - y_F)^2 + (x - x_F)^2}{z - z_F}
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

En el desarrollo de  $\rho$  hemos conservado los términos cuadráticos en  $\theta$ ,

$$\left( \frac{x - x_F}{z - z_F} \right)^2 \simeq \theta^2$$

que son como acabamos de ver los que cuentan en la aproximación paraxial de la fase. En el denominador del campo (ec. 8.7) podemos tomar una aproximación menor<sup>2</sup> para  $\rho$ ,  $\rho \simeq z - z_F$ . De este modo, la onda esférica en la aproximación paraxial queda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F) = \frac{1}{z - z_F} \exp \left[ -i \frac{k}{2} \frac{(y - y_F)^2 + (x - x_F)^2}{z - z_F} \right] \exp [-ik(z - z_F)].$$

**Ejercicio** verificar que la amplitud de este campo,

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}_F) = \frac{1}{z - z_F} \exp \left[ -i \frac{k}{2} \frac{(y - y_F)^2 + (x - x_F)^2}{z - z_F} \right] \tag{8.9}$$

es una solución exacta de la ecuación paraxial 8.5.

Utilizaremos la figura 8.3 como punto de referencia.

<sup>2</sup>En efecto, al ser  $\rho$  grande frente a  $\lambda$ , período espacial de la fase, una pequeña variación  $\Delta\rho$  en la fase tiene un gran impacto, ya que allí  $\rho$  es argumento de funciones trigonométricas, sin y cos. Sin embargo este  $\Delta\rho$  es pequeño frente a  $\rho$ , y ésta es la razón por la que no tomamos más que el primer término para el denominador.

Sea el punto fuente  $\mathbf{r}_F$  sobre el eje  $z$  ( $x_F = y_F = 0$ ) en una posición arbitraria y llamemos  $R(z)$  al radio de curvatura de la onda y  $\phi(\mathbf{r})$  a su fase transversa. Podemos escribir, para un punto  $z_0$

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{e^{-i\phi(\mathbf{r}_0)}}{R(z_0)} \quad (8.10)$$

$$\phi(\mathbf{r}_0) = \frac{k x_0^2 + y_0^2}{2 R(z_0)} \quad (8.11)$$

La posición del foco o fuente,  $z_F = z_0 - R(z_0)$  es arbitraria y por tanto si cambiamos esta constante la onda no dejará de ser solución de la ecuación paraxial. Entonces la onda en un punto genérico  $z$  tendría amplitud y fase transversa como en 8.10 y 8.11 respectivamente, pero sustituyendo  $z_0$  por  $z$ . El radio de curvatura en  $z$  es

$$R(z) = z - z_F = z - [z_0 - R(z_0)] \quad (8.12)$$

A lo largo del el razonamiento precedente hemos considerado que la amplitud es la misma en todo el frente de ondas. Como la aproximación paraxial no es válida lejos del eje, nos interesan las ondas que concentran su amplitud en las proximidades de éste. Una forma de introducir un perfil de amplitud transversa en las ecuaciones es hacer  $z_F$  (y por tanto  $\phi$ ) complejas. En concreto, se trata de cambiar  $z_F$  por  $z_F - iq_{0i}$  en las ecuaciones, lo que conduce a sustituir los radios de curvatura también por cantidades complejas:

$$\begin{aligned} q_{0r} \equiv R(z_0) = z_0 - z_F &\longrightarrow q_0 = q_{0r} + iq_{0i} \\ q_r \equiv R(z) = z - z_F &\longrightarrow q(z) = q_0 + z - z_0 = q_{0r} + z - z_0 + iq_{0i} \end{aligned} \quad (8.13)$$

La fase transversa también cambia: en  $\phi(\mathbf{r})$  se cambia  $1/R(z)$  por  $1/q(z)$ , que separado en parte real e imaginaria tiene la siguiente expresión:

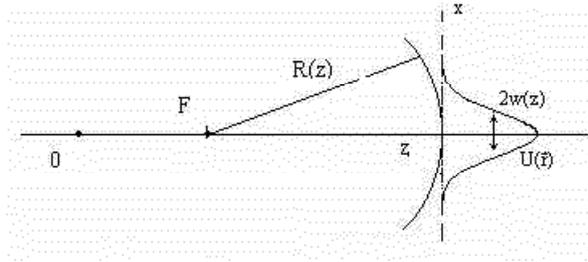
$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{1}{q_{0r} + z - z_0 + iq_{0i}} \\ &= \frac{q_{0r} + z - z_0 - iq_{0i}}{(q_{0r} + z - z_0)^2 + q_{0i}^2} \\ &= \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kw^2(z)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

así que

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{k}{2} (x^2 + y^2) \left( \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{kw^2(z)} \right)$$

donde vemos que la parte real de  $\phi$  depende de un parámetro conocido, el radio de curvatura en  $z$ , y la imaginaria de uno nuevo, la *cintura del haz* en  $z$ ,  $w(z)$ . Sus valores respectivos son:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{(q_{0r} + z - z_0)^2 + q_{0i}^2}{q_{0r} + z - z_0} \\ w^2(z) &= \frac{2}{k} \frac{(q_{0r} + z - z_0)^2 + q_{0i}^2}{q_{0i}} \end{aligned}$$



**Figura 8.4:** Significado geométrico de los parámetros  $R(z)$  y  $w(z)$  en la solución esférica paraxial.

Como solamente hemos cambiado el valor de  $z_F$ , la onda esférica así construida sigue siendo solución de la ecuación paraxial 8.5 y su amplitud se escribe

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{q(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)}\right)$$

Esta onda tiene un perfil transverso de amplitud gaussiana, que la confina en una región de anchura  $2w(z)$  alrededor del eje  $Z$  en el punto en que el frente de ondas tiene un radio  $R(z)$  (figura 8.4). Es conocida como la *solución esférica gaussiana de más bajo orden en el dominio paraxial*. A continuación inscribiremos esta solución en el contexto de un análisis más general que dará los órdenes superiores.

## 8.4. Modos gaussianos

La solución esférica gaussiana encontrada en el apartado precedente pertenece a un conjunto más general de soluciones de la ecuación paraxial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (8.15)$$

Estas soluciones tienen las variables transversas rectangulares separadas.

$$u_{nm}(\mathbf{r}) = u_n(x, z)u_m(y, z) \quad (8.16)$$

Así, al sustituir en la ecuación y dividir por la solución  $u_{nm}(\mathbf{r})$ ,

$$\frac{1}{u_n} \left( \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u_n}{\partial z} \right) + \frac{1}{u_m} \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u_m}{\partial z} \right) = 0$$

Como  $u_n$  sólo depende de  $x$  y  $u_m$  sólo depende de  $y$  podemos efectuar la separación de la ecuación anterior en dos ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u_n}{\partial z} = f(z)u_n$$

En esta expresión  $f(z)$  es una función de separación arbitraria que para las soluciones que nos interesan tomaremos como idénticamente nula. Es decir

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - 2ik \frac{\partial u_n}{\partial z} = 0 \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u_m}{\partial z} = 0 \quad (8.18)$$

Al haber separado las variables transversas rectangulares las soluciones que hallaremos tendrán una simetría transversa rectangular.

Como las ecuaciones 8.17 y 8.18 son formalmente idénticas basta con resolver una de ellas. El lector puede aceptar y comprobar la solución 8.19 en una primera lectura. Su deducción detallada se ofrece en el apéndice ???. Usando las ecuaciones de dicho apéndice ??, ?? y ?? en ?? obtenemos la siguiente expresión para la amplitud del  $n$ -ésimo modo (el parámetro  $\psi$  viene dado por ?? y se llama fase de Guoy):

$$u_n(x, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{e^{i(2n+1)[\psi(z)-\psi(0)]}}{2^n n! w(z)}} H_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{w(z)}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-i\frac{kx^2}{2R(z)}\right) \quad (8.19)$$

En esta expresión los polinomios de Hermite se derivan de la fórmula generadora

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left[ e^{-\xi^2} \right] \quad (8.20)$$

Aunque también conociendo los dos de orden más bajo,

$$H_0 = 1 \quad \text{y} \quad H_1 = 2\xi \quad (8.21)$$

los demás se pueden obtener por recurrencia de

$$H_{n+1} = 2\xi H_n - 2nH_{n-1}. \quad (8.22)$$

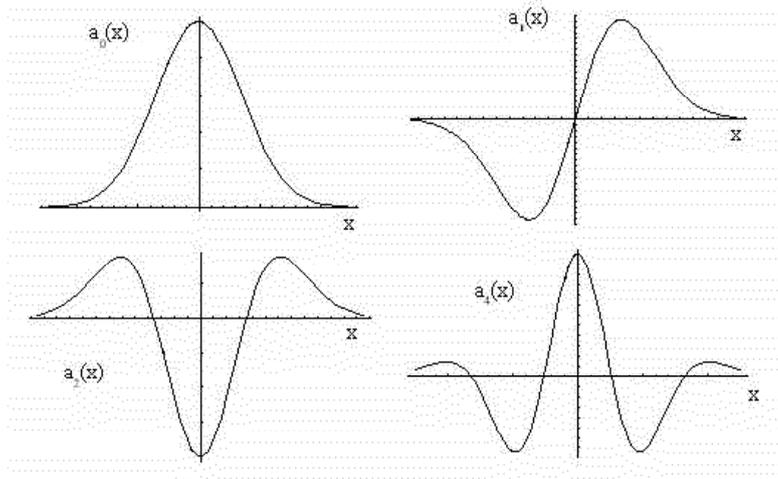
Ejercicio: comprobar que el modo gaussiano de orden más bajo que obtuvimos con anterioridad se corresponde con  $u_0$  calculando su constante de normalización.

Exactamente el mismo proceso se puede seguir para la ecuación 8.18 en la variable  $y$ , con idénticos resultados, de modo que una geometría arbitraria de campo siempre se puede escribir en función de la base completa  $u_n u_m$  para las soluciones paraxiales así:

$$E(\mathbf{r}) = \left( \sum_n \sum_m C_{nm}(z) u_n(x, z) u_m(y, z) \right) e^{-ikz} \quad (8.23)$$

Donde los coeficientes de la expansión serán

$$C_{nm}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x, z) u_m^*(y, z) E(\mathbf{r}) e^{ikz} dx dy \quad (8.24)$$



**Figura 8.5:** Aspecto según un eje transversal de los diversos modos gaussianos, resultantes del producto entre polinomios de Hermite y una gaussiana de anchura  $w$ .

La geometría de estas soluciones es semejante a la de las funciones de onda del oscilador armónico. En la figura 8.5 hemos representado el factor

$$a_n = H_n \left( \frac{x\sqrt{2}}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{w^2} \right)$$

Los ceros de estas funciones vienen dados por los del polinomio  $H_n$ , que tiene  $n$  ceros. Las distribuciones de la intensidad serán proporcionales al cuadrado del campo, es decir, a  $u_n^*(x, z)u_n(x, z)u_m^*(y, z)u_m(y, z)$ . La figura 8.5 muestra la amplitud de algunos modos según una dirección transversal mientras que en 8.6 se representa la intensidad según ambas direcciones transversales. Las dos figuras son para un  $z$  fijo.

El campo 8.23 de los modos gaussianos, una vez calculados los coeficientes, será

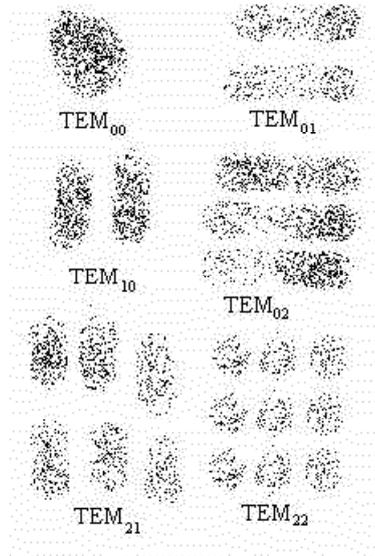
$$E_{nm} \propto H_n \left( \frac{x\sqrt{2}}{w_x(z)} \right) H_m \left( \frac{y\sqrt{2}}{w_y(z)} \right) e^{-\frac{x^2}{w_x^2}} e^{-\frac{y^2}{w_y^2}} e^{-i\frac{kx^2}{2R_x}} e^{-i\frac{ky^2}{2R_y}} e^{-ikz}. \quad (8.25)$$

La geometría de los modos gaussianos rectangulares (de *Gauss-Hermite*) dados por la ecuación anterior genera las distribuciones transversas de intensidad de la figura 8.6, que se denominan *modos*  $TEM_{nm}$ .

Finalmente es preciso señalar que la expresión ?? nos indica que en la propagación del frente de ondas permanece invariante la magnitud

$$\frac{w(z)}{q(z)} = \frac{w(0)}{q(0)}. \quad (8.26)$$

La ecuación en derivadas parciales que hemos abordado en esta sección es separable en un total de once sistemas de coordenadas, cada uno adecuado a una determinada configuración geométrica del sistema físico en cuestión. Frecuentemente la simetría del



**Figura 8.6:** Aspecto aproximado de los primeros modos TEM (*Transverse Electro-Magnetic*). Nótese cómo el número de ceros (intensidad nula, aquí representado por blanco) en la dirección  $X$  es  $n$  y  $m$  en la  $Y$ . Las manchas de la periferia son más intensas, por el efecto de los máximos laterales de los  $H_n$ , que no llega a ser totalmente contrarrestado por la cola de la gaussiana.

problema es cilíndrica y entonces la ecuación 8.15 debe plantearse en coordenadas cilíndricas. En lugar de los modos de Gauss-Hermite se obtienen los de Gauss-Laguerre. En la práctica cualquier pequeña anomalía geométrica rompe la simetría cilíndrica y se obtienen incluso en este caso los modos de Gauss-Hermite<sup>3</sup>.

## 8.5. Propiedades de los haces gaussianos

### 8.5.1. Forma del haz

Vamos ahora a situar el origen de coordenadas en un punto en el que el frente de ondas del haz gaussiano sea plano ( $R(0) = \infty$ ). Se cumple por tanto en 8.13 con  $z_0 = 0, q_0 = q(0)$ :

$$q(z) = q_0 + z \quad (8.27)$$

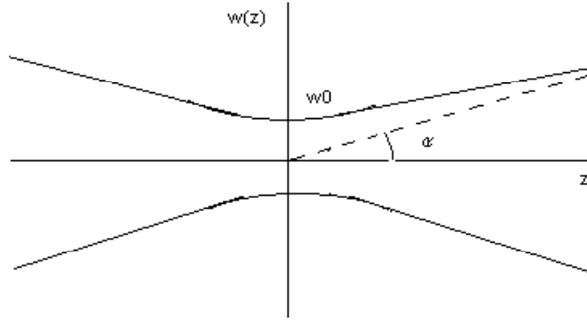
donde por 8.14 tenemos

$$q(0) = i \frac{\pi w^2(0)}{\lambda} = iz_R \quad (8.28)$$

La longitud  $z_R$  se conoce como *distancia de Rayleigh* y es un parámetro que junto a  $w(0)$  permite caracterizar el haz de longitud de onda  $\lambda$ :

$$w^2(0) = \frac{\lambda z_R}{\pi}. \quad (8.29)$$

<sup>3</sup>Ver *Siegman, A: Lasers*, Oxford University Press.



**Figura 8.7:** Evolución del tamaño transversal del haz gaussiano con la distancia a la cintura del haz: convergencia en el origen, donde el frente de ondas es plano y divergencia con  $|z|$ .

En efecto, veamos cómo en función de  $z_R$  se pueden escribir todas las magnitudes que caracterizan el haz. Así la 8.27 con 8.28 se escribe  $q(z) = z + iz_R$ . Y entonces, con 8.14:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} = \frac{1}{z + iz_R} = \frac{z - iz_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2}$$

Es decir, igualando partes reales e imaginarias, y usando 8.29,

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (8.30)$$

$$w(z) = w(0) \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8.31)$$

Esta última expresión indica que  $2w(0)$  es la menor anchura posible del haz, por lo que se le suele llamar a  $w(0)$  *cintura del haz*, y denotar  $w_0 = w(0)$ . La distancia de Rayleigh por su parte se interpreta como aquella para la que el tamaño del haz ha aumentado en un factor  $\sqrt{2}$ :  $w(\pm z_R) = \sqrt{2}w_0$ .

La variación del tamaño transversal del haz con la distancia a la cintura tiene una asíntota (figura 8.7) cuyo ángulo con el eje del haz está dado por

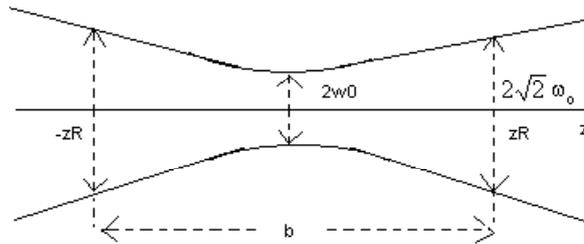
$$\tan \alpha = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{w_0}{z_R}$$

En el TEM<sub>00</sub>  $\alpha$  da el ángulo de divergencia del haz.

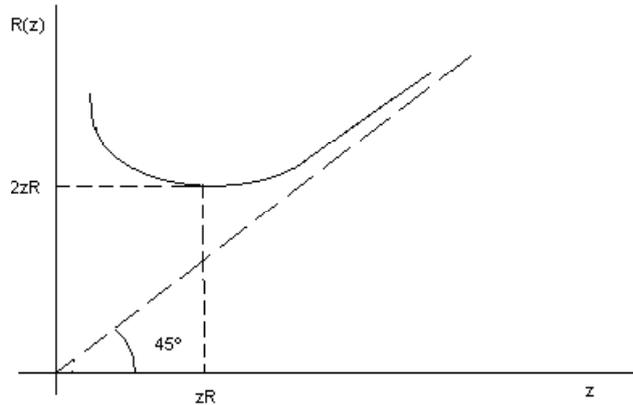
Sustituyendo en la expresión ??  $w(z)$  y  $R(z)$  dadas respectivamente por 8.31 y 8.30 se tiene la variación de la fase de Guoy según progresa el haz:

$$\tan \psi = \frac{\pi \lambda z_R}{\lambda \pi z} \frac{1 + (z/z_R)^2}{1 + (z_R/z)^2} = \frac{z}{z_R} \quad (8.32)$$

con  $\tan \psi(0) = 0$ .



**Figura 8.8:** La cintura del haz  $2w_0$  y la distancia de Rayleigh  $z_R$  (o el parámetro confocal,  $b$ ) son las magnitudes características de un haz gaussiano.



**Figura 8.9:** El radio de curvatura del haz presenta un mínimo (máxima curvatura) para la distancia de Rayleigh  $z_R$ .

Tenemos que la amplitud del haz gaussiano de orden más bajo ( $n = m = 0$ ) será, según la ecuación 8.19 ( $\psi(0) = 0$ ) :

$$u_{00}(\mathbf{r}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{i\psi(z)}}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right) \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right) \quad (8.33)$$

Una vez que se sitúa la posición absoluta de la cintura del haz y la longitud de onda  $\lambda$  en el medio está determinada, toda la evolución espacial del campo depende exclusivamente de  $w_0$  o de  $z_R$ .

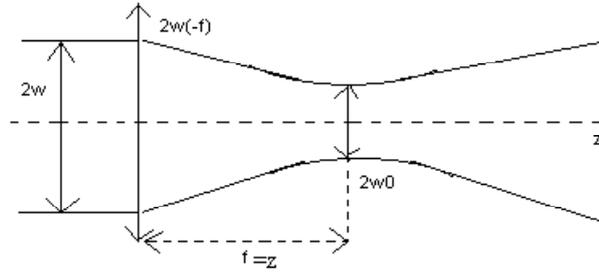
Por razones que se verán más adelante al doble de  $z_R$  se le llama *parámetro confocal* (figura 8.8); así, por 8.29

$$b \equiv 2z_R = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (8.34)$$

En cierto sentido, puede considerarse  $z_R$  como el límite en que se pasa del campo próximo de Fresnel al campo lejano de Fraunhofer.

En el campo de Fraunhofer la cintura 8.31 y el radio de curvatura 8.30 se pueden aproximar por

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} w(z) &= w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{z}{w_0} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) &= z \end{aligned} \quad (8.35)$$



**Figura 8.10:** En un haz gaussiano el efecto difractivo impide focalizar la energía en un punto: se genera una mancha cuyo radio depende de  $\lambda$  y  $f$ .

La distancia  $z_R$  es también aquella para la que el radio de curvatura del frente de ondas se hace mínimo (figura 8.9), como se puede comprobar al derivar  $R(z)$  en 8.30. Sustituyendo encontramos que  $R(z_R) = 2z_R$ : los frentes de ondas en los puntos  $z_R$  y  $-z_R$  tienen sus centros de curvatura en los puntos  $-z_R$  y  $z_R$  respectivamente. Entonces, si dos espejos esféricos de radio de curvatura  $2z_R$  se sitúan en  $z_R$  y  $-z_R$  sus focos coinciden con la posición de la cintura de haz. Por eso a  $b = 2z_R$  se le llama *parámetro confocal*. En este caso la cintura de haz sería (ecuación 8.34)

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda b}{2\pi}} \quad (8.36)$$

Un haz gaussiano bien colimado, es decir, con los frentes de onda casi planos, puede ser focalizado con una lente de focal  $f$  (figura 8.10). Se ubica la lente de modo que la cintura del haz se sitúe en su foco, y si a la entrada de la lente el diámetro del haz es  $2w(-f)$ , en el régimen de Fraunhofer (ec. 8.35) la cintura de haz será

$$2w_0 = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2f}{w(-f)} \quad (8.37)$$

Y si estimamos como profundidad de foco  $2z_R$ , por 8.34

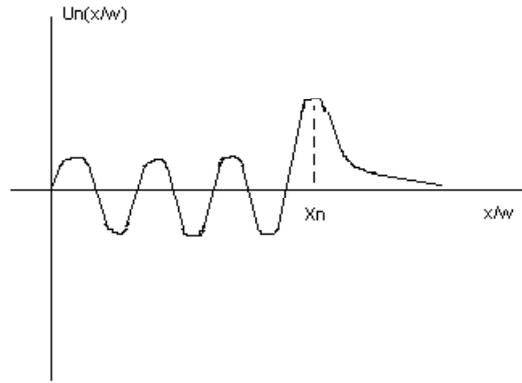
$$2z_R = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\pi} \frac{f}{w(-f)} \right)^2 = \frac{2\lambda}{\pi} \frac{f^2}{w^2(-f)}. \quad (8.38)$$

### 8.5.2. Distribución transversal de la energía

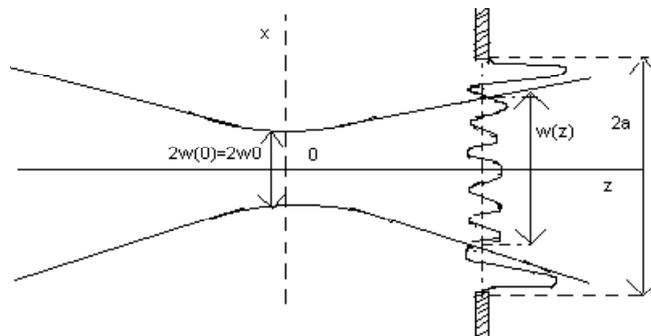
En los modos de orden alto la extensión transversal del haz se puede obtener de la posición del último máximo del polinomio de Hermite  $H_n(x/w)$ , que puede ser aproximada para valores altos de  $n$  por

$$x_n(z) \simeq \sqrt{n}w(z), \quad (8.39)$$

donde  $w$  es el tamaño de mancha en el haz gaussiano de orden cero, dado por 8.33. Por lo tanto la extensión transversal del campo de un modo gaussiano de orden  $n$  aumenta en proporción a  $\sqrt{n}$ .



**Figura 8.11:** Amplitud transversal del haz. Recuérdese que  $w$  es la anchura de la gaussiana.



**Figura 8.12:** Las dimensiones de la abertura permiten controlar la extensión transversal del campo.

Con esto tenemos identificada la zona donde se concentra la energía del haz, tanto en profundidad (a lo largo del eje) como en anchura (en dirección transversal). Conocer la extensión de este área es útil para numerosas aplicaciones; por ejemplo en el corte de metales por sublimación, mediante un laser de  $\text{CO}_2$ .

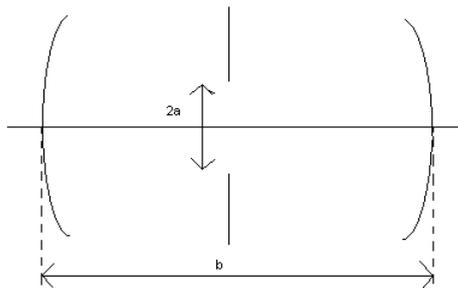
Si un modo gaussiano tiene que atravesar una abertura de diámetro  $2a$  sin que se intercepte una parte significativa de la energía del campo situado en la periferia de su sección transversal, se tiene que verificar  $x_n(z) \leq a$  (figura 8.12):  $z$  sería la posición de la abertura respecto a la cintura de haz, que es donde hemos ubicado el origen.

Por lo tanto el mayor orden  $n$  del modo está limitado por el tamaño de la abertura:

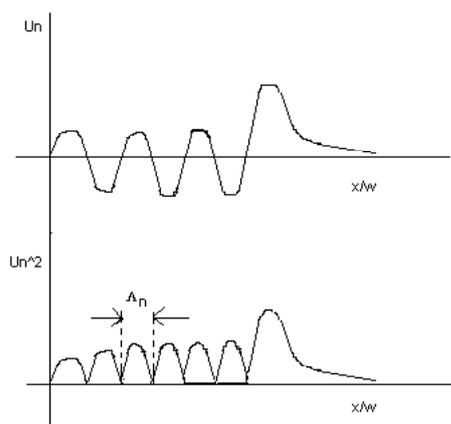
$$n_{\max} \leq \left( \frac{a}{w(z)} \right)^2 \quad (8.40)$$

Como vemos, la elección de  $a$  nos permite un cierto control sobre la distribución transversal de la energía del campo. Si la abertura está dentro de un resonador confocal en la posición de la cintura de haz (figura 8.13), usando la ecuación anterior y 8.36 obtenemos

$$n_{\max} \leq 2\pi \frac{a^2}{\lambda b} = 2\pi N_F$$



**Figura 8.13:** Configuración para la selección de modos en un resonador confocal.



**Figura 8.14:** Amplitud e intensidad transversas. El tamaño de las manchas de luz en una pantalla corresponde con  $\Lambda_n$ .

donde hemos introducido una magnitud característica, el *número de Fresnel del resonador*,  $N_F = a^2/\lambda b$ .

Los modos  $u_{nm}(\mathbf{r})$  que podrán formar parte de la geometría del campo dentro del resonador (las configuraciones del campo que *caben* en una distancia  $b$  entre espejos con una apertura intermedia de lado  $a$ ) serán los que cumplan la condición<sup>4</sup>  $n = m \leq n_{\max}$ , y su número es<sup>5</sup>

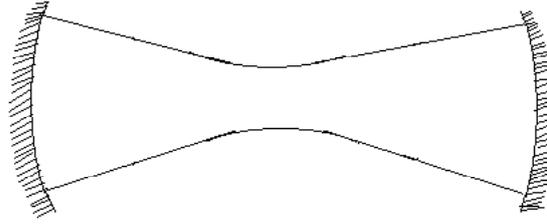
$$\mathcal{N} = n_{\max}^2 \leq (2\pi N_F)^2.$$

El polinomio  $H_n$  tiene  $n$  ceros por lo que la intensidad presentará  $n$  máximos en la dirección  $x$  transversa (figura 8.14). El tamaño medio de estos máximos de intensidad será

$$\Lambda_n \simeq \frac{x_n}{n} \simeq \frac{\sqrt{n}w}{n} = \frac{w}{\sqrt{n}}. \quad (8.41)$$

<sup>4</sup>Siendo el resonador de perfil cuadrado; si fuese rectangular habría un  $n_{\max}$  y un  $m_{\max}$ .

<sup>5</sup>Esta cantidad se reduce en resonadores activos, porque pasa de ser proporcional al cuadrado de  $N_F$  a ser  $\mathcal{N} \propto N_F$ : Phys. Rev. A Vol 53 n° 5 (1996) p3490-3496.



**Figura 8.15:** Campo estacionario en el resonador confocal.

Esta cantidad se interpreta como el tamaño de las estructuras (manchas de luz) que se pueden esperar en el campo transversal de orden  $n$ . Como la abertura  $2a$  fija el valor máximo de  $n$  en 8.40 las estructuras más pequeñas que se podrán observar en la distribución transversal de la intensidad serán de un tamaño

$$\Lambda_{\min} = \frac{w^2(z)}{a}$$

En particular, en la cintura de haz del resonador confocal (usando 8.36 y  $N_F = a^2/2\lambda b$ ),

$$\Lambda_{\min} = \frac{a}{2\pi N_F}.$$

## 8.6. Estabilidad de un resonador

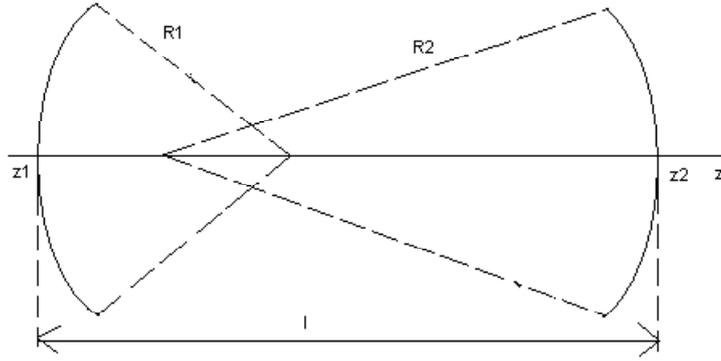
Supongamos que tenemos un haz gaussiano y que (como mencionamos en el caso del resonador confocal), situamos dos espejos esféricos de tal manera que ajusten exactamente la curvatura del frente de ondas en la posición en que se encuentran (figura 8.15).

Si el tamaño de los espejos es bastante mayor que el diámetro del haz, se pueden despreciar las pérdidas en los bordes, y el haz queda atrapado en el resonador como una onda estacionaria.

En cada espejo el haz reflejado es exactamente igual al incidente sólo que propagándose en sentido opuesto.

En la práctica el planteamiento es justamente el inverso (figura 8.16), es decir, que una vez fijado un resonador formado por los espejos de radio de curvatura  $R_1$  y  $R_2$  situados a una distancia  $l$  se trata de saber si existe una onda gaussiana capaz de resonar establemente entre ellos. Por tanto, de existir este haz gaussiano tanto las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  de los espejos respecto a la cintura de haz como  $z_R$  ó  $w_0$  serían desconocidos en principio.

Ahora bien, si los radios de los espejos han de coincidir con los de los frentes de onda



**Figura 8.16:** ¿Qué modos gaussianos pueden oscilar establemente en un resonador genérico?.

del haz, por 8.30 se tendrá que verificar<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} -R_1 &= z_1 \left( 1 + \frac{z_R^2}{z_1^2} \right) \\ R_2 &= z_2 \left( 1 + \frac{z_R^2}{z_2^2} \right) \end{aligned}$$

con la ligadura adicional de que  $l = z_2 - z_1$ . Estas tres ecuaciones deberán resolverse para obtener  $z_1$ ,  $z_2$  y  $z_R$ . Más significativos que  $R_1$  y  $R_2$  son los llamados *parámetros del resonador*

$$g_1 = 1 - \frac{l}{R_1} \quad g_2 = 1 - \frac{l}{R_2} \quad (8.42)$$

En términos de estos parámetros se reescribe el sistema de ecuaciones

$$g_1 = 1 + \frac{l}{z_1 \left( 1 + z_R^2/z_1^2 \right)} \quad (8.43)$$

$$g_2 = 1 - \frac{l}{z_2 \left( 1 + z_R^2/z_2^2 \right)} \quad (8.44)$$

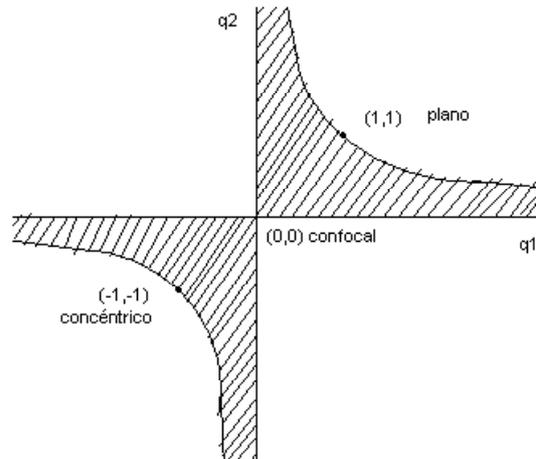
Para resolverlo se puede eliminar primero  $z_R^2$  entre ambas y usar  $l = z_2 - z_1$  para despejar  $z_1$  o  $z_2$ . Se obtiene así

$$z_1 = -\frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2}l; \quad z_2 = \frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2}l; \quad z_R^2 = \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}l^2 \quad (8.45)$$

De  $z_R(w_0)$  (ec. 8.29) obtenemos entonces la cintura del haz,

$$w_0^2 = \frac{l\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}} \quad (8.46)$$

<sup>6</sup>Se toma el signo de  $R(z)$  como positivo si el centro de curvatura está a la izquierda del frente de ondas y vice versa.



**Figura 8.17:** Los parámetros  $g_1, g_2$  del resonador determinan su estabilidad. Los valores que dan lugar a resonadores estables son los comprendidos en la región rayada. Avanzar por la recta  $g_1 = g_2$  en sentido creciente conduce a resonadores con espejos cóncavos (divergentes) mientras que avanzar más allá del resonador concéntrico, en sentido descendente conduce hacia resonadores cuyos centros de curvatura quedan lejos de la zona central.

Y usando  $w(z)$  (ec. 8.31) tendremos los radios del haz en los espejos,  $w_1 = w(z_1)$ ,  $w_2 = w(z_2)$ :

$$w_1^2 = \frac{l\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1 - g_1 g_2)}} \quad (8.47)$$

$$w_2^2 = \frac{l\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1 - g_1 g_2)}} \quad (8.48)$$

Si existe el haz gaussiano capaz de formar la onda estacionaria, la cintura de haz deberá ser real, es decir que en 8.46

$$1 \geq g_1 g_2 \geq 0 \quad (8.49)$$

En el diagrama  $g_1, g_2$  de la figura 8.17 esta condición reduce el área de estabilidad a la zona comprendida entre los ejes y las ramas de la hipérbola  $g_1 g_2 = 1$ . Se observa que en los resonadores estables los dos parámetros  $g_1$  y  $g_2$  del resonador deben ser del mismo signo.



## 9 Resonadores

### 9.1. La función de transferencia de un resonador óptico

Consideremos un resonador óptico formado por dos espejos alineados según un eje. Entre ellos puede existir un medio material de propiedades conocidas.

Los espejos, que denotaremos 1 y 2 están caracterizados respectivamente por unas transmitancias del campo  $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$  y unas reflectancias  $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ . En cuanto a los objetos que se encuentran entre los espejos, éstos modifican el campo que se transmite a su través. Caracterizaremos esta modificación mediante una *función de transferencia* que denotaremos  $f$ . El campo resultante de la propagación a través de los objetos entre los espejos es el producto de la función de transferencia por el campo incidente.

Denotemos por  $E_0$  el campo que incide sobre el espejo 1 (figura 9.1). El campo que lo atraviesa será  $\tilde{t}_1 E_0$ . Este campo se propaga entre los espejos con la función de transferencia  $f$ , por lo que el campo que llega al espejo 2 es  $f\tilde{t}_1 E_0$ . Una parte  $\tilde{t}_2 f\tilde{t}_1 E_0$  atraviesa el espejo 2 y otra  $\tilde{r}_2 f\tilde{t}_1 E_0$  se refleja<sup>1</sup>. La parte reflejada atraviesa el espacio de vuelta hacia el espejo 1, al que llega un campo  $f\tilde{r}_2 f\tilde{t}_1 E_0$ . El campo que parte hacia el espejo 2 es  $\tilde{r}_1 f\tilde{r}_2 f\tilde{t}_1 E_0$ . De nuevo sólo una fracción del campo,  $f\tilde{r}_1 f\tilde{r}_2 f\tilde{t}_1 E_0$  llega al espejo 2, y de éste sólo sale hacia afuera del resonador  $\tilde{t}_2 f(\tilde{r}_1 f\tilde{r}_2 f)\tilde{t}_1 E_0$ .

El proceso ilustrado se repite indefinidamente, lo cual equivale a multiplicar sucesivas veces la expresión obtenida por lo que va entre paréntesis, que denotaremos por  $\tilde{r}$  y representa el proceso de ir de un espejo a otro y volver. La suma de todos los campos que atraviesan el resonador da el campo total,  $E_T$ , y forma una progresión geométrica:

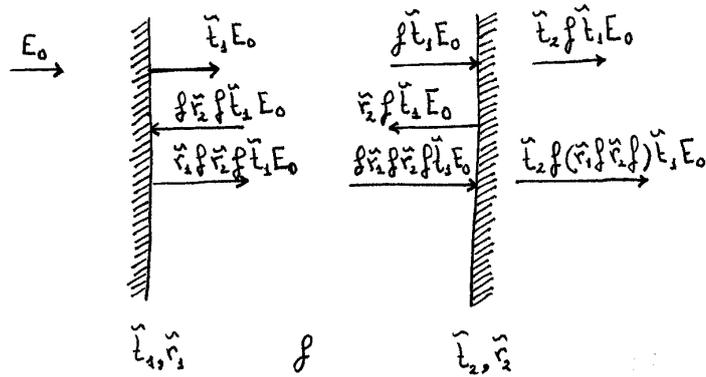
$$\begin{aligned} E_T &= \tilde{t}_2 f (1 + \tilde{r} + \tilde{r}^2 + \dots + \tilde{r}^n) \tilde{t}_1 E_0 \\ &= E_0 \tilde{t}_2 f \tilde{t}_1 \sum_{i=0}^n \tilde{r}^i \\ &= E_0 \frac{\tilde{t}_2 f \tilde{t}_1}{1 - \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 f^2}. \end{aligned}$$

Se puede definir una función de transferencia total del resonador, como  $f_T \equiv E_T/E_0$ :

$$f_T = \frac{\tilde{t}_2 f \tilde{t}_1}{1 - \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 f^2} \quad (9.1)$$

En esta expresión  $\tilde{r}_2 = |\tilde{r}_2| e^{i\pi}$ ,  $\tilde{r}_1 = |\tilde{r}_1| e^{i\pi}$ , pues el efecto habitual de los espejos, al ser medios ópticamente más densos, es introducir un desfase de  $\pi$ . Si se desprecia el

<sup>1</sup>Estas expresiones siguen el orden del proceso, con los sucesos más recientes incorporándose como factores por la izquierda.



**Figura 9.1:** Proceso de atenuación sufrido por el campo  $E_0$  entrante en el resonador.

pequeño desfase que se produce al atravesar los espejos, ya que es acumulativo, la función de transferencia  $F_T = |f_T|^2$  para la intensidad es, usando las variables  $R_1 = |\tilde{r}_1|^2$ ,  $R_2 = |\tilde{r}_2|^2$ ,  $T_1 = |\tilde{t}_1|^2$ ,  $T_2 = |\tilde{t}_2|^2$ ,

$$F_T = \frac{T_1 T_2 |f|^2}{1 + R_1 R_2 |f|^4 - \sqrt{R_1 R_2} \left( (f^*)^2 + f^2 \right)}.$$

Es útil definir la reflectividad cuadrática media de los dos espejos,  $R \equiv \sqrt{R_1 R_2}$ .

En un resonador pasivo el campo se atenúa en su tránsito entre los espejos en proporción al coeficiente de transmisión  $\tilde{t}_i$  de los medios situados en la región intermedia (ecuación 9.1). En su propagación el campo también sufrirá un cambio de fase espacial, de modo que  $f = \tilde{t}_i e^{i\phi}$  o, en intensidad,  $F = |f|^2 = \tilde{t}_i^2 = T_i$ . Aquí  $\phi$  representa el cambio de fase entre los dos espejos, proporcional a la distancia entre ambos.

La función de transferencia total para la intensidad se puede reexpresar así:

$$F_T = \frac{T_1 T_2 T_i}{1 + T_i^2 R^2 - 2 R T_i \cos 2\phi}$$

o, utilizando que  $\cos 2\phi = 1 - 2 \sin^2 \phi$ ,

$$F_T = \frac{T_1 T_2 T_i}{(1 - T_i R)^2 + 4 T_i R \sin^2 \phi}. \tag{9.2}$$

Esta expresión se hace máxima cuando  $\phi_q = q\pi$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , de modo que es para estos valores del desfase espacial  $\phi$  para los que aparecen las resonancias.

Los resonadores abiertos, es decir, formados por dos espejos alineados según un eje, y de dimensiones transversas dentro de la zona paraxial se denominan *interferómetros de Fabry-Perot*.

Hasta aquí sólo hemos tenido en cuenta el cambio de fase debido al camino longitudinal. Pero en los modos gaussianos la fase depende también de la estructura transversa del haz.

## 9.2. Frecuencias resonantes de los modos gaussianos

La amplitud normalizada y lentamente variable del campo de un modo gaussiano, usando 8.19 y  $u_{nm}(\mathbf{r}) = u_n(x, z) u_m(y, z)$ , es

$$u_{nm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\exp i[(n+m+1)(\psi(z) - \psi(0))] H_n(x\sqrt{2}/w) H_m(x\sqrt{2}/w)}{(2^{n+m} n! m!)^{1/2} w(z)} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w(z)}\right) \exp\left(-i\frac{k}{2} \frac{x^2 + y^2}{R(z)}\right).$$

Incluyendo la variación espacial rápida  $\exp(-ikz)$  el campo es

$$E_{nm}(\mathbf{r}) = u_{nm}(\mathbf{r}) \exp(-ikz).$$

La fase del campo,  $\phi$ , tiene dos contribuciones, una debida a la fase longitudinal y dada por  $\exp(-ikz)$  y otra a la fase transversa dada por  $\exp i(n+m+1)\Delta\psi$ .

Si el modo está atrapado en un resonador el cambio que sufre la fase del campo cuando recorre la distancia  $l = z_2 - z_1$  que separa a los espejos será, en condiciones de resonancia, un número entero de veces  $\pi$ :  $\phi(z_2 - z_1) = q\pi$ . Para hallar las frecuencias de resonancia escribimos  $k$  en términos de  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \phi(z_2 - z_1) &= k(z_2 - z_1) - (n+m+1)[\psi(z_2) - \psi(z_1)] \\ &= \frac{\omega}{c}l - (n+m+1)[\psi(z_2) - \psi(z_1)] \end{aligned} \quad (9.3)$$

Imponiendo entonces que el cambio de fase total sea  $\phi(z_2 - z_1) = q\pi = \phi_q$  podemos despejar las frecuencias de resonancia  $\omega_{q,nm}$ :

$$\omega_{q,nm} = \frac{\pi c}{l} \left[ q + (n+m+1) \frac{\psi(z_2) - \psi(z_1)}{\pi} \right]. \quad (9.4)$$

Por lo tanto, aparte de las habituales contribuciones axiales, dependientes de  $q$  tenemos contribuciones a la frecuencia de la geometría transversa que están ligadas a la fase de Guoy,  $\psi(z)$ .

Debemos pues evaluar el cambio en la fase de Guoy en el recorrido del resonador. Para ello recordemos la expresión de la fase de Guoy 8.32 y  $z_1, z_2, z_R$  en función de los parámetros del resonador  $g_1, g_2$  (ec. 8.45)

$$\begin{aligned} \tan \psi(z_2) &= \frac{z_2}{z_R} = \frac{g_1(1-g_2)}{\sqrt{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}} \\ \tan \psi(z_1) &= \frac{z_1}{z_R} = -\frac{g_2(1-g_1)}{\sqrt{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}} \end{aligned}$$

Pero  $\tan(x-y) = (\tan x - \tan y) / (1 + \tan x \tan y)$ , con lo cual:

$$\tan[\psi(z_2) - \psi(z_1)] = \frac{\frac{g_2(1-g_1)+g_1(1-g_2)}{\sqrt{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}}}{1 - \frac{g_1 g_2(1-g_1)(1-g_2)}{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}} = \frac{1 - g_1 g_2}{\sqrt{g_1 g_2(1 - g_1 g_2)}}.$$

Entonces

$$\tan^2(\psi(z_2) - \psi(z_1)) = \frac{1}{g_1 g_2} - 1$$

pero  $\cos x = \pm \sqrt{1/(1 + \tan^2 x)}$  (+ si  $x \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$  y - si  $x \in (-\pi/2, 3\pi/2)$ ) y por lo tanto

$$\cos(\psi(z_2) - \psi(z_1)) = \pm \sqrt{g_1 g_2}$$

Donde el signo positivo es para  $g_{1,2} > 0$  y el negativo para  $g_{1,2} < 0$  (recordemos que ambos deben tener el mismo signo para que el resonador sea estable, figura 8.17). Así el desfase de Guoy en el resonador será

$$\begin{aligned} \psi(z_2) - \psi(z_1) &= \arccos \pm \sqrt{g_1 g_2} \\ &= \arccos \pm \sqrt{\left(1 - \frac{l}{R_1}\right) \left(1 - \frac{l}{R_2}\right)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Consideremos unos cuantos casos (figura 9.2) para interpretar el efecto de la fase de Guoy.

- Si los espejos son planos,  $R_1 = R_2 = \infty$ ,  $g_1 = g_2 = 1$  y  $\psi(z_2) - \psi(z_1) = 0$ . Por lo tanto el corrimiento de frecuencia debido a la geometría transversa es nulo. Sólo quedarían las frecuencias debidas a los modos axiales del resonador, representados por los diferentes valores de  $q$ :

$$\omega_{q,nm}(\infty, \infty) = \frac{\pi c}{l} q$$

En este caso nuestro resonador genérico se reduce a un Fabry-Perot de espejos planos, que se estudia en un primer curso de óptica.

- Si los radios de los espejos son mayores que la longitud del resonador pero menores que los del resonador plano,  $l < R_1, R_2 < \infty$  la fase de Guoy acumula en el resonador un desfase dado por 9.5. El cambio producido por la geometría transversa será para el modo  $\text{TEM}_{mn}$  en  $\omega_{q,mn}(\infty, \infty)$ :

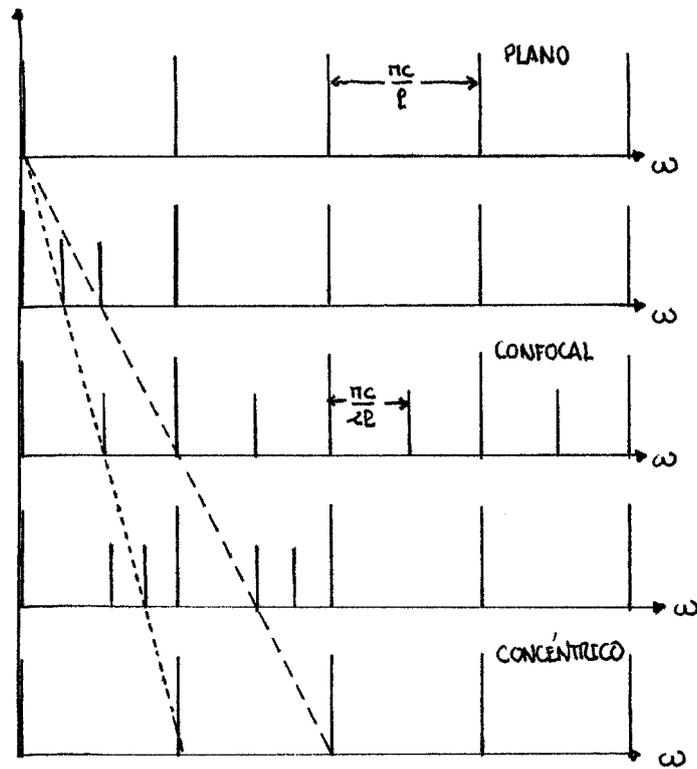
$$\omega_{q,nm}(R_1, R_2) - \omega_{q,nm}(\infty, \infty) = (n + m + 1) \frac{\psi(z_2) - \psi(z_1)}{\pi} \frac{\pi c}{l} > 0.$$

Si los radios son mayores o iguales que  $l$  el desfase en la fase de Guoy es menor de  $\pi/2$ .

- Si  $R_1 = R_2 = l$  el resonador es confocal ( $g_1 = g_2 = 0$ ) y  $\psi(z_2) - \psi(z_1) = \pi/2$ . El cambio en las frecuencias será

$$\omega_{q,nm}(l, l) - \omega_{q,nm}(\infty, \infty) = (n + m + 1) \frac{\pi c}{2l}.$$

En el resonador confocal la mitad de las frecuencias cambiadas por la geometría transversa coinciden con las del resonador plano y son pues degeneradas.



**Figura 9.2:** En la primera línea, resonador plano con separación  $\pi c/l$  entre  $\omega_q$  y  $\omega_{q\pm 1}$ . En la tercera, la separación entre las frecuencias de la geometría transversa que escoltan a las axiales es la mitad de la que había entre dos frecuencias axiales consecutivas. Los modos que antes estaban pegados a las  $\omega_q$  han ido o bien a la mitad del intervalo o a superponerse con  $\omega_{q+algo}$ . Para el cuarto caso las transversas se han movido tanto que escoltan a la axial siguiente.

- Si  $l/2 < R_1, R_2 < l$  entonces  $g_1, g_2 < 0$ ; el cambio en la fase de Guoy es mayor que  $\pi/2$  y se aproxima a  $\pi$  según  $R_{1,2} \rightarrow l/2$ . Por tanto las frecuencias  $\omega_{q, nm}$  se acercan a las  $\omega_{q+1, nm}(\infty, \infty)$ , produciendo la falsa impresión de que el cambio de frecuencia ha sido negativo. No obstante, sigue siendo

$$\omega_{q, nm}(R_1, R_2) - \omega_{q, nm}(\infty, \infty) = (n + m + 1) \frac{(\psi(z_2) - \psi(z_1)) \pi c}{\pi l} > 0.$$

- Finalmente en el caso de que  $R_1 = R_2 = l/2$  el resonador es el que hemos llamado concéntrico, por ser coincidentes los centros de curvatura de ambos espejos. En este caso  $\psi(z_2) - \psi(z_1) = \pm\pi$  y por tanto la separación en frecuencia entre modos de diferente geometría transversa es

$$\omega_{q, nm}(l/2, l/2) - \omega_{q, nm}(\infty, \infty) = \frac{\pi c}{l},$$

es decir, precisamente la separación entre frecuencias de los modos axiales en el resonador plano. Por tanto el resonador concéntrico tiene las mismas frecuencias que el plano (degeneración).

### 9.2.1. Batido de modos

Cuando el campo del resonador contiene las frecuencias de varios modos el campo total oscila simultáneamente en todas estas frecuencias, de manera que su dependencia temporal puede ser bastante complicada. Para estudiar este fenómeno introduciremos explícitamente en la expresión de los campos de los modos la oscilación temporal rápida  $e^{i\omega t}$ .

Sea un campo que contiene dos modos de frecuencias  $\omega_1, \omega_2$ ,

$$E(\mathbf{r}, t) = E_1(\mathbf{r}) e^{i\omega_1 t} + E_2(\mathbf{r}) e^{i\omega_2 t}$$

La intensidad de esta radiación será, a la salida de uno de los espejos,

$$I(\mathbf{r}, t) = c\epsilon_0 E E^* (1 - R).$$

Esta intensidad se puede medir con un detector de área sensible  $s$ , que producirá una corriente  $i$  proporcional a la intensidad  $I(\mathbf{r}, t)$  de la radiación integrada sobre dicho área, es decir  $i \propto \int \int_s |E|^2 ds$  o, desarrollando,

$$\begin{aligned} i \propto &= \iint_s (E_1^* e^{-i\omega_1 t} + E_2^* e^{-i\omega_2 t}) (E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t}) d^2 s \\ &= \iint_s (|E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1^* E_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + E_1 E_2^* e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}) d^2 s \\ &= \iint_s (|E_1|^2 + |E_2|^2 + u_1^* u_2 e^{-i[(k_2 - k_1)z - (\omega_2 - \omega_1)t]} + u_1 u_2^* e^{i[(k_2 - k_1)z - (\omega_2 - \omega_1)t]}) d^2 s \end{aligned}$$

### 9.3 El perfil de los modos en un resonador Fabry-Perot

Si el área del detector es menor que la sección transversa del haz podemos llamar

$$V_{ij} = \iint_s u_i^* u_j d^2s = V_{ji}^*$$

y con ello escribir

$$\begin{aligned} i &\propto V_{11} + V_{22} + V_{12} e^{-i[(k_2 - k_1)z - (\omega_2 - \omega_1)t]} + V_{12}^* e^{i[(k_2 - k_1)z - (\omega_2 - \omega_1)t]} \\ &= V_{11} + V_{22} + 2|V_{12}| \cos [(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_{12}(z)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la intensidad medida oscila con la diferencia entre las frecuencias de los dos modos, que se llama *frecuencia de batido*. La frecuencia de batido entre dos modos es

$$\begin{aligned} \omega_2 - \omega_1 &= \omega_{q_2, n_2 m_2} - \omega_{q_1, n_1 m_1} \\ &= \left[ (q_2 - q_1) + (n_2 - n_1 + m_2 - m_1) \frac{\psi(z_2) - \psi(z_1)}{\pi} \right] \frac{\pi c}{l}. \end{aligned}$$

La radiación detectada aparece modulada por los diversos batidos. Una forma de ver cuántos modos hay en un resonador y cuáles son sus frecuencias es hacer la transformada de Fourier de esta oscilación y ver las componentes de frecuencia del batido. Para eso, no obstante, es necesario que el detector esté en el dominio paraxial; si se toma toda la luz proveniente del resonador no se observa nada.

En efecto, si el área del detector es mayor que la sección transversa del haz, podemos sustituir  $s$  por  $\mathbb{R}^{\neq}$ , dominio en el que los modos  $u_i$  son ortogonales:

$$V_{ij} = \iint_{\mathbb{R}^{\neq}} u_i^* u_j ds = \delta_{ij}$$

y entonces no se observa la modulación de batido.

### 9.3. El perfil de los modos en un resonador Fabry-Perot

Nuestro objetivo es estudiar cómo quedan ensanchadas las resonancias por efecto de las pérdidas internas y en los espejos.

La función de transferencia en intensidad,  $F_T$  (ec. 9.2) de un resonador Fabry-Perot pasivo depende de la fase espacial, que se puede escribir como en 9.3:

$$\phi = \frac{\omega l}{c} - (n + m + 1) [\psi(z_2) - \psi(z_1)]$$

Alrededor de la resonancia 9.4 podemos escribir  $\omega = \omega_{q, nm} + \delta\omega$ , refiriendo la frecuencia a la central del modo, y sustituirlo en la ecuación anterior:

$$\phi = \frac{l}{c} (\omega_{q, nm} + \delta\omega) - (n + m + 1) [\psi(z_2) - \psi(z_1)] = \frac{l}{c} \delta\omega + \pi q$$

y entonces, desarrollando el seno de la suma,

$$\sin \phi = \sin \frac{l}{c} \delta\omega \cos \pi q + \cos \frac{l}{c} \delta\omega \sin \pi q = \pm \sin \frac{l}{c} \delta\omega.$$

Si ahora suponemos que  $\omega$  no se aparta demasiado de la resonancia ( $\delta\omega$  pequeño),  $l\delta\omega/c \ll \pi/2 \simeq 1$  rad y podemos confundir el seno y el ángulo

$$\sin \phi \simeq \pm \frac{l}{c} \delta\omega$$

Y así cerca de la frecuencia  $\omega_{q,nm}$  la función de transferencia 9.2 se puede aproximar por

$$\begin{aligned} F_T &\simeq \frac{T_1 T_2 T_i}{(1 - T_i R)^2 + 4 T_i R \left(\frac{l}{c} \delta\omega\right)^2} \\ &= \frac{\frac{T_1 T_2}{R} \left(\frac{c}{2l}\right)^2}{\left(\frac{1 - T_i R}{T_i R}\right)^2 \left(\frac{c}{2l}\right)^2 + (\omega - \omega_{q,nm})^2} \end{aligned}$$

Vemos pues que el perfil de la función de transferencia superpuesta a cada modo es, dentro de la aproximación apuntada (verosímil para la mayoría de los resonadores), lorentziano con una anchura total a media altura

$$\delta\omega = \frac{1 - T_i R c}{\sqrt{T_i R} l} \quad (9.6)$$

Como  $T_i \leq 1$  y  $R \leq 1$  la condición de proximidad a la resonancia  $l\delta\omega/c \ll 1$  rad será

$$\frac{1 - T_i R}{\sqrt{T_i R}} \ll 1 \longrightarrow T_i R \simeq 1$$

Es decir, que las pérdidas en la propagación (transmitividad interna  $T_i \simeq 1$ ) sean pequeñas y la reflectividad cuadrática media de los espejos  $R$  sea grande. No obstante esta condición no es demasiado restrictiva. Usualmente se puede asumir en un Fabry-Perot pasivo  $T_i = 1$  y si la reflectividad es  $R = 0.9$  para  $l = 1$  m

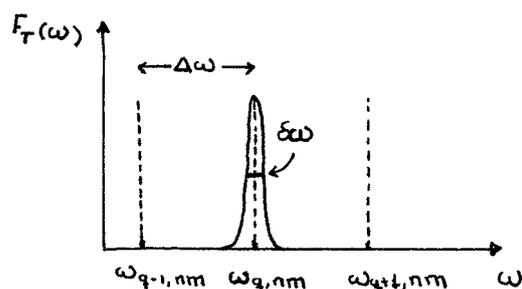
$$\delta\omega \simeq \frac{1 - R c}{\sqrt{R} l} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}^{-1}.$$

Dado que la separación entre dos modos axiales o *rango espectral libre* en un resonador plano o concéntrico es

$$\Delta\omega = \frac{\pi c}{l} \simeq 10^9 \text{ s}^{-1}$$

vemos que  $\delta\omega \ll \Delta\omega$  (figura 9.3).

La anchura de las resonancias del Fabry-Perot da la medida de la *resolución* o finura del aparato. En los FP destinados a las medidas espectrales se utilizan espejos con reflectividad  $> 0.99$ , lo que explica su enorme precisión.



**Figura 9.3:** El rango espectral libre entre modos axiales es por lo general órdenes de magnitud mayor que el ensanchamiento de línea debido al carácter no ideal del aparato.

Hemos constatado cómo tanto las pérdidas internas  $T_i$  como las de reflexión  $R$  en los espejos juegan un papel esencial en el comportamiento del resonador. Es entonces conveniente introducir un parámetro que caracterice las pérdidas en el resonador, el tiempo de vida en el interior del resonador o *tiempo de permanencia*.

Supongamos que del espejo 1 parte una intensidad  $I_0$  que después de un recorrido de ida y vuelta ha cambiado en un factor  $R^2T_i^2$ , quedando  $R^2T_i^2I_0$ .

Después de  $n$  recorridos de ida y vuelta la intensidad restante será  $(RT_i)^{2n}I_0$ . El número de recorridos necesario para que la intensidad se reduzca en un factor  $e$  lo llamamos  $n_c$ :

$$\frac{I_0}{e} = I_0 (RT_i)^{2n_c}$$

$$n_c = -\frac{1}{2 \ln RT_i}$$

Entonces la longitud óptica que la radiación recorre antes de atenuarse por un factor  $e$  es  $2ln_c$  y el tiempo que permanece en el resonador o cavidad óptica,  $t_c = 2ln_c/c$  es (el subíndice  $c$  indica cavidad resonante):

$$t_c = -\frac{l}{c \ln RT_i}. \quad (9.7)$$

Si, como hemos supuesto,  $RT_i \simeq 1$  podemos aproximar el tiempo de permanencia desarrollando el logaritmo, y compararlo con el factor  $\sqrt{T_i R}/(1 - T_i R)$  que aparece en  $\delta\omega_{q,nm}$

$$t_c \simeq \frac{l}{c} \frac{1}{1 - RT_i} \simeq \frac{1}{\delta\omega_{q,nm}},$$

de forma que la radiación confinada en el resonador cumple la relación de incertidumbre propia de las transformadas integrales,

$$t_c \delta\omega_{q,nm} \simeq 1.$$

Este parámetro  $t_c$  caracteriza las pérdidas reales de los resonadores:  $t_c = l/c\gamma$ .



# 10 Amplificadores de propagación de radiación

## 10.1. Ecuación de transporte de los fotones

Para completar la descripción del problema en términos de ecuaciones de balance hay que describir el comportamiento de la densidad de radiación. Es lo que nos proponemos en este apartado.

La densidad de radiación viene caracterizada por una función de distribución del colectivo estadístico de fotones o, en caso de necesitar información de fase, por un operador densidad de estados. La radiación está distribuida en el espacio de fases de posiciones, momentos (direcciones de propagación) y polarizaciones.

Hemos visto que los fotones, descritos en estados Fock o en estados coherentes, tienen su energía distribuida de manera uniforme en la cavidad. El campo en la realidad no obedece ni a una ni a otra clase de imagen, y los fotones se encuentran en paquetes. Si podemos asimilar aquellos a partículas frente a la distancia en la que la densidad de partículas cambia (varía la distribución instantánea de energía del campo), podemos permitirnos una descripción clásica en términos de una densidad en el espacio de fases. Asumiendo por tanto una cierta localizabilidad de los fotones podemos definir la siguiente función de distribución,  $f^\sigma$  (mantenemos las coordenadas cartesianas para la descripción espacial, con la notación  $d^3V = dx dy dz$ ):

$$d^6 N_f^\sigma = \frac{1}{h^3} f^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

Al dividir el elemento de volumen  $d^3V dp_x dp_y dp_z$  por  $h^3$  (el volumen que ocupa un estado cuántico), obtenemos el número de estados en el elemento de volumen y por lo tanto  $f^\sigma$  representa el número de fotones por estado  $\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)$  con polarización  $\sigma$ .

Nos interesa escribir esta magnitud en coordenadas esféricas para el vector de ondas. Teniendo en cuenta que  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ ,  $k = 2\pi\lambda^{-1} = 2\pi\nu c^{-1}$ , donde  $c$  representa la velocidad de la luz en el medio (es decir, si  $c_0$  es la velocidad en el vacío y  $\mu$  el índice de refracción,  $c = c_0/\mu$ ) el diferencial de volumen en el espacio de momentos se transforma con el jacobiano:

$$dp_x dp_y dp_z \rightarrow \hbar^3 dk_x dk_y dk_z \rightarrow \hbar^3 k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi = \hbar^3 k^2 dk d^2\Omega = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu d^2\Omega$$

Por lo tanto,

$$d^6 N_f^\sigma = \frac{1}{c^3} f^\sigma(\mathbf{r}, \nu, \theta, \varphi, t) \nu^2 d\nu d^2\Omega d^3V$$

Si no nos importan las direcciones de los fotones podemos consolidar todas ellas integrando y si no queremos distinguir las polarizaciones podemos consolidarlas a su vez sumándolas:

$$d^4 N_f = \sum_{\sigma=1}^2 \frac{1}{c^3} \left( \int_{\Delta\Omega} f^\sigma(\nu, \theta, \varphi, \mathbf{r}, t) d^2\Omega \right) \nu^2 d\nu d^3V = n_f(t) d\nu d^3V$$

En la expresión precedente hemos etiquetado por  $n_f(t)$  la densidad de fotones de cualquier polarización cuyas direcciones de propagación están dentro de un pequeño ángulo sólido  $\Delta\Omega$ .

$$n_f(t) = \frac{d^4 N_f}{d\nu d^3V}$$

Habitualmente la radiación no cambia de frecuencia en su trayectoria por el espacio de fases. A frecuencia constante el cambio en el número de fotones por unidad de volumen y de intervalo de frecuencia a lo largo de la trayectoria viene dado por

$$\frac{dn_f}{dt} = \frac{\partial n_f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial n_f}{\partial t}. \quad (10.1)$$

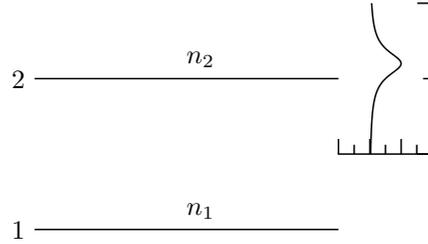
En esta expresión  $x$  es la dirección de propagación, y por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c_0}{\mu} = c.$$

El cambio en el número de fotones durante la propagación se produce por la interacción con el medio, que puede absorber, emitir o esparcir fotones. Si suponemos despreciables los procesos de esparcimiento, sólo quedan los de absorción y emisión. La emisión se puede hacer a su vez por el mecanismo estimulado (simplemente incrementa la energía del haz) o espontáneo (salen en cualquier dirección). Si el haz está colimado en  $\Delta\Omega$  la contribución al haz en la dirección de interés debida a procesos espontáneos será despreciable en virtud de la pequeña fracción del ángulo sólido total afectada.

Los átomos, por otra parte, suelen tener en sus niveles ciertos perfiles, y las transiciones se hacen, como hemos visto, con los correspondientes perfiles de emisión. Vamos a suponer que los átomos resuenan con los fotones entre dos niveles 1 y 2 (figura 10.1) dotados de uno de estos perfiles, que denotaremos por  $g(\nu'_0, \nu)$ , donde  $\nu'_0$  es la frecuencia del centro del perfil. Si ambos niveles están ensanchados, el perfil  $g(\nu'_0, \nu)$  se forma convolucionando los perfiles individuales, lo cual para el caso de perfiles lorentzianos origina la formación de otro perfil lorentziano de anchura la suma de las individuales.

La frecuencia central de emisión,  $\nu'_0$  no tiene por qué ser igual para todos los átomos; en el caso de que no todos interactúen con la radiación en la misma frecuencia central  $\nu'_0$  puede haber un ensanchamiento inhomogéneo. Así ocurre en razón del efecto Doppler en los gases, consecuencia de las diferentes velocidades térmicas de las moléculas. También aparece un ensanchamiento inhomogéneo para sistemas moleculares que forman parte de una masa desordenada como un líquido o un vidrio (amorfo). Las poblaciones de los niveles están así repartidas sobre las frecuencias centrales  $\nu'_0$  con unas densidades por unidad de volumen e intervalo de frecuencia  $n_1(\nu'_0)$  y  $n_2(\nu'_0)$ .



**Figura 10.1:** Distribución de los átomos según niveles. Para el nivel superior tenemos  $dn_1 = n_1(\nu_0, \nu'_0) d\nu'_0$  y para el inferior  $dn_2 = n_2(\nu_0, \nu'_0) d\nu'_0$ .

El cambio en la densidad de fotones por interacción estimulada con los átomos o moléculas cuyas frecuencias centrales de emisión están en  $d\nu'_0$  será

$$d\left(\frac{dn_f}{dt}\right) = [n_2(\nu'_0) B_{21} - n_1(\nu'_0) B_{12}] g(\nu'_0, \nu) n_f h\nu d\nu'_0$$

El ensanchamiento homogéneo está considerado en la  $g$  y el inhomogéneo está tenido en cuenta en los perfiles  $n_1$  y  $n_2$ . La expresión anterior constituye un balance, y cada término es el producto de una probabilidad de transición (coeficiente de Einstein por densidad de energía de radiación por unidad de volumen e intervalo de frecuencia,  $u_\nu(\nu) = n_f h\nu$ ) y el correspondiente número de niveles atómicos disponibles para la transición ( $dn_1, dn_2$ ).

Si ahora consideramos un medio en el que no hay ensanchamiento inhomogéneo, todos los átomos o moléculas tienen la misma frecuencia central de emisión, y entonces

$$n_i(\nu'_0) = \delta(\nu_0 - \nu'_0) n_i \quad i = 1, 2$$

En este caso podemos integrar sobre las frecuencias centrales  $\nu'_0$  y multiplicar por la energía de un fotón,  $h\nu$  para obtener una ecuación de propagación de la radiación a lo largo de una línea de corriente.

$$\begin{aligned} \frac{du_\nu}{dt} &= (n_2 B_{21} - n_1 B_{12}) g(\nu_0, \nu) u_\nu(\nu) h\nu \\ &= c \frac{\partial u_\nu}{\partial x} + \frac{\partial u_\nu}{\partial t} \quad (\text{por 10.1}). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Se trata de una ecuación tipo Boltzmann en la cual los términos de colisión están representados por las probabilidades de absorción y emisión. Esta ecuación sería en principio la que habría que acoplar a las ecuaciones de balance de la materia que ya hemos estudiado, para tener el sistema completo descrito a un nivel que prescinde de la fase.

Veamos cómo escribimos esta ecuación en términos de la intensidad  $I_\nu(\nu) = cu_\nu(\nu)$ . Recordemos que en este tratamiento la radiación no es considerada como una onda, de manera que su frecuencia es la energía  $h\nu$  de sus partículas, y a todos los efectos es como si fuera un fluido.

- Si en la trayectoria en el espacio de fases la densidad de radiación no depende explícitamente del tiempo (aplicamos un campo de radiación constante en el tiempo),

o lo hace adiabáticamente, se puede efectuar la aproximación

$$\frac{du_\nu}{dt} = c \frac{\partial u_\nu}{\partial x}.$$

- Los coeficientes de Einstein cumplen ( $g_1, g_2$  degeneraciones de los niveles)

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}, \quad B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} A_{21}$$

Donde  $B_{21}$  quedaba acotado entre estos valores, según la polarización del campo:

$$\frac{|\mathbf{D}_{21}|^2}{2\hbar^2 \epsilon_0} \geq B_{21} \geq \frac{|\mathbf{D}_{21}|^2}{6\hbar^2 \epsilon_0}$$

Para evitar/encapsular este tipo de ambigüedad se suele introducir la *sección eficaz de interacción* (emisión). Se trata de una función de la frecuencia relacionada con el perfil de emisión y el coeficiente de Einstein

$$\sigma_{21}(\nu) = \frac{1}{c} g(\nu_0, \nu) B_{21}(\nu) h\nu$$

que se puede medir para cada caso de interés.

- Por último, se define el *número de inversión*  $n_i$  en función de  $n_j/g_j$  (las poblaciones por estado  $j$ ) del siguiente modo:

$$n_i \equiv n_2 - \frac{g_2}{g_1} n_1 = g_2 \left( \frac{n_2}{g_2} - \frac{n_1}{g_1} \right) \quad (10.3)$$

En estas condiciones podemos escribir la ecuación que buscábamos para la intensidad,

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \left( n_2 - n_1 \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{c^3}{8\pi \nu^2} \frac{g(\nu_0, \nu)}{c} A_{21} I_\nu = n_i \sigma_{21} I_\nu$$

o

$$\frac{dI_\nu}{dx} = n_i \sigma_{21} I_\nu. \quad (10.4)$$

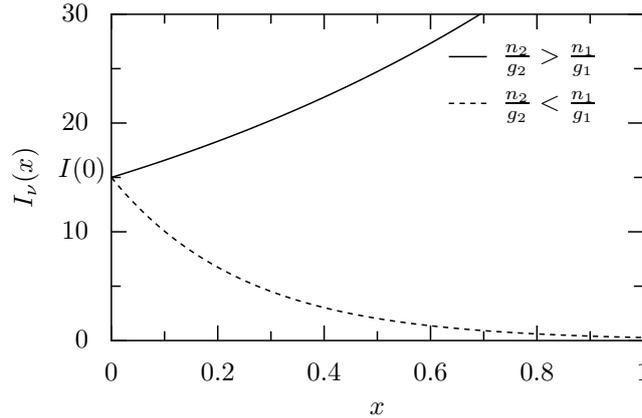
Observamos que a lo largo de la trayectoria ( $\Delta x > 0$ ) el cambio en la intensidad,  $\Delta I_\nu$  es positivo si

$$\frac{n_2}{g_2} > \frac{n_1}{g_1}$$

y negativo en el caso opuesto. Dependiendo de la relación precedente entre poblaciones por estado en los niveles, la intensidad se amplifica o se atenúa en la propagación (figura 10.2).

Cuando el sistema está en equilibrio térmico ambas poblaciones por estado están relacionadas por la distribución de Maxwell-Boltzmann.

$$\frac{n_2}{g_2} = \frac{n_1}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) < \frac{n_1}{g_1}$$



**Figura 10.2:** Variación de la intensidad espectral a lo largo de la propagación con y sin inversión de población.

eso supone  $n_i < 0$  y por lo tanto en el equilibrio térmico hay atenuación.

Con objeto de obtener amplificación necesitamos establecer las condiciones para que las poblaciones por estado estén invertidas de modo continuo. Si tenemos más población en los estados superiores hay más transiciones estimuladas de emisión y domina la emisión estimulada. Por lo tanto el mecanismo para obtener amplificación es provocar una *inversión de poblaciones* que es lo que da lugar al efecto LASER (*light amplification by stimulated emission of radiation*).

El fenómeno fue observado inicialmente en el rango de las microondas, durante los años 50. A este dominio de frecuencia se aplica el término MASER (*microwave...*). Originalmente el interés de esta técnica de amplificación residía en la exploración del espectro de microondas proveniente del espacio. La realización de un experimento en el régimen visible tuvo que esperar, por su mayor dificultad, al final de la década.

Se define el *coeficiente de amplificación incremental por unidad de longitud* de la intensidad como

$$\alpha(\nu) \equiv \frac{1}{I_\nu(\nu)} \frac{dI_\nu(\nu)}{dx} = n_i \sigma_{21}(\nu)$$

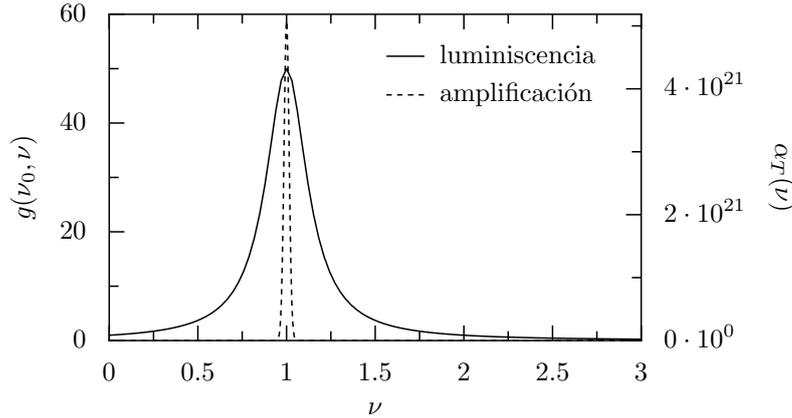
Como se ve, depende de la frecuencia esencialmente en función de cómo es el perfil de emisión de luminiscencia entre los dos niveles,  $g(\nu_0, \nu)$  y es positivo sólo en caso de inversión (amplificación). Si la inversión de población  $n_i$  está distribuida homogéneamente a lo largo de la trayectoria podemos integrar inmediatamente

$$I_\nu(\nu, x) = I_\nu(\nu, 0) e^{\alpha(\nu)x} \quad (10.5)$$

La ley se reduce para valores negativos de  $\alpha$  (situación de no inversión) a la ley de atenuación de Lambert–Wien.

Podemos definir la *amplificación total incremental*  $\alpha_T$  como

$$\alpha_T(\nu) = \frac{I_\nu(\nu, x) - I_\nu(\nu, 0)}{I_\nu(\nu, 0)} = \frac{I_\nu(\nu, x)}{I_\nu(\nu, 0)} - 1 = e^{\alpha(\nu)x} - 1$$



**Figura 10.3:** Reducción de la anchura espectral de la radiación en virtud del mecanismo de amplificación estimulada. Denotamos por  $\Delta\nu$  la anchura a media altura de  $g(\nu_0, \nu)$  y por  $\delta\nu$  la de  $\alpha_T(\nu)$ . Obsérvese la escala vertical para una y otra magnitud.

Hay que tener en cuenta que  $g(\nu_0, \nu)$  ocupa ahora el exponente, lo que provoca que el aspecto de  $\alpha_T$  sea más apuntado que el de  $g(\nu_0, \nu)$ . Por lo tanto la radiación se amplifica esencialmente en un rango de frecuencias exponencialmente más estrecho que el del perfil de luminiscencia original (figura 10.3).

La anchura de amplificación  $\delta\nu$  se obtendrá de la condición

$$\alpha_T(\nu_0 + \delta\nu/2) = \frac{1}{2}\alpha_T(\nu_0)$$

En el caso de un ensanchamiento homogéneo con perfil de Lorentz y anchura  $\Delta\nu$ ,

$$g(\nu_0, \nu) = \frac{2}{\pi\Delta\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu/2}\right)^2}, \quad (10.6)$$

la anchura de amplificación es

$$\delta\nu = \Delta\nu \sqrt{\frac{\ln[\alpha_T(\nu_0) + 1]}{\ln[\alpha_T(\nu_0) + 2] - \ln 2} - 1}$$

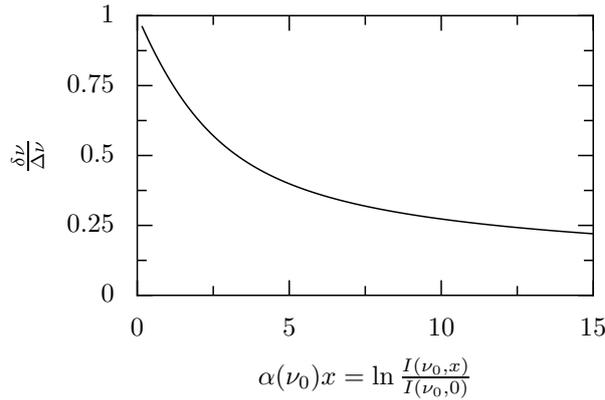
El cociente entre  $\delta\nu$  y  $\Delta\nu$  da la relación de anchuras homogénea y observada según la radiación se va propagando (figura 10.4).

Es importante subrayar que mientras ocurre la amplificación se produce un estrechamiento del perfil de línea de la radiación. Así, el cambio de la intensidad total (todas las frecuencias juntas,  $I = \int_{\Delta\nu} I_\nu(\nu) d\nu$ ) es

$$\frac{dI}{dx} = n_i \int_{\Delta\nu} \sigma_{21}(\nu) I_\nu(\nu) d\nu$$

al cabo de un cierto tiempo  $I(\nu)$ , que tiene el perfil en la exponencial, se ha hecho mucho más estrecho que  $\sigma_{21}(\nu)$ . La variación más lenta de este factor autoriza la aproximación

$$\frac{dI}{dx} \simeq n_i \sigma_{21}(\nu_0) \int_{\Delta\nu} I_\nu(\nu) d\nu = n_i \sigma_{21}(\nu_0) I,$$



**Figura 10.4:** Relación de anchura natural y anchura de amplificación según avanza la radiación en el medio. Nótese que las abscisas son  $\alpha(\nu_0)x$ : la curva presentará un descenso más pronunciado cuanto mayor sea  $\alpha(\nu_0)$ .

que nos permite trabajar con la intensidad total y escribir en términos sencillos el coeficiente de amplificación

$$\begin{aligned} \alpha(\nu_0) &= n_i \sigma_{21}(\nu_0) = n_i \frac{1}{c} g(\nu_0, \nu_0) B_{21} h \nu_0 \\ &= n_i \frac{c^2}{8\pi \nu_0^2} \frac{g(\nu_0, \nu_0)}{\tau_{21}}. \end{aligned}$$

donde la última expresión surge de explicitar la dependencia de  $B_{21}$  del tiempo de vida del nivel,  $\tau_{21} = A_{21}^{-1}$ . En un perfil lorentziano (ec. 10.6)  $g(\nu_0, \nu_0) = 2/(\pi \Delta \nu_{21})$ , que se puede aproximar en primera instancia como  $g(\nu_0, \nu_0) \simeq \Delta \nu_{21}^{-1}$ .

**Ejercicio** calcular  $g(\nu_0, \nu_0)$  para un perfil gaussiano (dado por la ec. 6.6).

Llamando  $\lambda_0$  a la longitud de onda en el vacío, que es la que conocemos,

$$\alpha(\nu_0) \simeq n_i \frac{\lambda_0^2}{8\pi \mu^2(\nu_0) \tau_{21} \Delta \nu_{21}} \quad (10.7)$$

constatamos que aparece un producto en el denominador: el tiempo de vida del nivel y la anchura de la luminiscencia. En los medios en los que solemos trabajar ese producto está alterado por interacciones con los átomos circundantes y no es del orden de  $h$ , cota inferior que establece el principio de incertidumbre. Cuanto más próxima a ésta esté el producto mejor será la calidad de la amplificación para la transición concreta.

### 10.1.1. Pérdidas en la propagación

La radiación sufre pérdidas en su propagación por la materia; por ejemplo es absorbida por las colas de otras transiciones que no son la de nuestro interés. Además está el esparcimiento, un fenómeno inevitable cuyas consecuencias podemos observar en el color

del cielo<sup>1</sup>. En la ecuación de transporte de fotones no hemos tenido en cuenta estos efectos.

Todos estos fenómenos de rozamiento podemos englobarlos en un coeficiente  $\alpha_i$  de absorción interna del medio, el *coeficiente de absorbancia de Lambert*, que de cuenta de los fotones perdidos por mecanismos distintos de las transiciones radiativas entre los niveles 1 y 2. Entonces

$$\frac{dI}{dx} = (n_i\sigma_{21} - \alpha_i)I \quad (10.8)$$

La ecuación 10.5 queda modificada; podemos escribir el efecto de  $\alpha_i$  sobre la intensidad mediante un factor multiplicativo, el coeficiente de transmisión interna  $T_i \equiv \exp(-\alpha_i x)$ :

$$I = I_0 \exp(\alpha - \alpha_i)x = I_0 T_i \exp \alpha x.$$

Usualmente esta ecuación no puede ser integrada de una forma tan simple, debido a que el intercambio de fotones entre la radiación y la materia se produce transfiriendo población entre los dos niveles a los que está acoplada la radiación: cambiando  $n_i$ . Hemos pues de responder a la pregunta de cómo varía  $n_i$ ; para ello necesitamos suplementar el modelo con las ecuaciones de balance de poblaciones.

---

<sup>1</sup>El esparcimiento de Rayleigh depende de la frecuencia a la cuarta potencia; el cielo es azul durante el día, pero cuando al atardecer o al amanecer el espesor óptico de la capa atmosférica interpuesta entre la luz solar y el observador es sensiblemente mayor, se observa un tono anaranjado debido a la pérdida de las componentes cromáticas de mayor frecuencia a lo largo del trayecto.

# 11 Pequeña señal y saturación

## 11.1. Balance de poblaciones

Vamos a estudiar los procesos que afectan a las poblaciones de dos niveles degenerados, intentando relacionar éstas con la evolución de la radiación electromagnética.

El comportamiento de las poblaciones se rige por las ecuaciones de balance de flujos de población entre los niveles del colectivo.

Supongamos que a los dos niveles resonantes se incorpora población a los ritmos  $P_1$  y  $P_2$  por unidad de volumen y unidad de tiempo. Dichos ritmos son el resultado de la aplicación al colectivo de un método de bombeo. Entendemos pues por *método de bombeo de poblaciones* un sistema capaz de alterar las poblaciones de equilibrio térmico de los niveles del colectivo.

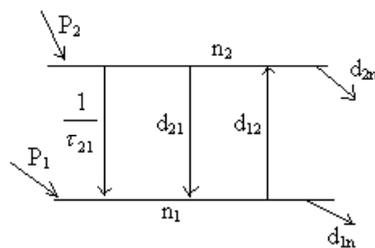
Aparte de  $P_1$  y  $P_2$  a los niveles 1 y 2 pueden llegar o salir elementos del colectivo por otros canales. Hemos esquematizado la situación en la figura 11.1.

Así, el nivel superior (2) puede desexcitarse incoherentemente hacia el inferior (1) por emisión espontánea con probabilidad  $\tau_{21}^{-1}$  y no radiativamente con probabilidad  $d_{21}$  hacia el nivel 1 y con  $d_{2n}$  hacia otros niveles.

En cuanto al nivel inferior 1, aparte de recibir la población procedente del 2 por los caminos indicados, puede enviar térmicamente al 2 con probabilidad  $d_{12}$  y hacia otros niveles con probabilidad  $d_{1n}$ .

Finalmente, la radiación resonante introduce probabilidades de transición estimuladas que también afectan a las poblaciones, como se ha apuntado.

Teniendo en cuenta todos estos flujos, las ecuaciones de balance de las poblaciones de



**Figura 11.1:** Mecanismos de variación de las poblaciones de los niveles 1 y 2.  $d_{12}, d_{21}$  representan las probabilidades térmicas, no radiativas.

los niveles 1 y 2 serán ( $\nu_0 = \nu_{21}$ ):

$$\begin{aligned}\frac{dn_2}{dt} &= -\left(n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1\right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0}I - \left(\frac{1}{\tau_{21}} + d_{21} + d_{2n}\right)n_2 + d_{12}n_1 + P_2 \\ \frac{dn_1}{dt} &= \left(n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1\right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0}I + \left(\frac{1}{\tau_{21}} + d_{21}\right)n_2 - (d_{12} + d_{1n})n_1 + P_1\end{aligned}$$

Vamos a cambiar a las variables inversión de poblaciones  $n_i$ , y población total de los niveles,  $n_l$ .

$$n_i = n_2 - \frac{g_2}{g_1}n_1 \quad n_l = n_1 + n_2$$

Para obtener la evolución de  $n_i$  multiplicamos la segunda ecuación por  $g_2/g_1$  y la restamos de la primera, mientras que para obtener la de  $n_l$  simplemente sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= -\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0}n_iI - \left[\left(\frac{1}{\tau_{21}} + d_{21}\right)\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) + d_{2n}\right]n_2 + \\ &\quad + \left[\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)d_{12} + \frac{g_2}{g_1}d_{1n}\right]n_1 + P_2 - \frac{g_2}{g_1}P_1 \\ \frac{dn_l}{dt} &= P_1 + P_2 - d_{2n}n_2 - d_{1n}n_1\end{aligned}$$

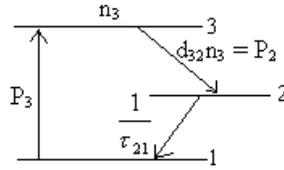
Observamos que en la variación del número total no aparece ningún proceso interno entre los dos niveles. Para poner los segundos miembros en función también de las nuevas variables sustituimos

$$\begin{aligned}n_2 &= \frac{1}{1 + g_2/g_1} \left(\frac{g_2}{g_1}n_l + n_i\right) \\ n_1 &= \frac{1}{1 + g_2/g_1} (n_l - n_i)\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= -\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0}n_iI - \left(\frac{1}{\tau_{21}} + d_{21} + d_{2n} + \frac{d_{2n} + d_{1n}g_2/g_1}{1 + g_2/g_1}\right)n_i + \\ &\quad + \left(-\frac{g_2}{g_1} \frac{1}{\tau_{21}} + d_{12} - \frac{g_2}{g_1}d_{21} + \frac{g_2}{g_1} \frac{d_{1n} - d_{2n}}{1 + g_2/g_1}\right)n_l + P_2 - \frac{g_2}{g_1}P_1 \\ \frac{dn_l}{dt} &= \frac{d_{1n} - d_{2n}}{1 + g_2/g_1}n_i - \frac{d_{2n}g_2/g_1 - d_{1n}}{1 + g_2/g_1}n_l + P_2 + P_1\end{aligned}$$

Esto es un planteamiento muy general. En la práctica los láseres funcionan con esquemas a tres o cuatro niveles, como los que vamos a describir a continuación.



**Figura 11.2:** Esquema de un láser a tres niveles. La emisión láser se obtendrá entre los niveles 2 y 1. Éste es el mecanismo del láser de rubí.  $P_3 = W_{13}n_1$ .

## 11.2. Esquema a tres niveles

Si, como es usual en el láser de tres niveles (figura 11.2), el nivel 1 es el estado fundamental y el 2 es el primer excitado, es obvio que  $d_{1n} = 0$ , y que al ser sólo posible la transición del nivel 2 al 1,  $d_{2n} = 0$ . Entonces la variación de la población total se simplifica:

$$\frac{dn_l}{dt} = P_2 + P_1$$

Si la constante de tiempo  $d_{32}^{-1}$  es mucho más corta que los tiempos en los que cambia el bombeo  $P_3$  (por ejemplo el tiempo de duración del pulso en un bombeo pulsado) se puede asumir que la población  $n_3$  sigue fielmente al bombeo. El paso de 1 a 2 vía 3 es rápido y en 3 no se acumula población. De otro modo:

$$\frac{dn_3}{dt} = P_3 - d_{32}n_3 = P_3 - P_2 \simeq 0$$

Es decir, los bombeos son prácticamente iguales,  $P_2 \simeq P_3$ .

Si, además,  $d_{32} \gg \tau_{21}^{-1}$  la población tiende a acumularse en 2 (nivel *metaestable*) y al cabo de poco tiempo  $n_3 \ll n_2, n_1$ . Por ejemplo, en el láser de rubí  $\tau_{21}$  es de 1 ms, lo que es tan largo que configura una transición casi prohibida. Si  $n_d$  es la densidad total de centros<sup>1</sup>,  $n_l = n_1 + n_2 \simeq n_d$  y

$$\frac{dn_l}{dt} \simeq 0$$

es decir,  $P_1 = -P_2$ : lo que llega a 2 viene de 1 por 3. Llega un momento en que se establece una ligera inversión de población,  $n_2 \gtrsim n_1 \simeq n_d/2$  con  $P_2 = W_{13}n_d/2$ . Observando todas las circunstancias precedentes se tiene

$$\frac{dn_i}{dt} = - \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0} n_i I - \left( \frac{1}{\tau_{21}} + d_{21} + d_{12} \right) n_i + \left( -\frac{g_2}{g_1} \frac{1}{\tau_{21}} + d_{12} - \frac{g_2}{g_1} d_{21} \right) n_d + \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) P_2$$

Podemos reescribir esta ecuación de evolución de la inversión de población de una manera significativa usando por una parte la constante de tiempo

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{21}} + d_{21} + d_{12}$$

<sup>1</sup>normalmente, los centros son impurezas sustitutivas en una red cristalina. Por ejemplo, en el láser de rubí se utilizan iones  $\text{Cr}^{3+}$ .

que representa (regla de Mathiessen) la constante de tiempo de la inversión de población, y por otra la constante

$$K = \left( \frac{g_2}{g_1} \frac{1}{\tau_{21}} - d_{12} + \frac{g_2}{g_1} d_{21} \right) n_d$$

que es la responsable de que, en ausencia de radiación y bombeo, la inversión de población acabe siendo negativa si  $d_{21}$  y  $d_{12}$  son las probabilidades térmicas (siempre  $d_{21} > d_{12}$  en virtud de la estadística de Boltzmann). Es decir,  $K$  representa un desgaste de la inversión de población. Por último podemos introducir un *bombeo efectivo*

$$P = -K + \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) P_2 = -K + \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) P_3$$

y así, en estas magnitudes  $P, \tau$  significativas,

$$\frac{dn_i}{dt} = - \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0} n_i I - \frac{1}{\tau} n_i + P. \quad (11.1)$$

Por lo tanto para producir una inversión de población, podemos introducir radiación que induzca transiciones  $1 \rightarrow 3$ , vía el bombeo  $P_3 = W_{13}n_1$ .

### 11.3. Esquema a cuatro niveles

Si tenemos un láser ideal de cuatro niveles (figura 11.3) en el que  $d_{32}$  y  $d_{10}$  son probabilidades mucho mayores que el resto de las que intervienen en el esquema, tendremos que  $n_1 \simeq 0$ , es decir

$$\frac{dn_2}{dt} = - \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0} n_2 I - \left( \frac{1}{\tau_{21}} + d_{21} + d_{2n} \right) n_2 + P_2$$

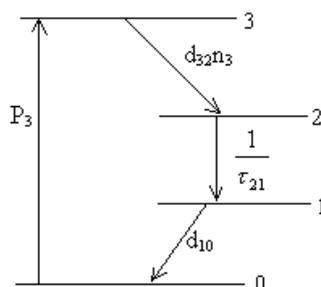
En este caso  $n_2 \ll n_0$ , así que  $n_0 \simeq n_d$ . Así, ahora basta llevar un pequeño número de átomos al nivel  $n_2$  para tener inversión de población. Con  $P = P_2 = d_{32}n_3 \simeq P_3$ , se puede escribir ( $n_i \simeq n_2$ )

$$\frac{dn_i}{dt} = - \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0} n_i I - \frac{1}{\tau} n_i + P \quad (11.2)$$

El esquema de cuatro niveles es ventajoso porque no hace falta promocionar al nivel 2 una cantidad tan grande como  $n_d/2$ . El láser de tres niveles fue sin embargo el primero en construirse.

### 11.4. Evolución comparada de la inversión

Como estos son los esquemas de niveles que utilizan los láseres más usuales, vamos a centrar en ellos la atención. Formalmente, las ecuaciones que corresponden a ambos esquemas son análogas. En el caso de tres niveles (ec 11.1) cabe destacar que *cada proceso estimulado de radiación* reduce en un factor  $(1 + g_2/g_1)$  la inversión de población (= 2



**Figura 11.3:** El tiempo  $\tau_{21}$  en un láser típico de 4 niveles Nd:YAG es del orden de un tercio de milisegundo, un tiempo muy largo frente a los  $10^{-9}$  o  $10^{-8}$  s de las transiciones atómicas habituales. Las transiciones no radiativas  $d$  se realizan en tiempos del orden de  $10^{-11}$ .  $P_3 = W_{03}n_0$ .

si  $g_1 = g_2$ ). En cambio, en el caso de cuatro niveles cada emisión estimulada (ec. 11.2) reduce en una unidad la inversión de población. Por supuesto, entre estos dos casos ideales, caben numerosas situaciones intermedias, pero está claro que el esquema de cuatro niveles necesita una inversión de población menor para producir la misma energía.

En la práctica el bombeo a 3 va a una banda de niveles, o a una serie de bandas conectadas entre sí por transiciones no radiativas. Lo que sí es importante es que los niveles láser sean dos, y lo más estrechos posibles. Hay no obstante láseres, como el HeNe para los que 2 está escindido en varios y dependiendo de las probabilidades de paso de 3 a 2 se obtiene una u otra línea. Para evitar la transición más probable y lograr que *se vean* otras, hay que inhibirla, por mecanismos que describiremos más adelante. De hecho el láser HeNe puede producir transiciones en verde, amarillo, rojo... La más usual es la roja de 632nm. En este láser el bombeo no se hace mediante radiación, sino por impacto de electrones. El bombeo eficaz es el que se hace a través del Helio, que funciona como depósito de inversión de población y transfiere colisionalmente la energía al Neón, que tiene niveles muy próximos.

De hecho en el láser de rubí, el original de tres niveles, no hay tampoco solamente tres, sino que el 2 es doble y por eso de este láser se obtiene un doblete de radiación.

## 11.5. Regímenes de trabajo

Vamos a explotar las ecuaciones 11.1 y 11.2. Si el primer término es pequeño la inversión será prácticamente debida al bombeo  $P$  y a las pérdidas contenidas en  $\tau$ . Entonces diremos que el amplificador está trabajando en *pequeña señal*. Por el contrario si el primer término es grande frente a los otros diremos que trabaja en *saturación*. El criterio para establecer el cambio de régimen de pequeña saturación es, en 11.1,

$$\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) \frac{\sigma_{21}}{h\nu_0} I_0 \simeq \frac{1}{\tau}$$

Y análogamente en 11.2. Se ha definido como *intensidad de saturación*:

$$I_0^{[3]} = \frac{h\nu_0}{(1 + g_2/g_1) \sigma_{21}\tau} \quad (\text{tres niveles}) \quad (11.3)$$

$$I_0^{[4]} = \frac{h\nu_0}{\sigma_{21}\tau} \quad (\text{cuatro niveles}) \quad (11.4)$$

En ambos casos,

$$\frac{dn_i}{dt} = - \left( 1 + \frac{I}{I_0} \right) \frac{n_i}{\tau} + P$$

En saturación la inversión de población está siendo erosionada de modo importante por la presencia de las transiciones estimuladas. Hasta ese punto el amplificador funciona en régimen lineal (pequeña señal). Si lo que se quiere es un amplificador fiel, que reproduzca la entrada, nos interesa este régimen de pequeña señal. Si lo que buscamos es obtener energía, debemos situarnos en saturación.

Si la constante de tiempo del sistema,  $\tau$ , es muy corta en comparación con los tiempos típicos de evolución del bombeo, el sistema se adapta velozmente a los cambios que introduce el bombeo y la inversión sigue dichos cambios con fidelidad. Entonces los dos términos del segundo miembro son casi iguales: hacemos una aproximación adiabática de proceso cuasiestacionario tomando

$$\frac{dn_i}{dt} \simeq 0$$

Como se verá más adelante, cuando el medio amplificador está en un resonador, la inversión de población en los regímenes estables se bloquea en un valor umbral y en él se mantiene durante el funcionamiento del láser.

De la ecuación anterior podemos, entonces, despejar la inversión de población

$$n_i = \frac{P\tau}{1 + I/I_0} \quad (11.5)$$

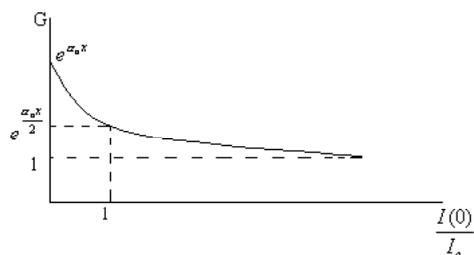
llevando esta expresión a la de la amplificación por unidad de longitud,  $\alpha = \sigma_{21}n_i$  obtenemos que la ganancia en pequeña señal ( $I \ll I_0$ ), denotada por  $\alpha_0$ , valdrá

$$\alpha_0 \simeq P\tau\sigma_{21}$$

y podremos poner

$$\alpha \equiv \frac{1}{I} \frac{dI}{dx} = \frac{\alpha_0}{1 + I/I_0} \quad (11.6)$$

La expresión anterior, conocida como *fórmula de Rigrod* nos indica que el amplificador de radiación se caracteriza por dos parámetros básicos: la amplificación en pequeña señal  $\alpha_0$  y la intensidad de saturación  $I_0$ . Esta ecuación puede ser integrada a lo largo un recorrido  $x$  de la radiación en el medio. Podemos así escribir



**Figura 11.4:** Efecto de la saturación en un amplificador. La curva está determinada por  $\alpha_0$  e  $I_0$ .

$$\left(1 + \frac{I_0}{I}\right) dI = \alpha_0 I_0 dx$$

e integrar entre la intensidad a la entrada<sup>2</sup>  $I(0)$  y en el punto  $x$ ,  $I(x)$

$$\int_{I(0)}^{I(x)} \left(1 + \frac{I_0}{I}\right) dI = \alpha_0 I_0 x$$

es decir

$$(I + I_0 \ln I)|_{I(0)}^{I(x)} = \alpha_0 I_0 x$$

La *ganancia del amplificador* se define como el cociente de intensidad saliente y entrante:  $G(x) \equiv I(x)/I(0)$ .

La ecuación anterior se puede dividir por  $I(0)$

$$\frac{I(x)}{I(0)} - 1 + \frac{I_0}{I(0)} \ln \frac{I(x)}{I(0)} = \frac{I_0}{I(0)} \alpha_0 x$$

donde  $I_0/I(0)$  es la *ganancia en saturación*. Para la ganancia en un paso de 0 a  $x$  a través del medio amplificador queda así:

$$G(x) - 1 + \frac{I_0}{I(0)} \ln G(x) = \frac{I_0}{I(0)} \alpha_0 x$$

de donde

$$\frac{I(0)}{I_0} = \frac{\alpha_0 x - \ln G(x)}{G(x) - 1}$$

Se trata de una ecuación implícita en  $G$  e indica que cuanto mayor sea la intensidad  $I(0)$  de la radiación de entrada, tanto menor es la amplificación  $G$  (zona final de la curva en la figura 11.4). Este es el efecto típico de la saturación y es consecuencia del efecto de

<sup>2</sup>No confundir la intensidad de entrada  $I(0)$  (que fijamos para cada experimento) con la intensidad de saturación,  $I_0$ , que es un parámetro característico del medio amplificador para cada frecuencia  $\nu_0$ .

la intensidad sobre la inversión de la población. Una intensidad  $I(0)$  alta genera muchas emisiones estimuladas, reduciendo  $n_i$  y, por tanto,  $G$ .

En pequeña señal  $I \ll I_0$ , la ecuación de transporte (fórmula de Rigrod) no tiene el término de saturación y se reduce a

$$\frac{dI}{dx} = \alpha_0 I.$$

La solución es la típica de amplificación exponencial

$$I(x) = I(0) e^{\alpha_0 x}$$

y lo que hemos llamado ganancia del amplificador sería  $G(x) = \exp \alpha_0 x$ . La mayoría de los métodos para medir la ganancia en pequeña señal se basan en esta ecuación.

## 11.6. Nivel de ruido del amplificador

Discutimos en este apartado otro aspecto importante en la amplificación de radiación: el ruido debido a la emisión espontánea. De la emisión espontánea, como hemos discutido, sólo una pequeña fracción se va a incorporar a los modos amplificados, y son los correspondientes fotones los que determinan el *ruido cuántico* del amplificador. Vamos a estudiar cuál es su papel.

En el tratamiento realizado hasta ahora sólo se ha tenido en cuenta en la ecuación de transporte la influencia de los procesos estimulados. Es una buena aproximación, ya que los procesos espontáneos sólo pueden competir en un modo cuando el número de fotones por modo es del orden de la unidad o menor. Es evidente que en los modos de una señal incidente con baja divergencia y pequeña anchura espectral la población de fotones será usualmente mucho más alta.

Ahora bien, cuando el amplificador opera en baja señal, puede ocurrir que los fotones espontáneos incorporados a los modos de la radiación incidente constituyan una fracción apreciable de la salida. Sobre todo teniendo en cuenta que participan en el proceso de amplificación. Como la fase de estos fotones espontáneos es incoherente con la señal incidente, esta radiación espontánea amplificada constituye el *ruido cuántico* del amplificador de radiación. Su importancia es clave: en la mayoría de los láseres no se introduce radiación, sino que basta con amplificar el ruido cuántico interno para obtener la emisión láser. Se usa pues el ruido como señal de entrada. En algunos láseres incluso basta con un recorrido a través del amplificador para que el ruido cuántico dé lugar a una potencia enorme. En otros es necesario hacer varios recorridos, recurriendo para ello a insertar el medio amplificador en un resonador. En estos últimos el ruido cuántico empieza a ir de espejo a espejo, amplificándose, y termina por convertirse en la salida del láser.

Vamos a evaluar la magnitud del ruido cuántico espontáneo producido por el amplificador. Para ello debemos añadir en la ecuación de transporte de los fotones ?? la contribución de la emisión espontánea. Pero de la emisión espontánea total debemos seleccionar la fracción que se propaga dentro del ángulo sólido  $\Omega$  que el detector abarca en la salida del amplificador. Además, como la emisión espontánea amplificada tiene una

anchura de línea aproximadamente igual a la del amplificador ( $\delta\nu$ ) y ésta es menor que la natural ( $\Delta\nu$ ), también debemos seleccionar esta fracción del total. La ecuación de transporte sobre la intensidad del ruido amplificado en la detección de salida,  $I_R$  es pues la siguiente:

$$\frac{dI_R}{dx} = (n_i\sigma_{21} - \alpha_i) I_R + \frac{n_2}{\tau_{21}} h\nu_0 \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu}.$$

Con la condición inicial  $I_R(0) = 0$  se integra la ecuación lineal anterior

$$I_R(x) = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} \frac{h\nu_0}{\tau_{21}} \int_0^x e^{(n_i\sigma_{21} - \alpha_i)\lambda} n_2 d\lambda.$$

Si consideramos  $n_i(x)$  y  $n_2(x)$  homogéneas a lo largo de todo el material (como veremos, en pequeña señal hay buenas razones para hacerlo), y llamamos  $l$  a la longitud óptica total del amplificador tenemos

$$I_R(l) = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} \frac{h\nu_0}{\tau_{21}} \frac{\exp[(n_i\sigma_{21} - \alpha_i)l] - 1}{n_i\sigma_{21} - \alpha_i} n_2. \quad (11.7)$$

Hemos calculado el conjunto de todas las radiaciones espontáneas que se ha amplificado. Pero ¿cuál es la semilla?. Para calcularla o medirla, se toma una pequeña rodaja de anchura  $l/N$  y se restringe el bombeo a dicha rodaja: lo que se recoja en el detector será exclusivamente la radiación espontánea producida allí, sin amplificar, ya que la longitud es pequeña. Si multiplicamos por la longitud, tendremos la semilla total.

Podemos desarrollar la exponencial en serie

$$e^{(n_i\sigma_{21} - \alpha_i)l/N} - 1 \simeq (n_i\sigma_{21} - \alpha_i) \frac{l}{N}.$$

Entonces

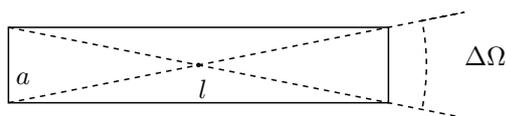
$$I_{\text{esp}}\left(\frac{l}{N}\right) = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} \frac{h\nu_0}{\tau_{21}} \frac{l}{N} n_2$$

y como  $I_{\text{esp}}(l) = NI_{\text{esp}}(l/N)$  podemos en definitiva escribir la ganancia del ruido como

$$\frac{I_R(l)}{I_{\text{esp}}(l)} = \frac{e^{(\alpha_0 - \alpha_i)l} - 1}{(\alpha_0 - \alpha_i)l} \quad (11.8)$$

donde hemos puesto  $n_i\sigma_{21} = \alpha_0$  porque generalmente el ruido se amplifica en un solo paso en pequeña señal.

Si el medio láser está bien diseñado, de modo que  $\alpha_i \ll \alpha_0$  la expresión anterior es función exclusivamente de  $\alpha_0$ . Con esta ecuación disponemos de un criterio para saber si un amplificador está saturado. En efecto, eso ocurre cuando la intensidad de la radiación es lo suficientemente grande como para erosionar la inversión de población. La saturación se producirá en general si la intensidad espontánea emitida es del mismo orden que la estimulada.



**Figura 11.5:** Estimación del ángulo sólido de amplificación espontánea para una varilla de radio  $a$  y longitud  $l$ .

La intensidad espontánea total emitida por la varilla, teniendo en cuenta todos los ángulos y todas las frecuencias, no solamente la banda de amplificación, es

$$I_{\text{esp},T} = \frac{h\nu_0}{\tau_{21}} \ln 2 \quad \left( \text{con } \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = 1 \right)$$

cuando esto sea del mismo orden que lo producido por la emisión láser,  $I_{\text{esp},T} = I_R(l)$ , estaremos en saturación. Ello implica

$$\frac{\exp \alpha_0 l - 1}{\alpha_0 l} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \simeq 1.$$

Si el medio amplificador, como ocurre con frecuencia, tiene la geometría de un cilindro de radio  $a$  y longitud  $l$  el ángulo sólido en que se amplifica la emisión espontánea puede ser estimado así (figura 11.5):

$$\frac{\Delta\Omega}{4\pi} \simeq \left( \frac{a}{l} \right)^2$$

Un poco más complicado es estimar  $\delta\nu/\Delta\nu$ , pero se sabe que en los láseres más usuales su producto con  $\Delta\Omega/4\pi$  vale  $10^{-3}$  ó  $10^{-4}$ . En estas condiciones el criterio de saturación es

$$\alpha_0 l = 9 \dots 11$$

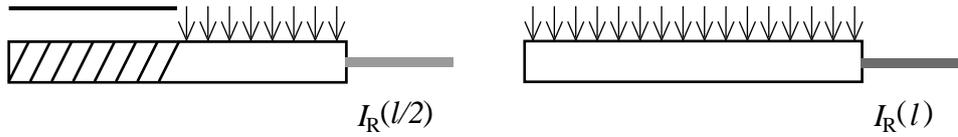
una amplificación muy alta, pero posible en algunos casos. Estos casos son los llamados *láseres de avalancha*, que estudiaremos seguidamente.

Para saber si en un sólo recorrido se va a producir saturación, estas cifras suponen una sobreestimación, ya que hemos supuesto pequeña señal y en dicho régimen la amplificación es mucho más grande que cuando está saturando.

## 11.7. Caracterización de un amplificación de radiación

Ya se ha visto que los dos parámetros que caracterizan a un amplificador de la radiación electromagnética son la amplificación en pequeña señal  $\alpha_0$  y la intensidad de saturación  $I_0$ . La descripción de un amplificador requiere pues la medida de estos dos parámetros.

Existen muchos métodos para medir la amplificación en pequeña señal generalmente adaptados a cada caso concreto. Se suele utilizar el propio ruido cuántico del amplificador, que acabamos de estudiar, en la determinación de  $\alpha_0$  e  $I_0$ .



**Figura 11.6:** Método de Silfvast y Deech para la medida de  $\alpha_0$  (bombeo óptico).

### 11.7.1. Método de Silfvast y Deech

Aquí vamos a describir un método debido a Silfvast y Deech que es fácilmente aplicable en la mayoría de los casos. En este método se mide la radiación espontánea amplificada tras un recorrido de amplificación  $l$  y luego tras  $l/2$ . Si despreciamos las pérdidas de transmisión interna  $\alpha_i$  en la ec. 11.7 y se tiene en cuenta que la amplificación de la emisión espontánea se efectúa usualmente en pequeña señal, y por lo tanto  $\alpha_0 = n_i \sigma_{21}$  (la inversión de población no es alterada por la presencia de la radiación), entonces, si con el mismo bombeo se mide  $I_R$  para una longitud  $l/2$ , tenemos

$$\frac{I_R(l)}{I_R(l/2)} = \frac{\exp \alpha_0 l - 1}{\exp (\alpha_0 l/2) - 1}$$

De donde obtenemos una ecuación de segundo grado en  $\exp (\alpha_0 l/2)$ :

$$\exp \alpha_0 l - \frac{I_R(l)}{I_R(l/2)} \exp (\alpha_0 l/2) + \frac{I_R(l)}{I_R(l/2)} - 1 = 0$$

Resolviéndola, y despejando  $\alpha_0$

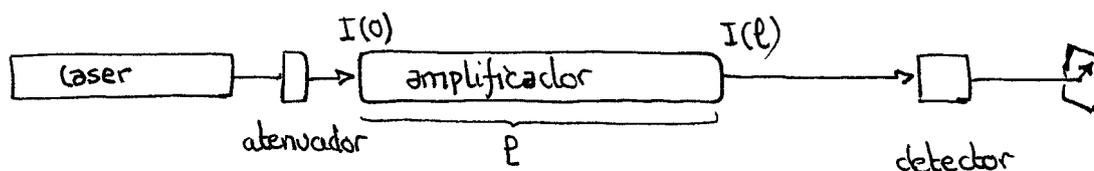
$$\exp (\alpha_0 l/2) = \frac{I_R(l)}{I_R(l/2)} - 1, \quad \alpha_0 = \frac{2}{l} \ln \left( \frac{I_R(l)}{I_R(l/2)} - 1 \right)$$

de la medida de la emisión espontánea amplificada obtenemos la ganancia en pequeña señal. Cuando el bombeo es óptico el método se aplica con facilidad; basta con medir primero la intensidad que emite el amplificador bombeado completo, y después bombear solo la mitad volviendo a medir la emisión espontánea amplificada (figura 11.6). Cuando es por descarga, se deben preparar dos tubos diferentes, uno de longitud doble que el otro, etc.

Por lo que se refiere a la intensidad de saturación  $I_0$  la mayoría de los métodos experimentales de medida extraen esta información del análisis del amplificador en un resonador, pues como veremos después en estas condiciones es fácil saturar el amplificador.

### 11.7.2. Método “de la amplificación relativa”

En este apartado presentamos otro método de caracterización con una fácil realización experimental. En efecto, los parámetros del amplificador se podrán obtener de la medida de la amplificación relativa  $\Delta I/I(0)$  en función de la intensidad de entrada,  $I(0)$ .



**Figura 11.7:** Dispositivo para la caracterización del amplificador por el método de la amplificación relativa.

Recordamos que integrando la fórmula de Rigrod (11.6) en un recorrido  $l$  en el que no se produce saturación se obtenía

$$I_0 \ln \frac{I(l)}{I(0)} + I(l) - I(0) = \alpha_0 I_0 l$$

O sea

$$\frac{I(l)}{I(0)} = \exp \alpha_0 l \exp \frac{I(l) - I(0)}{I_0}$$

La amplificación relativa en el recorrido  $l$  es

$$\frac{\Delta I}{I(0)} = \frac{I(l) - I(0)}{I(0)} = \frac{I(l)}{I(0)} - 1 = \exp \alpha_0 l \exp \frac{I(l) - I(0)}{I_0} - 1$$

El valor de  $\Delta I/I(0)$  se puede obtener experimentalmente con facilidad (figura 11.7) si se dispone de un láser u otro foco luminoso de la misma longitud de onda.

En baja señal  $I(0), I(l) \ll I_0$

$$\lim_{I(0) \rightarrow 0} \frac{I(l)}{I(0)} = \exp \alpha_0 l = \frac{dI(l)}{dI(0)}, \quad \lim_{I(0) \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{I(0)} = \exp \alpha_0 l - 1$$

Como

$$\frac{d}{dI(0)} \frac{\Delta I}{I(0)} = \exp \alpha_0 l \exp \left( -\frac{I(l) - I(0)}{I_0} \right) \left( -\frac{1}{I_0} \frac{dI(l)}{dI(0)} + \frac{1}{I_0} \right)$$

La pendiente en el origen en la gráfica  $\frac{\Delta I}{I(0)} (I(0))$  (figura 11.8) será la tangente cuando  $I(0) \rightarrow 0$

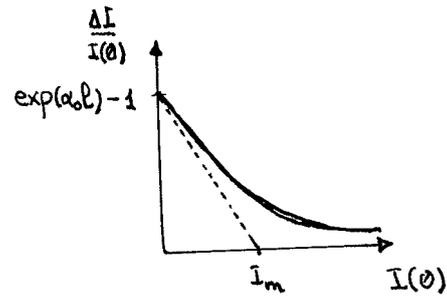
$$\lim_{I(0) \rightarrow 0} \frac{d}{dI(0)} \frac{\Delta I}{I(0)} = \frac{1}{I_0} \exp \alpha_0 l (\exp \alpha_0 l - 1)$$

Entonces, si la tangente en el origen corta al eje  $I(0)$  en  $I_m$

$$\frac{\exp \alpha_0 l - 1}{I_m} = \frac{1}{I_0} \exp \alpha_0 l (\exp \alpha_0 l - 1)$$

Por lo tanto

$$I_0 = I_m \exp \alpha_0 l$$



**Figura 11.8:** Amplificación relativa en función de la intensidad a la entrada.

En conclusión, con la medida de  $\Delta I/I(0)$  en función de  $I(0)$  obtenemos  $\alpha_0 l$  a través de la ordenada en el origen y con este valor la tangente en el origen a través de  $I_m$  nos permite hallar  $I_0$ .



# 12 Láseres de avalancha

## 12.1. Fundamento

Consideremos ahora el caso en que el ruido cuántico del amplificador lo satura por completo, y por tanto no podemos emplear las ecuaciones del apartado anterior. En régimen de saturación,  $I \gg I_0$  la fórmula de Rigrod (ec. 11.6) se simplifica:

$$\alpha = \frac{I_0}{I} \alpha_0, \quad \frac{dI}{dx} = \alpha_0 I_0$$

de donde con la condición  $I(0) = 0$  (sólo se amplifica el ruido del propio amplificador) se obtiene la siguiente relación lineal entre intensidad generada y longitud recorrida por la radiación en el amplificador:

$$I(x) = \alpha_0 I_0 x.$$

La expresión explícita para  $I_0$  depende del esquema de niveles del medio amplificador, entre otros factores, según las fórmulas 11.3 y 11.4.

En algunos amplificadores se pueden conseguir ganancias extremadamente altas en tiempos muy cortos. Durante el breve tiempo en el que la amplificación alcanza valores muy altos, el ruido cuántico sobresatura el amplificador (A.S.E., *Amplified Spontaneous Emission*). Son los *láseres de avalancha*.

Entre los láseres de avalancha, merecen mención especial los de *onda viajera*; en éstos, la inversión de población la produce una excitación de bombeo que se desplaza a la velocidad que la luz tiene en el medio amplificador,  $c = c_0/\mu$ . En virtud de las relaciones  $n_i = P\tau/(1 + I/I_0)$  y  $\alpha_0 = n_i\sigma_{21}$  la forma de propagación del bombeo se traslada a la amplificación:

$$P = P \left( t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow \alpha = \alpha_0 \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

En este caso en la ecuación de transporte de la radiación (10.2) existe una dependencia explícita de la intensidad en el tiempo:

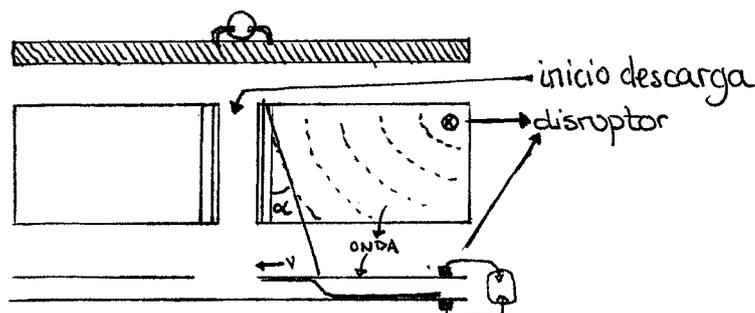
$$\frac{1}{c} \frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} = I\alpha = \frac{I\alpha_0(t - x/c)}{1 + I/I_0} \simeq I_0\alpha_0(t - x/c)$$

con el siguiente cambio de variable nos *montamos* sobre la onda viajera

$$t' = t - x/c, \quad x' = x$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$$



**Figura 12.1:** Montaje para la generación de la onda de bombeo por el método de la línea de Blusalein. Arriba, alzado exterior (la circunferencia representa el tubo de descarga). En el centro, planta. Abajo, alzado representando la progresión de la onda.

volvemos a tener una ecuación con la misma forma que en el caso adiabático 10.4

$$\frac{\partial I}{\partial x'} = I_0 \alpha_0$$

y por lo tanto, recordando que se amplifica el ruido ( $I(0) = 0$ ) y tomando  $I_0 = I_0^{[3]}$ :

$$I(l) = \frac{h\nu_0 Pl}{1 + g_2/g_1}.$$

Los sistemas experimentales que se han de emplear para conseguir la onda de bombeo se explican a continuación.

## 12.2. Generación de la onda de bombeo

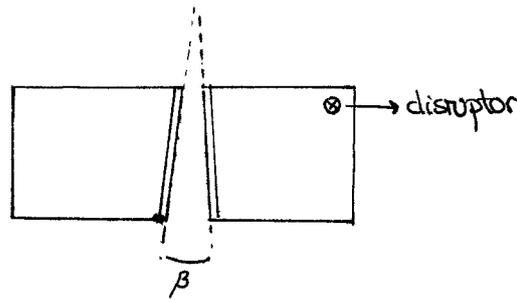
Los métodos más empleados en el bombeo de gases a baja presión son el de la línea de Blusalein y el de las líneas coaxiales formadoras de pulso.

La base de ambos reside en la aplicación a dos electrodos alargados entre los que se encuentra el gas de una onda de alta tensión que progresa sobre la longitud del electrodo a la velocidad de la luz.

### 12.2.1. Línea de Blusalein

Para conseguir la onda de alta tensión en este método, ilustrado en la figura 12.1, se construye la línea con dos condensadores planos idénticos, que tienen conectada una armadura a cada uno de los electrodos. En la esquina de uno de los condensadores se ubica un disruptor, que al cerrarse descarga este condensador.

Si la conductancia del disruptor es pequeña, una onda de caída de potencial se propaga a partir de éste por la línea que constituyen las armaduras del condensador. Como el otro condensador sigue cargado, cuando la caída de potencial alcanza el extremo del electrodo se genera una descarga que se propaga con la misma velocidad con que marcha



**Figura 12.2:** Línea de Blusalein con los electrodos en ángulo. El sistema sigue el mismo principio que se utiliza en las torres de los tendidos eléctricos para conducir fuera de la línea la alta tensión de los rayos, evitando que se propague al siguiente segmento de línea.

el corte del frente de ondas<sup>1</sup> sobre el electrodo. Esta velocidad es la de propagación de la onda en el dieléctrico del condensador,  $v$ , dividida por el seno del ángulo ( $\alpha$ ) entre el frente de ondas y el electrodo; para que se produzca el bombeo en onda viajera esta velocidad deberá ser igual a la de la luz en el medio amplificador, es decir:

$$\sin \alpha = v/c$$

Así, la descarga entre los electrodos que produce el bombeo de poblaciones en el gas se desplaza a la misma velocidad que la luz que está amplificando. El parámetro a ajustar es  $\alpha$ .

Se puede conseguir el mismo efecto si los electrodos forman un ángulo  $\beta$  en lugar de ser paralelos (figura 12.2). Entonces, al descargarse el condensador a través del disruptor, la descarga entre los electrodos se inicia en el extremo en que estos se encuentran más próximos<sup>2</sup>, y rápidamente se desplaza hacia el otro extremo. Lo interesante es que la velocidad de desplazamiento de la descarga depende, además de la presión del gas entre los electrodos, del ángulo  $\beta$  que forman éstos.

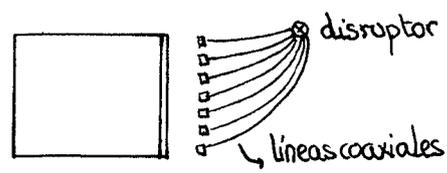
Cabe señalar que el láser puede funcionar sin efecto de línea. Por ejemplo, si el disruptor no tiene inductancia suficientemente baja el condensador se descarga en todas partes simultáneamente y la potencia es menor, aunque en general es también bastante alta. En algunos casos se usan uno o dos espejos para realimentar.

### 12.2.2. Líneas coaxiales formadoras de pulso

También se puede conseguir el efecto de onda viajera si la descarga se realiza entre una sucesión de electrodos cortos, unidos a un disruptor por líneas de transmisión de longitud variable (como en la figura 12.3) cuyas capacidades se descargan a través del disruptor.

<sup>1</sup>Se necesita un disruptor con inductancia muy baja para que la onda sea verdaderamente abrupta.

<sup>2</sup>Esta geometría permite relajar la exigencia de una inductancia muy pequeña para el disruptor.



**Figura 12.3:** Montaje de líneas coaxiales para la generación de la onda de bombeo. La onda de descarga va llegando en orden de longitud del cable disruptor-condensador.

## 13 Amplificadores resonantes regenerativos

Frecuentemente la amplificación por unidad de longitud que se puede conseguir en un medio es tan pequeña que para alcanzar amplificaciones sustanciales sería preciso que la radiación recorriera grandes longitudes de medio en inversión. En la práctica esto puede ser difícil o poco manejable.

La forma habitual de solventar este problema es introducir el amplificador en un resonador Fabry-Perot. De esta forma la radiación resonante pasará una y otra vez a través del amplificador en las sucesivas reflexiones en los espejos y en cada paso resultará amplificada. Es como si el medio amplificador se hubiese alargado tantas veces como la radiación pasa a través de él en las sucesivas reflexiones. Dado que en cada reflexión la radiación entra y sale del medio invertido hay que evitar las pérdidas por reflexión que se producirían en estos tránsitos. Para ello existen dos alternativas:

- Una consiste en hacer que la entrada y la salida se efectúen a través de un plano en ángulo de Brewster (figura 13.1). En el ángulo de Brewster la onda  $P$  (la que lleva la polarización en el plano de incidencia) pasa casi sin pérdidas y la onda  $S$  (la que lleva la polarización ortogonal) se refleja muy eficientemente. No hay pérdidas de inserción por haber insertado el medio ahí dentro, y además el sistema selecciona una polarización, la  $P$ . En este sistema la radiación que se va a obtener a través del espejo semitransparente será polarizada.

El medio amplificador puede ser sólido, líquido o gaseoso. En los dos últimos (fluidos), debemos recordar que el ángulo de Brewster es el correspondiente al índice de refracción de las ventanas del contenedor,  $\tan \alpha_B = n$ .

- Una segunda posibilidad consiste en depositar un recubrimiento antirreflectante sobre las ventanas de entrada y salida del medio amplificador (figura 13.2). Un

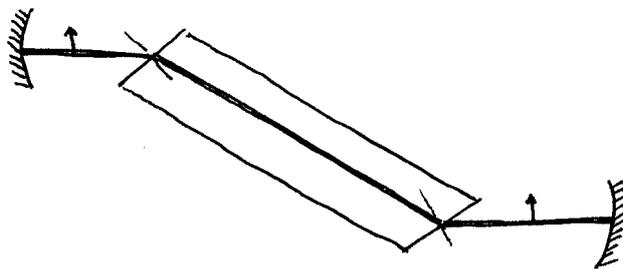
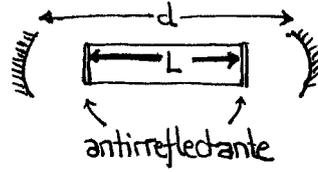


Figura 13.1: Montaje del medio amplificador en un resonador con ángulo de Brewster.



**Figura 13.2:** Recubrimiento antirreflejante en las ventanas del resonador.

recubrimiento de este tipo elimina por interferencia la componente reflejada (gafas de *óptica azul*).

Usualmente, el medio amplificador no llena completamente la distancia  $d$  entre los espejos del resonador. Entonces, si  $L$  es la longitud del medio amplificador y éste tiene un índice de refracción a la frecuencia de la radiación amplificada  $\mu \equiv \mu(\nu_0)$ , el camino óptico  $l$  entre los espejos del resonador será:

$$\frac{l}{c_0} = \frac{d - L}{c_0} + \frac{L}{c_0/\mu}$$

(el primer término representa la propagación a la velocidad de la luz en el vacío; el segundo a la velocidad en el medio). La longitud óptica del resonador es pues

$$l = d + (\mu - 1) L$$

y así no necesitamos preocuparnos de qué medio hay en el interior.

Para un resonador pasivo la función de transferencia la escribíamos  $f = t_i e^{i\phi}$ . En un resonador activo debemos tener en cuenta la ganancia del medio, que denotaremos  $g$  (en amplitud) y  $G \equiv g^2$  (en intensidad). El campo y la intensidad en este recorrido cambian con las siguientes funciones de transferencia respectivamente:

$$f = t_i g e^{i\phi}, \quad F = |f|^2 = T_i g^2 = T_i G$$

y el análisis es paralelo al de los medios pasivos, solo que incorporando el nuevo factor. Por ejemplo, la función de transferencia del resonador para la intensidad (9.2 para el resonador pasivo) pasa a ser

$$G_T = \frac{T_1 T_2 T_i G}{(1 - R T_i G)^2 + 4 R T_i G \sin^2 \phi} \quad (13.1)$$

Para distinguir una de otra, denotamos con  $G_T$  la función de transferencia en presencia de un medio activo. Las condiciones en las que  $G_T$  es máxima son las mismas que las que estudiamos para  $F_T$ :  $\phi_q = q\pi$ . En dichas condiciones de máximo

$$(G_T)_{\max} = \frac{T_1 T_2 T_i G}{(1 - R T_i G)^2}$$

Observamos que si se parte de la situación de resonador pasivo (ganancia en un paso  $G = 1$ ) y a través de un bombeo progresivo se hace crecer  $G$  hasta aquel valor  $G_u$  para el que

$$RT_i G_u = 1$$

se obtiene  $(G_T)_{\max} = \infty$ . Esto representa un régimen estacionario físicamente imposible (*resonador desestabilizado*), pues supone que el campo se hace infinito a la salida del resonador.

Lo que ocurre en un dispositivo experimental es que mientras  $RT_i G < 1$  las pérdidas son mayores que la ganancia en cada paso entre los espejos. Pero si la ganancia  $G$  es mayor que las pérdidas en un paso entonces el campo crece en cada paso. Ahora bien, el crecimiento del campo erosiona la inversión de población por el efecto de las emisiones estimuladas, y por lo tanto el valor de  $G$ . Esta autorregulación hace que  $G$  tienda a tener valores ligeramente por debajo o por encima del valor llamado *umbral*,

$$G_u \equiv \frac{1}{RT_i}$$

en el que la ganancia iguala a las pérdidas.

Así pues, para que se inicie la emisión láser en el resonador el mecanismo de bombeo que produce la inversión de población debe ser suficiente para que se alcance la condición umbral, y sólo se emite la energía introducida por encima de dicho umbral.

Los láseres de resonador normalmente también amplifican su propio ruido cuántico. Como en el resonador activo  $F = T_i G$  la anchura de un modo (ec. 9.6) pasa a ser:

$$\delta\omega_{q,nm} = \frac{1 - T_i R G c}{\sqrt{T_i R G} l}. \quad (13.2)$$

La anchura de los modos está ligada a la ganancia. Cuanto más cerca esté de la situación umbral tanto menor es la anchura de las resonancias. De hecho, cada modo láser es tan monocromático que su anchura no se puede medir por ningún método directo, puesto que el aparato convencional de medida, un Fabry-Perot sin medio activo, tiene una anchura de modo mayor.

Por la misma dinámica, la inversión de población se sitúa en todo el medio amplificador en el valor correspondiente al umbral,

$$G_u = \exp [n_{iu} \sigma_{21}(\nu) L] = \frac{1}{RT_i}$$

despejando,

$$n_{iu}(\nu) = -\frac{\ln RT_i}{\sigma_{21}(\nu) L} = \frac{l}{L} \frac{1}{\sigma_{21}(\nu) ct_c}$$

con  $t_c$  el tiempo de permanencia de la ec. 9.7. Una vez se alcanza la ganancia umbral se instala en todo el medio activo una inversión umbral homogénea (y estacionaria salvo pequeñas oscilaciones), lo cual nos permite utilizar las fórmulas de la amplificación exponencial.

Pero si la inversión de población umbral es muy alta, el bombeo también debe serlo: hay que invertir mucha energía para superar las pérdidas. Para que un láser sea bueno, conviene pues que la inversión umbral sea todo lo baja posible. Como se puede ver en la fórmula, conviene una gran sección eficaz (buen medio), y un tiempo de vida del fotón en la cavidad alto (buen resonador, es decir, pérdidas pequeñas).

Se puede caracterizar la calidad del medio la ec. 10.7, de la que se deriva

$$\sigma_{21} \simeq \frac{\lambda^2}{\Delta\nu_{21}\tau_{21}} \frac{1}{8\pi}$$

Lo que buscamos es un medio en el producto  $\Delta\nu_{21}\tau_{21}$  del denominador se parezca al límite de transformada,  $(2\pi)^{-1}$ ; esto es más fácil en medios atómicos donde  $\Delta\nu_{21}$  no es tan grande.

### 13.1. Medios con ensanchamiento inhomogéneo

En un medio con ensanchamiento inhomogéneo los centros amplificadores tienen las frecuencias centrales de emisión repartidas en todo el perfil en proporción a la probabilidad que tiene cada centro de situar en un determinado valor su frecuencia central de emisión. Por lo tanto, cada modo del resonador permite participar en la amplificación a los centros (átomos, moléculas) cuya anchura homogénea solape con la frecuencia del modo. Los centros que no están en resonancia con los modos del resonador no participan, por lo tanto, de una forma directa en el proceso de amplificación. En consecuencia, en la radiación emitida aparecerán los modos en los que la ganancia  $G(\nu)$  esté por encima del valor umbral:

$$G_u \gtrsim \frac{1}{RT_i}$$

La condición se ha ilustrado en la figura 13.3.

La inversión de población umbral es la misma en todas las frecuencias  $\nu'_0$ . La ganancia umbral por tanto es la misma para todos los modos. Si el perfil inhomogéneo  $\sigma_{21}$  es muy grande para ciertas frecuencias  $\nu'_0$ , entonces la ganancia correspondiente  $G(\nu'_0)$  es grande y esos modos son los que entran a producir emisión láser antes:  $G(\nu'_0) > G_u$ .

La salida del láser es nula en los modos fuera de la intersección curva de ganancia - ganancia umbral. En el láser inhomogéneo cada modo dispone de un grupo de átomos suministrándole energía en distintas frecuencias y que dan lugar a la salida láser en ese modo.

Dependiendo de la geometría de la cavidad o resonador y de la anchura inhomogénea, así como de la ganancia, el número de modos amplificados puede ser de unos pocos, de muchos cientos o de miles. Por ejemplo, supongamos un láser de gas. Como la separación entre modos es  $\Delta\nu = c/2l$ , si  $l$  es grande los modos están muy juntos. En la figura eso implica que entran muchos modos en la anchura Doppler. En cambio en las cavidades cortas es posible que entre solamente un modo.

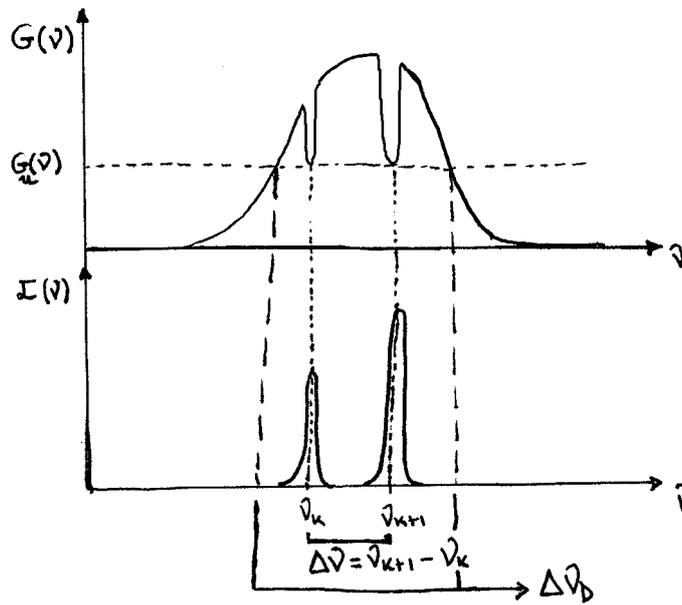


Figura 13.3: En el caso de ensanchamiento inhomogéneo, sólo los modos con ganancia superior al umbral participan en el proceso de amplificación.

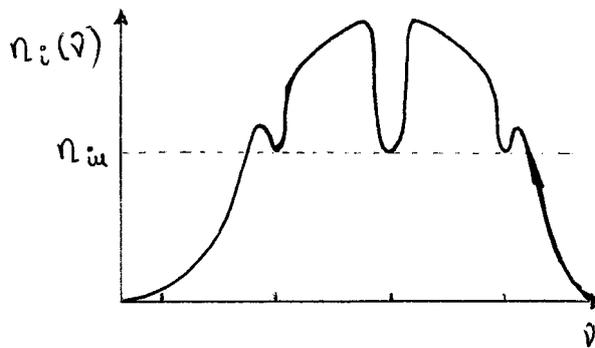
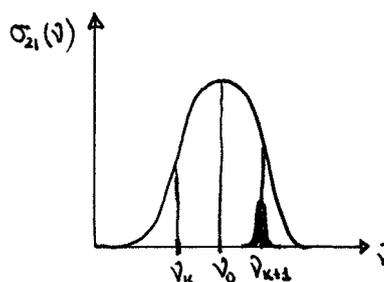


Figura 13.4: La inversión se queda en el umbral en las frecuencias de los modos del resonador (quemado espectral).



**Figura 13.5:** La sección eficaz es diferente para los distintos modos. El modo con mayor  $\sigma_{21}$  (menor  $n_{iu}$ ) es el primero que emite. En el caso homogéneo, hay un perfil común para todos los átomos y todos están acoplados de la misma manera a los modos. Cuando un modo empieza a oscilar quita energía a todos los otros, y la tendencia en ensanchamiento homogéneo es producir un sólo modo axial.

## 13.2. Medios con ensanchamiento homogéneo

En aquellos medios láser cuyo ensanchamiento espectral es homogéneo (caso de los láseres en los que los centros amplificadores se alojan en la red de un cristal), el primer modo que supera el umbral comienza a ser amplificado por todos los centros al mismo tiempo y la inversión de población que supera a la umbral para generar la ganancia se gasta en amplificar la radiación en la frecuencia de este modo. Como en las frecuencias de los demás modos el umbral

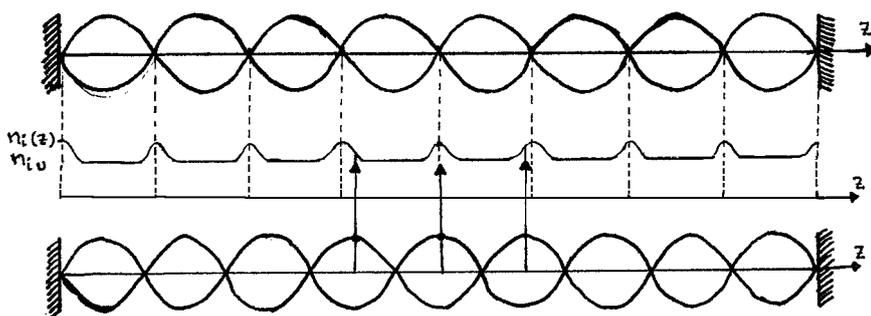
$$n_{iu}(\nu_k) = \frac{l}{L} \frac{1}{t_c} \frac{1}{\sigma_{21}(\nu_k)}$$

es más alto que en el modo más resonante, nunca llegarán a amplificarse (ver figura 13.5).

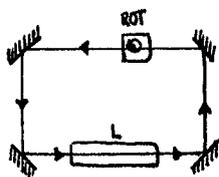
En estos láseres la tendencia pues es a que oscile el modo axial más próximo a la resonancia. Sin embargo en los experimentos se observa un pequeño número de modos, no solamente uno. Veamos por qué.

Las intensidades que la radiación adquiere en el interior del resonador son tan altas que el medio está muy saturado, sobre todo en los puntos en los que la intensidad es mayor. En la onda estacionaria que sustenta el resonador en el modo más resonante la inversión se desgasta más en los vientres que en los nodos, quedando en estos un poco más por encima del umbral.

En efecto, si representamos la inversión de población en función de la coordenada axial (figura 13.6), encontramos que en cada uno de los nodos la inversión de población no se ha desgastado, está intocada. Nuestro medio está entonces convertido en una especie de rejilla de inversión de población. La intensidad de luz en unas zonas es alta —inversión pequeña— y en otras es nula —inversión incólume—. Si eso ocurre con el modo que inicialmente se excita, los dos más próximos aprovechan la inversión de población residual que allí queda. Donde en el modo privilegiado tenemos un nodo, en los contiguos tenemos un máximo. Los vientres de los contiguos coinciden en la zona central del resonador con



**Figura 13.6:** La aparición de modos adicionales cerca del modo central se explica en virtud de la coincidencia de sus vientres con la zona de inversión no desgastada por el modo principal. El primer gráfico representa el modo principal y el tercero uno de estos modos adicionales.



**Figura 13.7:** Resonador en anillo. El elemento señalado como Rot impide a la luz viajar en ambas direcciones: el efecto Faraday, que da lugar a la rotación de la polarización según la luz avanza, sumado a un polarizador, permite obturar la luz en un sentido.

la zona de la inversión de población no desgastada por el principal, y la aprovechan para amplificarse y superar el umbral. Y por eso aparecen dos o tres modos cerca del modo central (ver  $\sigma_{21}(\nu)$ , figura 13.5). Por lo tanto en el momento en el que el resonador Fabry-Perot produce la onda estacionaria está dando la posibilidad de aparición de los modos laterales. Estos fenómenos de desgaste de la inversión de población se denominan *quemado*, y se adjetivan como *espaciales* (el que acabamos de ver) o *espectrales*, como el que se produce en el caso inhomogéneo con la inversión de población (figura 13.4) que solapa las frecuencias de los modos y que hemos discutido en el apartado precedente.

Se puede evitar la formación de la onda estacionaria construyendo el resonador en anillo (*ring resonator*). Los resonadores en anillo pueden ser bidireccionales, en cuyo caso se forma la onda estacionaria como en el Fabry-Perot o unidireccionales, interponiendo en el trayecto de la luz un rotador de Faraday (ver figura 13.7).

En ese caso no puede haber onda estacionaria y se puede obtener el único modo axial que estaba previsto, ya que la luz sólo puede recorrer el resonador en un sentido.

Como conclusión del apartado, podemos señalar que el uso de un resonador permite seleccionar una frecuencia concreta y permitir que la ganancia por paso sea pequeña, pues la ganancia total se puede hacer enorme multiplicando el número de pasos.



## 14 El oscilador láser saturado por la emisión espontánea

En los apartados precedentes hemos estudiado la amplificación en un amplificador resonante regenerativo. Sin embargo, en el estudio realizado se suponía que la radiación amplificada entraba en el resonador a través de los espejos, y ésta no es la situación que suele producirse en un sistema físico real. En la práctica no se puede prescindir de la emisión espontánea, como se ha obrado de hecho en el cálculo idealizado anterior.

En un amplificador resonante por encima del umbral, la emisión espontánea emitida dentro de un pequeño ángulo sólido  $d^2\Omega$  en dirección ortogonal a los espejos por el medio invertido en la transición láser ( $h\nu_{21}$ ) es amplificada sucesivamente hasta saturarlo. La radiación láser que se extrae a través de los espejos no es más que la *propia emisión espontánea del nivel láser* amplificada en el medio por la inversión de población. En este caso, por lo tanto, la radiación que entra en el resonador no lo hace a través del espejo, sino que se genera dentro del propio amplificador.

A partir de las expresiones para la evolución de la intensidad del ruido 11.7 y 11.8, y cambiando la longitud óptica del resonador ( $l$ ) por la del medio amplificador ( $L$ ), podemos escribir

$$I_R(L) = I_{\text{esp}}(L) \frac{\exp[(n_i\sigma_{21} - \alpha_i)L] - 1}{(n_i\sigma_{21} - \alpha_i)L}$$

donde

$$I_{\text{esp}}(L) = \frac{h\nu_0}{\tau_{21}} \frac{\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} Ln_2$$

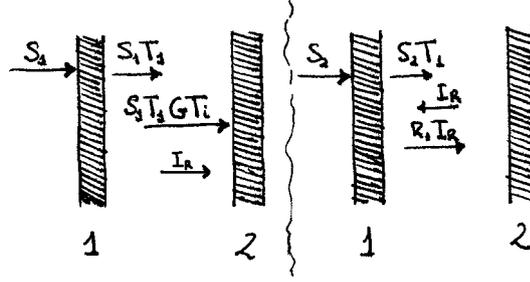
es la emisión espontánea total sin amplificar producida por el medio amplificador dentro del ángulo sólido  $\Omega$  y en una anchura espectral  $\delta\nu$ . Tanto  $\Omega$  como  $\delta\nu$  son difíciles de estimar a priori, si bien en una primera aproximación  $\Omega$  podría estimarse como el ángulo sólido dentro del que sale la emisión láser y  $\delta\nu = \delta\nu_m$  (la anchura de amplificación del modo axial). Como la intensidad espontánea es en general baja, su régimen de amplificación en un paso suele ser de baja señal, y por tanto

$$G = \exp n_i\sigma_{21}L$$

Teniendo en cuenta que  $T_i = \exp(-\alpha_i L)$  se tiene, en forma compacta,

$$I_R = I_{\text{esp}} \frac{GT_i - 1}{\ln GT_i}$$

Para poder considerar aplicable el tratamiento que hemos hecho del amplificador resonante, tenemos que plantear el problema del mismo modo. Pero en la teoría que habíamos



**Figura 14.1:** Izquierda: entrada externa  $S_1$  equivalente a la intensidad del ruido que llega al segundo espejo. Entrada externa  $S_2$  equivalente a la intensidad del ruido que llega al primer espejo.

hecho suponíamos una luz procedente de fuera que se amplificaba, mientras que la luz en la situación presente se genera dentro y se dirige a ambos espejos. Convertamos pues en una señal externa lo que tenemos para poder aplicar las fórmulas de las que disponemos. Consideremos la figura 14.1 (izquierda) y sea en ella  $S_1$  la intensidad que tendría que entrar por el espejo 1 equivalente a la  $I_R$  que llega al espejo 2. Entonces  $I_R = GT_i T_1 S_1$  y la fuente externa  $S_1$  es

$$S_1 = I_R / GT_i T_1$$

Análogamente, (figura 14.1, derecha) sea  $S_2$  la intensidad que entrando por el espejo 1 sería equivalente a la intensidad  $I_R$  que desde el interior llega a este espejo. Entonces,  $R_1 I_R = T_1 S_2$  y la fuente externa  $S_2$  es

$$S_2 = \frac{R_1 I_R}{T_1}$$

La señal total entrante equivalente a la emisión espontánea es la suma de ambas:

$$S = S_1 + S_2 = I_R \frac{1 + R_1 T_i G}{GT_i T_1}$$

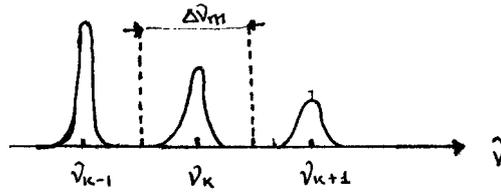
Ahora  $S$  juega el papel de  $I(0)$  en la ecuación de  $I_T$  en los cálculos del amplificador, y la intensidad saliente por el espejo 2 será, como entonces (función de transferencia 13.1),

$$I_{S_2} = S \frac{T_1 T_2 GT_i}{(1 - T_i RG)^2 + 4T_i RG \sin^2 \phi}$$

o, sustituyendo  $S$ ,

$$I_{S_2} = I_{\text{esp}} \frac{(GT_i - 1)}{\ln GT_i} \frac{T_2 (1 + R_1 T_i G)}{(1 - T_i RG)^2 + 4T_i RG \sin^2 \phi}$$

En el empleo de esta expresión lo más difícil es la estimación o medida de  $G$  e  $I_{\text{esp}}$  (donde están comprendidos parámetros de difícil estimación como  $\delta\nu$  y  $\Omega$ ); por otra parte, la forma de  $G(\nu)$  influye ahora de una manera algo distinta en el perfil  $I_{S_2}(\nu)$ , aunque los



**Figura 14.2:** Los modos en el resonador Fabry-Perot tienen una distancia  $\Delta\nu_m = c/2l$ . La frecuencia  $\nu_k$  es, por ser los modos equiespaciados,  $\nu_k = k\Delta\nu_m$  y la fase  $\phi_k = k\pi = \frac{\pi}{\Delta\nu_m}\nu_k$ .

cambios no sean esenciales respecto a lo estudiado anteriormente. No debemos olvidar que en esta expresión tenemos una dependencia de la frecuencia, por una parte en  $G$  y por otra en  $\phi$ . La que nos interesa considerar es la más pronunciada de ambas, que ya intuimos que corresponde a la de los modos<sup>1</sup>. Por ello, seguimos teniendo la radiación emitida distribuida en las resonancias del Fabry-Perot (figura 14.2).

La intensidad promediada sobre el intervalo que saldrá en una de las resonancias de la figura será

$$\bar{I}_{S_2} = \frac{1}{\Delta\nu_m} \int_{\nu_k - \Delta\nu_m/2}^{\nu_k + \Delta\nu_m/2} I_{S_2}(\nu) d\nu$$

Salvo en los láseres de infrarrojo lejano (como por ejemplo el de  $\text{CO}_2$ ) la dependencia más fuerte en  $\nu$  es la debida a la fase (resonancia en el denominador de  $I_{S_2}$ ). Podemos aplicarlo para sacar factores fuera de la integral:

$$\bar{I}_{S_2} = \frac{I_{\text{esp}}(\nu_m)}{\Delta\nu_m} \frac{[G(\nu_k)T_i - 1] [1 + R_1T_iG(\nu_k)] T_2}{\ln G(\nu_k)T_i} \int_{\nu_k - \Delta\nu_m/2}^{\nu_k + \Delta\nu_m/2} \frac{d\nu}{(1 - T_iRG(\nu))^2 + 4T_iRG(\nu)\sin^2\phi}$$

Además, como conviene hacer la integral sobre la fase, con relación fase-frecuencia dada por  $d\nu = (\Delta\nu_m/\pi) d\phi$  los límites de integración pasan a ser  $-\pi/2$  y  $\pi/2$  en virtud de:

$$\nu_k \rightarrow \phi_k = k\pi; \quad \frac{\Delta\nu_m}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(\phi_k - \phi_{k-1}) = \frac{\pi}{2}$$

Llamando por conveniencia  $A = (1 - GT_iR)^2$  y  $B = 4GT_iR$  la integral se escribe

$$\frac{\Delta\nu_m}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{A + B\sin^2\phi} = \frac{\Delta\nu_m}{\sqrt{A^2 + AB}} = \frac{\Delta\nu_m}{1 - G^2(\nu_k)T_iR^2}$$

y, finalmente,

$$\bar{I}_{S_2} = I_{\text{esp}}(\nu_0) \frac{[G(\nu_k)T_i - 1] [1 + R_1T_iG(\nu_k)] T_2}{\ln G(\nu_k)T_i} \frac{1}{|1 - T_i^2R^2G^2(\nu_k)|}$$

<sup>1</sup>Hay una excepción: los láseres IR pueden tener una dependencia frecuencial en  $G$  más rápida que la debida al Fabry-Perot. Por tanto, para ellos no vale el desarrollo subsiguiente.

Aunque es habitual que uno de los espejos en los láseres sea totalmente reflector, podemos generalizar el tratamiento considerando una cierta transmitividad en el espejo 1. La expresión para la intensidad media por modo que sale a través del espejo 1, después de un cálculo simétrico del anterior, es la misma que acabamos de ver pero con las sustituciones  $R_1 \rightarrow R_2$  y  $T_2 \rightarrow T_1$ .

La potencia por unidad de área y por modo axial obtenida en total a través de los dos espejos del resonador, a partir de radiación espontánea amplificada es la suma:

$$\bar{I}_S(\nu_k) = \bar{I}_{S_1} + \bar{I}_{S_2} = I_{\text{esp}}(\nu_0) \frac{G(\nu_k) T_i - 1}{\ln G(\nu_k) T_i} \frac{T_1 + T_2 + T_i G(\nu_k) (R_2 T_1 + R_1 T_2)}{|1 - T_i^2 R^2 G^2(\nu_k)|}$$

en esta expresión queda en evidencia que cuando se alcanza la condición umbral,  $T_i G(\nu_k) R = 1$  la intensidad en el modo se hace infinita.

En el caso de amplificación en un sólo paso, como en los láseres de avalancha, la fórmula es también válida, particularizando a los siguientes valores:  $T_1 = T_2 = 1$  y  $R_1 = R_2 = 0$

$$\bar{I}_S = 2I_{\text{esp}} \frac{T_i G - 1}{\ln T_i G}$$

Aquí  $G$  es la ganancia en un paso en saturación. En régimen de onda viajera, con amplificación en un sólo sentido, habría que eliminar el factor dos.

Otra posibilidad es el resonador pasivo, cuya finura depende de que  $T = T_1 = T_2$  sea pequeña y  $R_1 = R_2 = R \simeq 1 - T$  lo mayor posible. En este caso,  $T_i \simeq 1$  y se cumple

$$\lim_{G \rightarrow 1} \frac{G - 1}{\ln G} = 1$$

Por tanto el ruido térmico extraído a través de los dos espejos sería

$$\bar{I}_S = 2I_{\text{esp}} \frac{T}{1 - R} = 2I_{\text{esp}}$$

que es independiente de la reflectividad de los espejos: la finura del Fabry-Perot aumenta con la reflectividad de los espejos, pero no así el ruido.

Para considerar un caso no extremo, plausible para un láser habitual, utilicemos los siguientes parámetros:  $G \simeq 1, T_i \simeq 1$  (ganancia por paso pequeña, pérdidas internas pequeñas). Entonces se puede usar la aproximación

$$\frac{T_i G - 1}{\ln T_i G} \simeq 1$$

y si, para simplificar, tomamos  $T = T_1 = T_2, R = R_1 = R_2$  obtenemos

$$\bar{I}(\nu_k) \simeq I_{\text{esp}} \frac{2T + 2TR T_i G}{|1 - T_i^2 R^2 G^2|} = I_{\text{esp}}(\nu_k) \frac{2T}{|1 - T_i R G|}$$

si en esta ecuación despejamos el denominador

$$1 - T_i R G(\nu_k) = \frac{I_{\text{esp}}(\nu_k)}{\bar{I}_S(\nu_k)} 2T$$

Por lo tanto, la desviación del umbral que corresponde a una salida  $\bar{I}_S(\nu_k)$  está dada por la razón entre la intensidad emitida espontáneamente en la frecuencia del modo y la emitida por el láser en este modo. Así cuanto mayor sea la intensidad estimulada respecto a la espontánea  $I_{\text{esp}}$  emitida en un modo, tanto más próximo se encuentra el amplificador a su umbral de saturación ( $RT_iG \simeq 1$ ), si bien la ganancia en realimentación  $T_iRG$  es siempre menor que la unidad.

En la práctica no se pueden evitar ciertas oscilaciones en el bombeo y en el estado estacionario real se presentará una serie de continuas correcciones alrededor del umbral durante el funcionamiento del láser.



# 15 Optimización de la salida de un láser

## 15.1. Introducción

En un láser la radiación se amplifica en función de la ganancia del medio amplificador, representado por la ganancia en pequeña señal  $\alpha_0$ , y de las pérdidas internas distribuidas, representadas por el coeficiente de absorción  $\alpha_i$ . Ahora bien, la salida de radiación introduce una pérdida externa adicional que se produce a través de los espejos del resonador y que debe ser cuidadosamente regulada para que se pueda extraer la mayor cantidad posible de radiación.

- Si la reflectividad de los espejos es demasiado baja (aunque  $T$  sería muy alta,  $T = 1 - R$ ) la realimentación es demasiado débil y la intensidad amplificada también, pudiendo en el caso extremo no llegar a superarse el umbral.
- Si por el contrario la reflectividad es demasiado alta, próxima al 100% la mayor parte de la radiación se disipa en las pérdidas internas, y cuanto mayor sea la reflectividad menor cantidad de radiación se transmitirá a través de los espejos.

Tiene que existir por lo tanto una reflectividad óptima en que se consiga el mejor balance de extracción de radiación del resonador. Este será el objeto de la aproximación que vamos a estudiar.

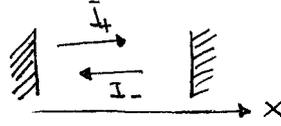
## 15.2. Ecuación de propagación

Vamos a suponer que se puede considerar al láser operando en régimen cuasiestacionario. Por lo tanto la inversión de población 11.5 será

$$n_i = \frac{1}{1 + I/I_0} \frac{\alpha_0}{\sigma_{21}}$$

donde  $\alpha_0 = \sigma_{21}(\nu_c) P\tau$  ( $\tau$  tiempo de vida de la inversión,  $\nu_c$  frecuencia del modo oscilante) es la ganancia en pequeña señal e  $I_0$  es la intensidad de saturación, dada por  $I_0^{[3]}$  (ec. 11.3) para un sistema a tres niveles.

Como usualmente los espejos del resonador son de distinta reflectividad consideraremos la intensidad dentro del resonador como la superposición de dos intensidades  $I_+$  e  $I_-$  que se propagan en sentidos opuestos ( $I_+$  en sentido de  $x$  creciente,  $I_-$  decreciente, figura 15.1). La intensidad total en el interior es entonces  $I = I_+ + I_-$ . Las ecuaciones de propagación son



**Figura 15.1:** Convenio de nombres para la intensidad en función del sentido de la propagación.

$$\frac{1}{I_+} \frac{dI_+}{dx} = -\frac{1}{I_-} \frac{dI_-}{dx} = n_i \sigma_{21} - \alpha_i$$

Vamos a introducir las variables adimensionales  $\beta_{\pm} \equiv I_{\pm}/I_0$ , con las cuales

$$n_i = \frac{\alpha_0}{\sigma_{21}} \frac{1}{1 + \beta_+ + \beta_-}$$

y las ecuaciones de propagación se escriben igual pero sustituyendo  $I_{\pm}$  por  $\beta_{\pm}$ . Operando sobre ellas

$$\beta_- \frac{d\beta_+}{dx} + \beta_+ \frac{d\beta_-}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} (\beta_+ \beta_-) = 0$$

es decir,  $\beta_+ \beta_- = \beta_0^2$  no es función de  $x$  y se pueden escribir las ecuaciones en función de  $\beta_+$ , que designaremos como  $y$  para abreviar, y de  $\beta_0^2$ .

$$\beta_- = \frac{\beta_0^2}{\beta_+}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\beta_+} \frac{d\beta_+}{dx} = \frac{\alpha_0}{1 + \beta_+ + \beta_0^2/\beta_+} - \alpha_i = \frac{\alpha_0 \beta_+}{\beta_+^2 + \beta_+ + \beta_0^2} - \alpha_i = \frac{-\alpha_i \beta_+^2 + (\alpha_0 - \alpha_i) \beta_+ - \alpha_i \beta_0^2}{\beta_+^2 + \beta_+ + \beta_0^2}$$

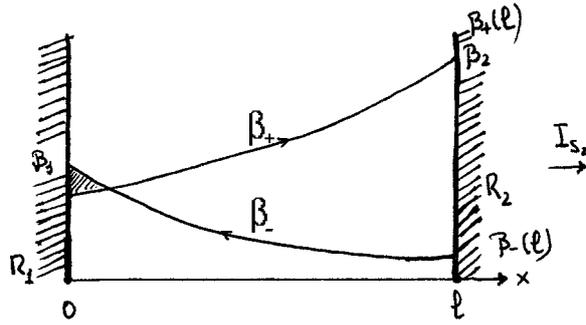
así, con el cambio de notación, queda la siguiente ecuación diferencial para la propagación con ganancia en el seno del Fabry-Perot

$$\frac{y^2 + y + \beta_0^2}{y [-\alpha_i y^2 + (\alpha_0 - \alpha_i) y - \alpha_i \beta_0^2]} dy = dx \quad (15.1)$$

Para obtener la intensidad normalizada,  $y$ , en cada punto en el sentido de las  $x$  crecientes hay que integrar. El cálculo explícito se puede encontrar en el apéndice ??, y conduce a la siguiente ecuación implícita en  $y \equiv \beta_+$  (??):

$$\alpha_i x + \ln \beta_+ + \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - 4\alpha_i^2 \beta_0^2}} \ln F(\beta_+) = \text{cte.}$$

La constante ha de ser determinada mediante las condiciones de contorno, que son las intensidades en los espejos (figura 15.2). Llamemos  $\beta_1 \equiv \beta_+(0)$  y  $\beta_2 \equiv \beta_+(l)$ , donde  $l$  es la longitud óptica del resonador.



**Figura 15.2:** Condiciones de contorno en los espejos. La intensidad se va amplificando en cada uno de los trayectos, aunque existe una pequeña transmitividad del espejo 1 que explica la no coincidencia de las intensidades  $\beta_+(0)$  y  $\beta_-(0)$ .

Entonces las ecuaciones en los extremos son

$$\ln \beta_1 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - 4\alpha_i^2 \beta_0^2}} \ln F(\beta_1) = \text{cte}$$

$$\alpha_i l + \ln \beta_2 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - 4\alpha_i^2 \beta_0^2}} \ln F(\beta_2) = \text{cte}$$

Restando la primera ecuación de la segunda obtenemos

$$\alpha_i l - \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - 4\alpha_i^2 \beta_0^2}} \ln \frac{F(\beta_1)}{F(\beta_2)}$$

Ahora llega el momento de introducir las condiciones de contorno.

Podemos asumir que como es usual en un láser  $R_1 = 1$  y el espejo de salida tiene una  $R_2 < 1$  que es lo que buscamos optimizar; con esto tendremos

$$\left. \begin{aligned} \beta_+(0) = \beta_-(0) = \beta_1 \\ \beta_+(0)\beta_-(0) = \beta_0^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_1 = \beta_0$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_-(l) = R_2 \beta_+(l) = R_2 \beta_2 \\ \beta_+(l)\beta_-(l) = \beta_0^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \beta_2^2 R_2 = \beta_0^2 \\ \beta_2 = \beta_0 / \sqrt{R_2} \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

es decir que  $\beta_1 = \beta_0 = \beta_2 \sqrt{R_2}$ . Podemos entonces eliminar  $\beta_0$  y  $\beta_1$  en la ecuación en función de  $\beta_2$ , es decir

$$\alpha_i l - \ln \sqrt{R_2} = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - 4\alpha_i^2 R_2 \beta_2^2}} \ln \frac{F(\sqrt{R_2} \beta_2)}{F(\beta_2)}$$

$$= \frac{\alpha_0 l}{\sqrt{(\alpha_0 l - \alpha_i l)^2 - 4(\alpha_i l)^2 R_2 \beta_2^2}} \ln \frac{F(\sqrt{R_2} \beta_2)}{F(\beta_2)}$$

En el logaritmo tenemos

$$\frac{F(\sqrt{R_2}\beta_2)}{F(\beta_2)} = \frac{\frac{\sqrt{(\alpha_0 l - \alpha_i l)^2 - 4(\alpha_i l)^2 R_2 \beta_2^2} + (\alpha_0 l - \alpha_i l - 2\alpha_i l \sqrt{R_2} \beta_2)}{\sqrt{(\alpha_0 l - \alpha_i l)^2 - 4(\alpha_i l)^2 R_2 \beta_2^2} - (\alpha_0 l - \alpha_i l - 2\alpha_i l \sqrt{R_2} \beta_2)}}{\frac{\sqrt{(\alpha_0 l - \alpha_i l)^2 - 4(\alpha_i l)^2 R_2 \beta_2^2} + (\alpha_0 l - \alpha_i l - 2\alpha_i l \beta_2)}{\sqrt{(\alpha_0 l - \alpha_i l)^2 - 4(\alpha_i l)^2 R_2 \beta_2^2} - (\alpha_0 l - \alpha_i l - 2\alpha_i l \beta_2)}}$$

La intensidad de salida es  $I_S = (1 - R_2)\beta_+(l)I_0$ ; o sea  $I_S = (1 - R_2)\beta_2 I_0$ .

La optimización de la salida supone hallar el máximo de  $I_S$  para la variable  $R_2$  con la ecuación de condición anterior. Este problema resuelto computacionalmente se puede parametrizar en función de los valores de  $\alpha_0 l$  y  $\alpha_i l$  en doble entrada. Los valores razonablemente esperables de  $\alpha_0 l$  pueden ir desde 1 hasta 10 y los de  $\alpha_i l$  desde 0.001 hasta 1.

Las dependencias de la ecuación son notablemente complicadas como se puede apreciar. Es por ello conveniente efectuar un cambio de variable

$$\frac{2\alpha_i}{\alpha_0 - \alpha_i} \beta_0 = \sin 2\lambda, \quad (15.3)$$

que es posible porque en la práctica  $2\alpha_i \beta_0 < \alpha_0 - \alpha_i$ .

Con esta nueva variable  $\lambda$  podemos escribir (recordemos que  $\beta_1 = \beta_0$ )

$$\begin{aligned} F(\beta_1) &= \frac{(\alpha_0 - \alpha_i) \sqrt{1 - \left(\frac{2\alpha_i \beta_0}{\alpha_0 - \alpha_i}\right)^2} + (\alpha_0 - \alpha_i) \left(1 - \frac{2\alpha_i \beta_0}{\alpha_0 - \alpha_i} \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)}{(\alpha_0 - \alpha_i) \sqrt{1 - \left(\frac{2\alpha_i \beta_0}{\alpha_0 - \alpha_i}\right)^2} - (\alpha_0 - \alpha_i) \left(1 - \frac{2\alpha_i \beta_0}{\alpha_0 - \alpha_i} \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)} \\ &= \frac{\cos 2\lambda + 1 - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda - 1 + \sin 2\lambda} = \frac{\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda + 1 - 2 \sin \lambda \cos \lambda}{\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda - 1 + 2 \sin \lambda \cos \lambda} \\ &= \frac{\cos \lambda - \sin \lambda}{-\sin \lambda + \cos \lambda} \cot \lambda = \cot \lambda \end{aligned}$$

Análogamente calculamos  $F(\beta_2)$  teniendo en cuenta que  $\beta_2 = \beta_0 / \sqrt{R_2}$ :

$$F(\beta_2) = \frac{\sqrt{R_2} \cos \lambda - \sin \lambda}{\cos \lambda - \sqrt{R_2} \sin \lambda} \cot \lambda = \frac{1 - \sqrt{R_2} \tan \lambda}{\sqrt{R_2} - \tan \lambda}$$

Por lo tanto

$$\frac{F(\beta_1)}{F(\beta_2)} = \frac{\cos \lambda - \sqrt{R_2} \sin \lambda}{\sqrt{R_2} \cos \lambda - \sin \lambda} = \frac{1 - \sqrt{R_2} \tan \lambda}{\sqrt{R_2} - \tan \lambda}$$

Del mismo modo

$$\frac{\alpha_0}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_i)^2 - (2\alpha_i \beta_0)^2}} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_i} \frac{1}{\cos 2\lambda}$$

La ecuación es queda entonces

$$\alpha_i l - \ln \sqrt{R_2} = \frac{\alpha_0 l}{\alpha_0 l - \alpha_i l} \frac{1}{\cos 2\lambda} \ln \frac{1 - \sqrt{R_2} \tan \lambda}{\sqrt{R_2} - \tan \lambda}$$

La máxima intensidad que se podría obtener sería, teóricamente, la que se produciría si las pérdidas se anulasen ( $\alpha_i = 0$ ) en la ecuación de la intensidad total, y en completa saturación ( $I \gg I_0$ )

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\alpha_0 I}{1 + I/I_0} - \alpha_i I \simeq \alpha_0 \frac{I/I_0}{1 + I/I_0} I_0 \longrightarrow \alpha_0 I_0 \quad (\text{cuando } I/I_0 \rightarrow \infty)$$

Por lo tanto la máxima intensidad dentro del resonador será

$$I_{\max} = \int_0^l I_0 \alpha_0 dx = I_0 \alpha_0 l, \quad \beta_{\max} = I_{\max}/I_0 = \alpha_0 l$$

Como la intensidad extraída es  $I_S = (1 - R_2)\beta_2 I_0$ , la *eficiencia de extracción*, que se define como  $\eta \equiv I_S/I_{\max}$ , es

$$\eta = \frac{(1 - R_2)\beta_2 I_0}{I_0 \alpha_0 l} = \beta_2 \frac{1 - R_2}{\alpha_0 l}$$

Por 15.2 y 15.3 entonces

$$\eta = \frac{1 - R_2}{\sqrt{R_2}} \frac{(\alpha_0 - \alpha_i) l}{2\alpha_i l^2} \sin 2\lambda$$

Esta ecuación junto con

$$\frac{\alpha_0 l}{\alpha_0 l - \alpha_i l} \frac{1}{\cos 2\lambda} \ln \frac{1 - \sqrt{R_2} \tan \lambda}{\sqrt{R_2} - \tan \lambda} + \ln \sqrt{R_2} - \alpha_i l = 0 \quad (15.4)$$

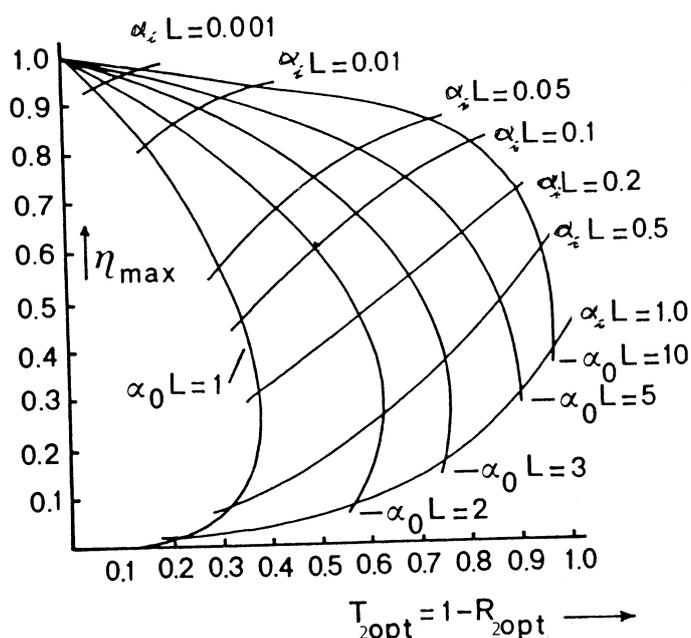
han de permitir calcular las condiciones para obtener la máxima eficiencia de extracción. En ellos  $\lambda$  es un parámetro cuyos valores están comprendidos entre 0 y  $\pi/4$ .

### 15.3. Solución numérica y estimación de las pérdidas

El cálculo del máximo condicionado de  $\eta$  correspondiente a la transmitancia óptima  $T_{2\text{Opt}} = 1 - R_{2\text{Opt}}$  del espejo de salida del resonador es un problema bastante complejo. Observemos que son la ganancia total  $\alpha_0 l$  en pequeña señal y las pérdidas internas totales  $\alpha_i l$  en el medio amplificador los dos parámetros físicos que determinan físicamente esta optimización. Con ambos valores obtenemos en abscisas la reflectividad óptima y en ordenadas la eficiencia que le corresponde, sobre la figura 15.3. Así es como se diseña el resonador de un láser.

Medidos o estimados  $\alpha_0 l$  y  $\alpha_i l$  lo más práctico es resolver numéricamente el problema. Así, podemos dividir en  $N$  partes iguales el intervalo  $[0, \pi/4]$  de valores de  $\lambda$  haciendo por ejemplo

$$\lambda_n = \frac{n}{N} \frac{\pi}{4}, \quad n = 0, 1 \dots N$$



**Figura 15.3:**  $T_{2,\text{opt}} = 1 - R_{2,\text{opt}}$  ( $L$ : longitud del medio).

Para cada uno de estos  $\lambda_n$  se resuelve numéricamente 15.4 obteniéndose  $R_{2n}(\lambda_n)$ . Con estos valores de  $R_2$  y de  $\lambda$  calculamos con la ecuación de  $\eta$  los valores  $\eta_n(R_{2n}, \lambda_n)$ , de los cuales habrá uno que será el mayor de todos y corresponderá a la eficiencia máxima  $\eta_{\text{max}}$  para una transmitancia óptima  $T_{2\text{Opt}}$  del espejo de salida.

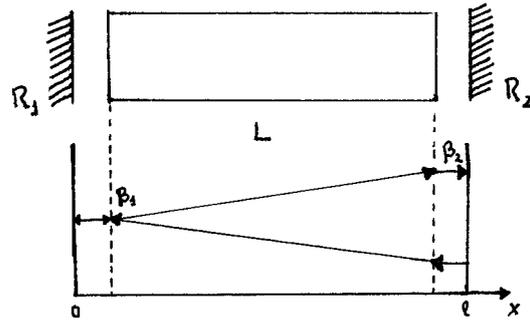
Por este método se puede construir un diagrama (figura 15.3) en el que  $\eta_{\text{max}}$  y  $T_{2\text{Opt}}$  están en ordenadas y abscisas respectivamente, y en el que aparecen dibujadas las curvas  $\alpha_0 l = \text{cte}$  y  $\alpha_i l = \text{cte}$  para un número significativo de valores estos parámetros. El punto en que se cortan las curvas correspondientes a los valores concretos de  $\alpha_0 l$  y  $\alpha_i l$  da  $\eta_{\text{max}}$  y  $T_{2\text{Opt}}$ . Para conocer la intensidad máxima de salida,  $I_{S\text{max}}$  es necesario medir también  $I_0$ , pues

$$I_{S\text{max}} = I_0 \alpha_0 l \eta_{\text{max}}.$$

Obtener una estimación de las pérdidas internas es en general bastante difícil. Pero como las curvas no son extraordinariamente sensibles a las pérdidas  $\alpha_i l$ , podemos hacer una aproximación. Se puede pensar que la mayoría de las pérdidas son debidas a difracción. Si por ejemplo el láser va a operar en el modo  $\text{TEM}_{00}$ , en un caso de simetría cilíndrica el modo transversal fundamental es el mismo que para el perfil cuadrado (modo gaussiano) y entonces

$$I = I_0 \exp(-2r/w^2).$$

Con este perfil la potencia total en el modo es



**Figura 15.4:** Situación en la que el medio amplificador no ocupa la totalidad de la cavidad.

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} I d^2S = 2\pi \int_0^{+\infty} I_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) r dr = \frac{I_0}{2} \pi w^2$$

Como la difracción surge de limitar el tamaño del medio, podemos estimar las pérdidas evaluando la energía comprendida en las colas laterales de la distribución transversa, que no pasan. Si el radio del medio es  $R$  la potencia que el modo tiene fuera de ese radio es

$$\Delta W = \int_0^{2\pi} \int_R^{+\infty} I d^2S = \frac{I_0}{2} \pi w^2 \exp\left(-\frac{2R^2}{w^2}\right)$$

Por lo tanto

$$\alpha_{il} \simeq \frac{\Delta W}{W} = \exp\left(-\frac{2R^2}{w^2}\right)$$

Donde  $w$  es la cintura de haz del modo transversa de la radiación, fijada por la geometría del resonador. Esta estimación suele ser buena. Si el medio es un gas, es transparente. Si es un sólido se busca buena calidad óptica. Como las superficies se recubren de material antirreflectante, tiene sentido pensar que las mayores pérdidas son las atribuibles a la difracción.

Las curvas que hemos estudiado son de amplia validez, aunque en algunos casos toman una forma diferente, como en el resonador de anillo.

Es de señalar que si el medio amplificador no rellena completamente el espacio entre los espejos del resonador entonces la longitud  $l$  que aparece en cálculos precedentes es la longitud  $L$  del medio amplificador pues entre el medio y los espejos asumimos que la radiación no cambia de intensidad (figura 15.4).



## 16 El láser de régimen de bombeo pulsado cuasiestacionario

La dinámica del láser obedece en su forma más general a las ecuaciones semiclásicas, en las que se tiene en cuenta no solamente la intensidad de la luz, la inversión de población y el campo, sino también la polarización atómica. La polarización está relacionada con la inversión de población, y está acoplada al campo. La inversión está acoplada al campo y a la polarización, y el campo solamente a la polarización. Las tres ecuaciones para estas variables se llaman *ecuaciones de Maxwell-Block* y se plantean no sólo en el tiempo, sino en el espacio: son del tipo  $(3+1)$ . Las dinámicas descritas por estas ecuaciones constituyen un activo campo de investigación. Como no podemos abordar este nivel de dificultad, vamos a estudiar algunos regímenes sencillos.

Por ejemplo, el bombeo, aunque pueda cambiar con el tiempo, supondremos que en forma de pulso tiene mayor anchura que el tiempo de vida de la inversión de población. En ese caso es aplicable la aproximación adiabática que discutimos.

Suponemos que el bombeo de poblaciones es creciente hasta alcanzar un máximo, para después decrecer hasta anularse. Esto es lo que sería un régimen de *bombeo pulsado*, provocando a su vez un pulso de emisión láser (la evolución del bombeo, la inversión de población y la intensidad de salida pueden verse esquemáticamente en la figura 16.1).

1. Durante la **etapa de crecimiento del bombeo** y hasta que se alcanza el umbral, la ecuación de la inversión es (11.1 sin el término de erosión debido a la presencia de radiación estimulada)

$$\frac{dn_i}{dt} = -\frac{n_i}{\tau} + P(t)$$

que se integra con la condición inicial  $n_i(0) = 0$  (situación de equilibrio térmico):

$$n_i(t) = \int_0^t P(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

la inversión de población crece hasta que se produce la emisión láser, es decir, hasta que en  $t_u$  se alcanza la inversión umbral:  $n_i(t_u) = n_{iu}$ ,

$$n_{iu} = \int_0^{t_u} P(t') \exp\left(-\frac{t_u-t'}{\tau}\right) dt' = -\frac{1}{\sigma_{21}L} (\ln R - \alpha_i L)$$

Desde esta ecuación se puede obtener  $t_u$  en principio si se conoce la forma de  $P(t)$ . No obstante y en caso de que los tiempos implicados en el fenómeno y en particular  $t_u$  sean mucho menores que  $\tau$  podemos tomar

$$\exp\left(-\frac{t_u-t'}{\tau}\right) \simeq 1$$

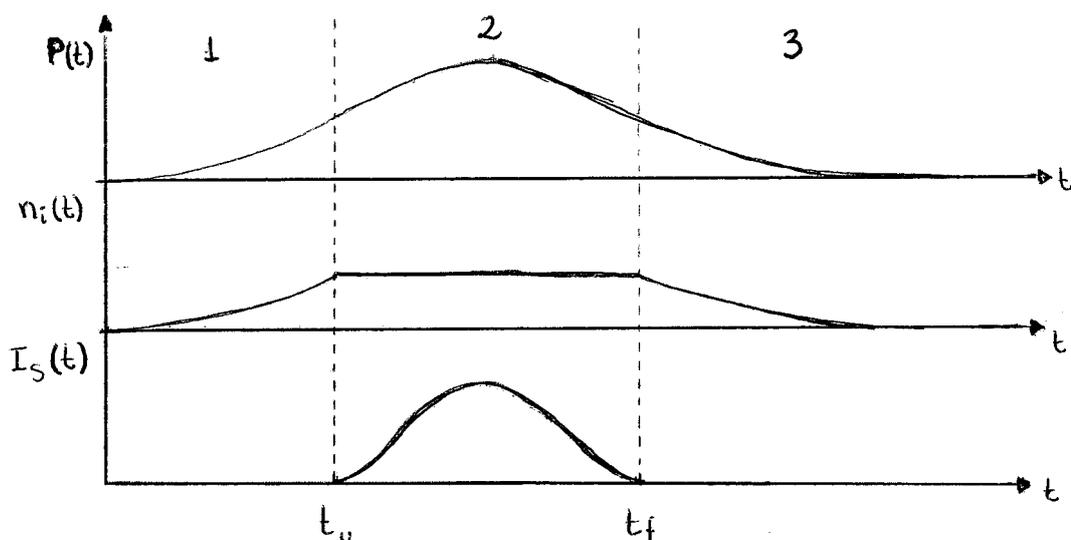


Figura 16.1:  $P(t), n_i(t), I_{S_2}(t)$

con lo cual

$$n_{iu} \simeq \int_0^{t_u} P(t') dt'$$

y por lo tanto el tiempo  $t_u$  que se tarda en alcanzar el umbral no dependería de la forma concreta del bombeo, sino sólo de la energía necesaria para acumular  $n_{iu}$ , y por lo tanto sería una buena medida de ella.

2. Una vez **alcanzado el umbral** la inversión se estabiliza. Si el proceso es cuasiestacionario

$$\frac{dn_{iu}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left( 1 + \frac{I}{I_0} \right) n_{iu} + P(t) \simeq 0$$

entonces

$$I = I_0 \left( \frac{\tau P(t)}{n_{iu}} - 1 \right)$$

y la intensidad de salida es

$$\begin{aligned} I_{S_2} &= (1 - R_2) I_+(l) \\ &= \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \left( \frac{\tau P(t)}{n_{iu}} - 1 \right) \\ &= I_0 \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \left( \frac{\tau P(t) \sigma_{21} L}{\alpha_i l - \ln R} - 1 \right) \\ &= I_0 \frac{1 - R_2}{1 + R_2} \left( \frac{\alpha_0(t) l}{\alpha_i l - \ln R} - 1 \right) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $R = \sqrt{R_1 R_2}$ , que la intensidad total es la suma de las que transcurren en cada sentido,

$$I = I_+(l) + I_-(l) = (1 + R_2) I_+(l)$$

y que

$$n_{iu} = \frac{\alpha_i l - \ln R}{\sigma_{21} l}$$

con  $\alpha_0(t) = \tau \sigma_{21} P(t)$ .

3. Esto es válido para el intervalo de tiempo en el que estamos por encima del umbral y hay emisión láser. ¿Cuándo terminará ésta?. Para un  $t_f$  tal que  $P(t_f) = n_{iu}/\tau$ , es decir, cuando **el bombeo empieza a dejar de compensar las pérdidas**. La ecuación es la misma que en la fase inicial, pero con la condición inicial  $n_i(t_f) = n_{iu}$ . Así,

$$n_i(t) = n_{iu} \exp\left(-\frac{t-t_f}{\tau}\right) + \int_{t_f}^t P(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'.$$

En cuanto el pulso de bombeo se anula, sólo queda la evolución exponencial de la inversión con su tiempo de relajación  $\tau$  propio.

Todo este análisis, si bien es usualmente cualitativamente correcto, sólo lo es cuantitativamente si se puede aplicar la aproximación adiabática que permite definir el tiempo de relajación  $\tau$  y el proceso puede ser considerado cuasiestacionario; por ello es por lo que tampoco se ha usado la ecuación de los fotones y sólo se ha empleado la condición umbral.

Recordemos las condiciones simplificadoras cuyo cumplimiento mejora la validez del análisis:

- $R_2$  debe ser muy cercano a uno. Esto da la homogeneidad longitudinal.
- Anchura de pulso del bombeo mucho mayor que el tiempo de relajación de la inversión.
- Homogeneidad de la intensidad en todo el resonador. Aunque el bombeo sea bastante uniforme en sentido transversal, la forma de los modos implica que la inversión de población se desgasta menos lejos del eje. Ésta es la hipótesis menos conforme con la realidad.



# 17 Dinámica del láser

## 17.1. Ecuación de balance para la radiación

Supongamos que la densidad de fotones es  $n_f(x, t)$  y la intensidad en ese punto e instante  $I(x, t)$ . Si denotamos por  $t_r$  el tiempo de retorno, el tiempo después de un viaje de ida y vuelta entre los espejos del resonador para el que los fotones ocupan el mismo punto y se mueven en la misma dirección:

$$I(x, t + t_r) = I(x, t) T_i^2 G^2 R_1 R_2$$

como  $t_r = 2l/c$ , la longitud óptica del amplificador es  $l = d + (\mu - 1)L$ , su coeficiente de transmisión interna vale  $T_i = \exp(-\alpha_i L)$  y su reflectividad cuadrática media es  $R = \sqrt{R_1 R_2}$  (ver figura 17.1), se tiene que el incremento de la intensidad en el tiempo  $t_r$  es

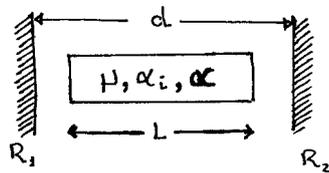
$$\Delta I = I(x, t + t_r) - I(x, t) = (R^2 T_i^2 G^2 - 1) I(x, t)$$

y si el fenómeno dinámico que deseamos estudiar es lo suficientemente lento como para que los cambios apreciables de la intensidad se produzcan en tiempos mucho más largos que  $t_r$  ( $t_c \gg t_r$ ) entonces

$$\frac{\partial I}{\partial t} \simeq \frac{\Delta I}{t_r} = \frac{1}{t_r} (R^2 T_i^2 G^2 - 1) I(x, t)$$

La intensidad está obedeciendo una ecuación de balance. Si el bombeo produce una inversión de población bastante uniforme, y el láser opera no muy lejos del umbral (como es usual), esta uniformidad se refleja en  $n_{iu}$ , de manera que la ganancia es  $\alpha \simeq \sigma_{21} n_{iu}$  y  $G = \exp \alpha L$ , es decir

$$(RT_i G)^2 = \exp 2[\alpha L - (\alpha_i L - \ln R)] = \exp 2(\alpha L - \gamma) \simeq 1 + 2(\alpha L - \gamma)$$



**Figura 17.1:** Características del resonador y su medio activo relevantes para el estudio de la dinámica temporal del láser.

donde la última igualdad es bajo la hipótesis  $\alpha L - \gamma \simeq 0$ . Recuérdese que  $\gamma = \alpha_i L - \ln R = l/(ct_c)$ , el *coeficiente de pérdida* se puede considerar casi nulo cerca del umbral. Por ello

$$\frac{\partial I}{\partial t} \simeq \frac{2(\alpha L - \gamma)}{t_r} I(x, t)$$

Aquí  $2\gamma/t_r = 1/t_c$  y si ahora promediamos sobre todo el volumen del resonador, calculando

$$I(t) = \frac{1}{V} \int_V I(x, t) dV$$

podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{dI}{dt} = \left( \frac{2\alpha L}{t_r} - \frac{1}{t_c} \right) I = \left( \frac{L}{l} c \sigma_{21} n_i - \frac{1}{t_c} \right) I$$

esta ecuación relaciona la intensidad con la inversión de población. Una de las condiciones es  $\alpha L - \gamma \simeq 0$ , que se cumple fácilmente cerca del umbral. La otra, que  $t_c \gg t_r$  implica que  $2\gamma \ll 1$ , es decir, que las pérdidas son pequeñas. Físicamente, si el fenómeno se desarrolla lo suficientemente lento en comparación con el tiempo de retorno todo ocurre como si la radiación no se estuviera moviendo. La intensidad dentro de la cavidad la estamos tomando como algo inmóvil. Bajo estas condiciones, como vemos, la intensidad obedece a una ecuación de balance, una ecuación ordinaria como la de la inversión  $n_i$ , y acoplada a ésta. Si utilizamos la densidad de flujo de fotones  $\phi = I/h\nu_0$  en vez de la intensidad  $I$  las dos ecuaciones básicas de la evolución temporal del amplificador resonante serán, por ejemplo (tres niveles):

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} &= - \left( 1 + \frac{g_1}{g_2} \right) \sigma_{21} n_i \phi - \frac{n_i}{\tau} + P \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{L}{l} c \sigma_{21} n_i \phi - \frac{\phi}{t_c} + \frac{n_i c}{\tau} f \end{aligned} \quad (17.1)$$

en los casos usuales como el que nosotros consideraremos en el que el medio amplificador no llena todo el volumen del resonador la radiación ha de ser estudiada a través de la intensidad  $I$  o la densidad de flujo  $\phi$  ya que mientras la densidad de fotones cambia con el índice de refracción del medio estas otras magnitudes son invariantes en las fronteras de cambio de índice cuando están en ángulo de Brewster o tienen un tratamiento antirreflectante. Se puede esquivar este inconveniente definiendo la *densidad de cuantos efectiva* o *promedio*,  $q \equiv \phi/c$ , como si no existieran las discontinuidades en el interior del resonador, ya que la posición de los fotones ahora no tiene ningún papel.

Como de la radiación espontánea una pequeña fracción es la semilla que acaba generando el campo amplificado, hemos incluido esa pequeña contribución del ruido cuántico (con  $f = \eta \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \frac{\delta\nu}{\Delta\nu}$ ,  $\eta$  es la eficiencia cuántica, ver estudio del ruido cuántico) en la segunda ecuación. En efecto, sin esta semilla, inicialmente  $\phi = 0$  y no se inicia el fenómeno de amplificación. Esto es especialmente obvio cuando se realiza la integración numérica de las ecuaciones.

## 17.2. Escalamiento de las ecuaciones de balance

Las ecuaciones de balance 17.1 pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= -kn_iq - \frac{n_i}{\tau} + P \\ \frac{dq}{dt} &= k'n_iq - \frac{q}{t_c} + f\frac{n_i}{\tau}\end{aligned}$$

donde  $k$  se define de distinto modo en función del número de niveles del esquema láser:

$$k^{[3]} \equiv \left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right) \sigma_{21}c, \quad k^{[4]} \equiv \sigma_{21}c \quad (17.2)$$

Por su parte,  $k' = Lc\sigma_{21}/l$ . Como  $t_c$  suele ser el tiempo más corto, podemos escalar  $t$  con  $t_c$  (dado por 9.7), definiendo  $T = t/t_c$ . Así las cosas,

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dT} &= -kt_cn_iq - \frac{t_c}{\tau}n_i + Pt_c \\ \frac{dq}{dT} &= k't_cn_iq - q + f\frac{t_c}{\tau}n_i\end{aligned}$$

en el umbral en estado estacionario  $q = 0$ ,  $dn_i/dt = 0$  y  $dq/dt = 0$  y como  $f \ll 1$  tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{t_c}{\tau}n_{iu} + P_u t_c &= 0 \rightarrow \frac{1}{\tau}n_{iu} = P_u \\ k't_cn_{iu} - 1 &= 0 \rightarrow n_{iu} = \frac{1}{k't_c}\end{aligned}$$

Podemos ahora escalar la población al umbral,  $N_i = n_i/n_{iu}$ , la densidad efectiva de fotones como  $kt_cq = Q$  y llamar  $m = P/P_u$ . Con esto las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned}\frac{dN_i}{dT} &= -QN_i - \frac{t_c}{\tau}N_i + \frac{t_c}{\tau}m \\ \frac{dQ}{dT} &= QN_i - Q + f\frac{k}{k'}\frac{t_c}{\tau}N_i\end{aligned}$$

Vemos pues que los únicos parámetros relevantes en estas ecuaciones son  $t_c/\tau$  y  $m$ .

Con estas ecuaciones en el umbral  $N_{iu} = 1, m_u = 1, Q_u = 0$ . Esta es una solución estacionaria conocida como *solución no láser* y cuya estabilidad vamos a estudiar a continuación despreciando la pequeña contribución de la emisión espontánea al campo, pues  $f \ll 1$  y  $k \simeq k'$ .

## 17.3. Estabilidad de la solución estacionaria

Ahora nos interesa la solución estacionaria (derivadas nulas en el sistema de ecuaciones), pero con emisión láser ( $Q \neq 0$ ):

$$\begin{aligned}-Q_0N_{i0} - \frac{t_c}{\tau}N_{i0} + \frac{t_c}{\tau}m &= 0 \\ QN_{i0} - Q_0 &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto  $N_{i0} = 1 = N_{iu}$ , y  $Q_0 = (m-1)t_c/\tau$ . Para estudiar la estabilidad de estas ecuaciones no lineales debemos escoger como punto fijo la solución estacionaria e introducir una pequeña perturbación respecto a ella

$$\begin{aligned} N_i &= N_{i0} + n_1 = 1 + n_1 \\ Q &= Q_0 + q_1 \end{aligned}$$

sustituyendo la solución perturbada en las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dT} &= -(Q_0 + q_1)(1 + n_1) - \frac{t_c}{\tau}(1 + n_1) + \frac{t_c}{\tau}m \\ \frac{dq_1}{dT} &= (Q_0 + q_1)(1 + n_1) - Q_0 - q_1 \end{aligned}$$

si  $n_1$  y  $q_1$  son verdaderamente una pequeña perturbación podemos linealizar el sistema despreciando  $n_1q_1$

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dT} &= -q_1 - \frac{t_c}{\tau}n_1 - Q_0n_1 \\ \frac{dq_1}{dT} &= q_1 + Q_0n_1 - q_1 = Q_0n_1 \end{aligned}$$

y sustituyendo  $Q_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dT} &= -q_1 + \frac{t_c}{\tau}mn_1 \\ \frac{dq_1}{dT} &= \frac{t_c}{\tau}(m-1)n_1. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir, utilizando la matriz de Lyapounov del sistema lineal, como

$$\frac{d}{dT} \begin{pmatrix} n_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_cm/\tau & -1 \\ t_c(m-1)/\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} n_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

las perturbaciones soluciones de este sistema son de la forma

$$\begin{pmatrix} n_1(t) \\ q_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1(0) \\ q_1(0) \end{pmatrix} \exp -\lambda T$$

donde los exponentes de Lyapounov  $\lambda$  vienen dados por la solución de la ecuación

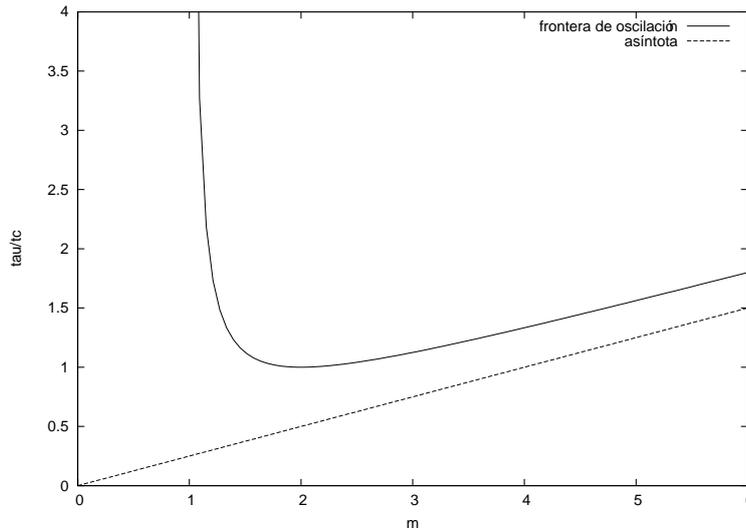
$$|\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}| = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} -t_cm/\tau - \lambda & -1 \\ t_c(m-1)/\tau & -\lambda \end{vmatrix}$$

o lo que es lo mismo,

$$\lambda^2 + \frac{t_c}{\tau}m\lambda + \frac{t_c}{\tau}(m-1) = 0$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_{\pm} = \gamma_a \pm i\omega = -\frac{1}{2}\frac{t_c}{\tau}m \pm i\sqrt{\frac{t_c}{\tau}(m-1) - \left(\frac{t_c}{2\tau}m\right)^2}$$



**Figura 17.2:** Plano de estabilidad para la oscilación láser en función del bombeo y los tiempos involucrados. Por encima de la curva se cumple la condición para la existencia de inestabilidad oscilante.

Observamos que la parte real de los exponentes de Lyapounov es negativa, lo que indica que la solución estacionaria es estable. No obstante, eso no impide que se puedan desarrollar en régimen transitorio oscilaciones amortiguadas exponencialmente con la constante de tiempo

$$\gamma_a = \frac{1}{2} \frac{m}{\tau}$$

y la frecuencia

$$\omega = \frac{1}{t_c} \sqrt{\frac{t_c}{\tau} (m-1) - \left(\frac{t_c}{2\tau} m\right)^2}$$

para que esto ocurra,  $\omega$  debe ser real: el argumento de la raíz debe ser positivo. Dicho de otro modo:

$$\frac{\tau}{t_c} > \frac{m^2}{4(m-1)}$$

La zona de inestabilidad oscilante en el plano  $(\tau/t_c, m)$  es la que está por encima de la curva representada en la figura 17.2. El mínimo de dicha curva

$$\frac{d}{dm} \left( \frac{\tau}{t_c} \right) = \frac{8m(m-1) - 4m^2}{16(m-1)^2} = 0 \quad (m_{\min}, (\tau/t_c)_{\min}) = (2, 1)$$

por lo tanto, el mayor valor de  $t_c$  compatible con las oscilaciones de relajación es justamente  $t_c = \tau$ . Si se hace  $t_c$  mayor que este valor, se suprimen las oscilaciones de relajación. Otra forma de suprimirlas consiste en aproximar el bombeo al valor umbral ( $m = P/P_u$ ).

Cuando el tiempo de relajación de la inversión de población es muy pequeño es difícil tener oscilaciones de relajación. En el láser de Nd-YAG y en el de rubí,  $\tau$  toma valores muy altos (0.2 ms y 1 ms, respectivamente), así que es más fácil tener las oscilaciones de relajación que en uno de colorantes, donde  $\tau \simeq t_c$ .

Como la pulsación de las oscilaciones es

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2\tau} \sqrt{4\frac{\tau}{t_c} (Pk't_c - 1) - (Pk't_c\tau)^2} \\ &= \frac{1}{2\tau} \sqrt{4\frac{\tau}{t_c} \left(\frac{P}{P_u}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\tau} \sqrt{4\frac{\tau}{t_c} (m - 1) - m^2}\end{aligned}$$

las curvas de equifrecuencia obedecerán a la ecuación

$$\frac{\tau}{t_c} = \frac{(2\tau\omega)^2 + m^2}{4(m - 1)}$$

de ella podemos obtener la potencia de bombeo que daría lugar a una determinada frecuencia de oscilación. En efecto, podemos transformarla en

$$m^2 - 4\frac{\tau}{t_c}m - 4\frac{\tau}{t_c} + (2\tau\omega)^2 = 0$$

cuyas soluciones son

$$m_{\pm} = 2 \left( \frac{\tau}{t_c} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau}{t_c}\right)^2 - \frac{\tau}{t_c} - (\omega\tau)^2} \right)$$

si hacemos  $\omega = 0$  obtenemos para el  $\tau/t_c$  escogido los puntos de corte con la frontera de estabilidad, es decir, el intervalo en el que habría oscilaciones de relajación al cambiar el bombeo. Estos valores serían

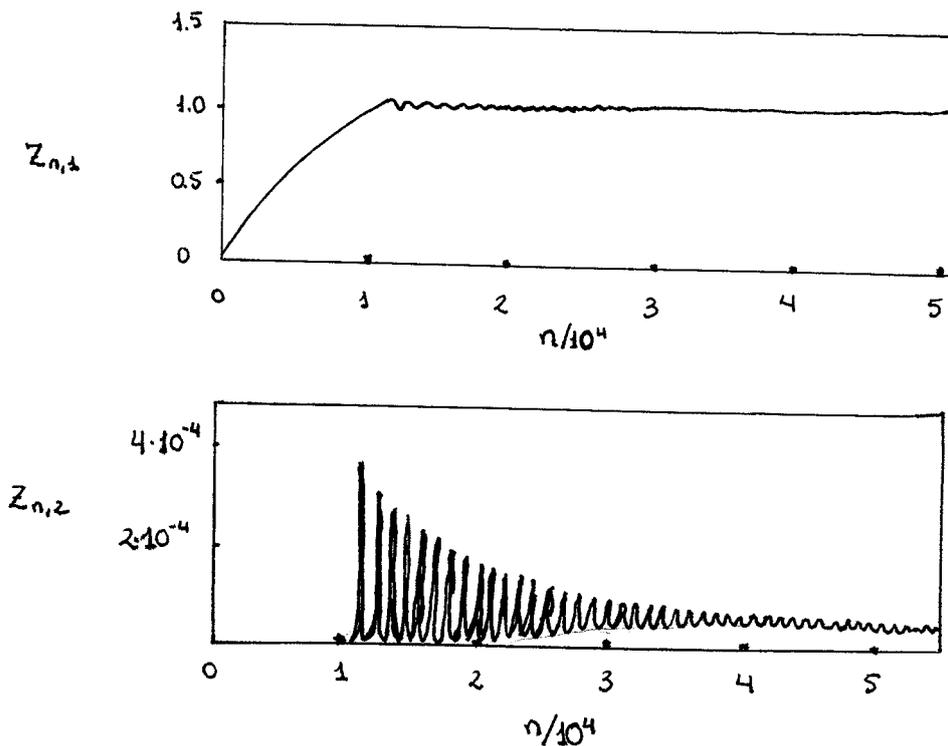
$$(m_{\pm})_{\text{est}} = 2\frac{\tau}{t_c} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{t_c}{\tau}} \right) \simeq 2\frac{\tau}{t_c} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{t_c}{2\tau} \right) \right] \quad (t_c \ll \tau)$$

Por otra parte, las oscilaciones son amortiguadas, con un coeficiente de amortiguamiento

$$\gamma_a = \frac{pk't_c}{2} = \frac{m}{2\tau}$$

el amortiguamiento es crítico justo en la frontera de oscilación; por lo tanto, para un valor de  $\tau/t_c$  dado los dos posibles amortiguamientos críticos serán

$$(\gamma_a)_{\text{crit}} = \frac{1}{t_c} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{t_c}{\tau}} \right).$$



**Figura 17.3:** Arriba, la inversión de población se estabiliza en cuanto llega al umbral.  $Z_{1000,1} = 0.142$ . Abajo, las oscilaciones de luz.  $Z_{1000,2} = 1.6 \times 10^{-11}$ .  $n$  representa el número de iteración en el esquema numérico, con lo cual las abscisas son el tiempo medido en número de pasos.

**Ejemplo** inestabilidad oscilante y oscilaciones de relajación. En la figura 17.3 se muestra la solución numérica para la inversión de población ( $Z_{n,1}$ ) y las oscilaciones de luz ( $Z_{n,2}$ ) del sistema de ecuaciones dinámicas con los siguientes parámetros:  $\mu = t_c/\tau = 10^{-4}$ ,  $m = 1.5$  (bombeo normalizado al umbral),  $F = 10^{-6}$  (fracción de emisión espontánea que se incorpora al campo del láser).

Con

$$y = \sqrt{-\left(\frac{m\mu}{2}\right)^2 + (m-1)\mu}$$

$y = 7.1 \times 10^{-3}$ . El período es  $T = 2\pi/y = 888.6$ .  $\gamma = \mu m/2$ ,  $\tau = \gamma^{-1} = 1.33 \times 10^4$ .

Con  $x_0 = -10^{-3}$  y  $x_1 = 0$  la matriz diferencial

$$D(t, x) = \begin{pmatrix} -x_0(x_1 + \mu) + \mu m \\ x_1(x_0 - 1) + F\mu x_0 \end{pmatrix}$$

permite obtener las gráficas citadas mediante un integrador Runge-Kutta de paso fijo ( $n = 0 \dots 10^5$ ).

En las gráficas se aprecian las oscilaciones de relajación de la intensidad y cómo

la inversión de población ( $Z_{n,1}$ ) realiza pequeñas excursiones alrededor el umbral ( $Z_{n,1} = 1$ ).

#### 17.4. La condición umbral en las oscilaciones de relajación

La interpretación completa de los resultados precedentes requiere tener en cuenta que la potencia umbral  $P_u$  no es independiente de  $t_c$  pues

$$P_u = \frac{1}{k't_c\tau} = \frac{l}{c\sigma_{21}\tau t_c L}$$

esto significa que el láser se sitúa en un punto concreto de la curva isofrecuencia

$$\frac{\tau}{t_c} = \frac{(2\tau\omega)^2 + (P/P_u)^2}{4(P/P_u - 1)}$$

este punto corresponde a un bombeo que se obtiene al despejar  $P$  en la ecuación de la isofrecuencia, quedando

$$P = 2P_u \frac{c}{t_c} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{t_c}{\tau} - (\omega t_c)^2} \right)$$

y sustituyendo  $P_u$

$$P = \frac{2l}{L} \frac{1}{t_c c \sigma_{21}} \left( \frac{1}{t_c} \pm \sqrt{\frac{1}{t_c^2} - \frac{1}{\tau t_c} - \omega^2} \right)$$

A la vista de la fórmula anterior, se puede obtener la misma frecuencia de oscilación con dos valores distintos del bombeo. Por otra parte, también el amortiguamiento  $\gamma_a$  depende del bombeo, pues

$$\gamma_a = \frac{Pk't_c}{2} = \frac{1}{2} \frac{L}{l} c \sigma_{21} t_c P$$

donde sustituyendo  $P$  se obtiene

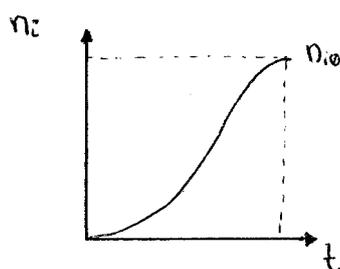
$$\gamma_a = \frac{1}{t_c} \pm \sqrt{\frac{1}{t_c^2} - \frac{1}{\tau t_c} - \omega^2}$$

en esta ecuación podemos obtener el tiempo de vida del fotón en la cavidad, en función de  $\gamma_a$  y  $\omega$ :

$$t_c = \frac{2\gamma_a - \tau^{-1}}{\omega^2 + \gamma_a^2}$$

Por lo tanto, midiendo la oscilación de relajación podemos obtener  $t_c$ . Ésta es una forma bastante precisa de estimar las pérdidas  $\alpha$  del láser, que son en general de difícil evaluación. Así, como

$$t_c = \frac{l}{c(\alpha_i L - \ln R)}$$



**Figura 17.4:** Mientras no hay emisión láser la inversión de población crece al ritmo del bombeo.

tenemos

$$\alpha_i = \frac{1}{L} \left( \frac{l}{ct_c} + \ln R \right)$$

por lo que el conocimiento de  $t_c$  obtenido de la oscilación de relajación nos permite evaluar el coeficiente de pérdidas  $\alpha_i$ .

## 17.5. El láser de amplificador resonante en régimen de pulso gigante

Para que el amplificador óptico resonante funcione como tal, es preciso que el bombeo sea suficiente para alcanzar la inversión de población umbral y se cumpla  $RT_iG = 1$ . Con ese fin usualmente se provoca una disminución de las pérdidas para que aumente  $T_i$  y se escoge una reflectividad  $R$  suficiente para llegar a la condición umbral con la ganancia disponible en un paso. Pero puede ocurrir que dispongamos de una potente capacidad de bombeo capaz de llevar rápidamente el resonador al umbral y superarlo ampliamente antes de que tenga tiempo de crecer el campo que se amplifica. Si esto llega a ocurrir, la gran inversión alcanzada produce un incremento cada vez más rápido de campo que al principio crece exponencialmente, obteniéndose la rápida desexcitación de la inversión de población acumulada y generándose un potente pulso llamado de *conmutación de ganancia*. Otra forma de acumular la inversión de población producida por el bombeo consiste en eliminar la realimentación que produce la reflexión en los espejos del resonador. Esto se puede conseguir fácilmente desalineando ostensiblemente uno de los espejos, o bien introduciendo un sistema de transmisión variable entre el medio amplificador y el espejo. Cuando el sistema sea opaco, la transmisión interna será muy baja,  $T_i = T_0$  y  $RT_iG \ll 1$ .

Como no hay emisión láser la población se acumula al ritmo del bombeo (figura 17.4); mientras éste se efectúe en tiempos cortos comparados con  $\tau$  como ya hemos estudiado

$$n_i = \int_0^t P(t') \exp\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' \simeq \int_0^t P(t') dt'$$

Cuando se haya alcanzado la inversión de población  $n_{i0}$  más alta posible, se conmuta rápidamente la transmisión interna de la opacidad a la transparencia, o bien se realinea

el espejo desalineado (por ejemplo, haciéndolo girar con una elevada velocidad angular). Al hacer esto el láser pasa rápidamente a estar muy por encima del umbral,  $RT_iG \gg 1$ .

En esta situación el campo crece rápidamente en forma exponencial a costa de la inversión de población acumulada. El proceso puede ser tan rápido que inmediatamente genere un pulso enorme alimentado por el exceso acumulado de inversión de población. Este mecanismo se conoce como *conmutación de pérdidas* o del factor de calidad  $Q$  del resonador (*Q-switching*). En el tiempo en que se generan estos pulsos gigantes se pueden dejar de lado las aportaciones y las desexcitaciones producidas por el bombeo y los procesos incoherentes. Las ecuaciones del proceso serán entonces<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{dn_i}{dt} &= -kn_iq \\ \frac{dq}{dt} &= k'n_iq - \frac{q}{t_c}\end{aligned}$$

en estas ecuaciones  $t_c$  es el tiempo de vida del fotón en el resonador vacío, y  $k', k$  son las dadas en la ec. 17.2 ( $k = k^{[3]}$  ó  $k^{[4]}$  en función del esquema).

El pulso de radiación generado tras el proceso de conmutación posee inevitablemente un máximo, dado por  $dq/dt = 0$ , que fija

$$k'n_i - \frac{1}{t_c} = 0$$

Por lo tanto la inversión de población  $n_i$  en el pico de radiación es

$$n_{ip} = \frac{1}{k't_c} = \frac{1}{L\sigma_{21}} (\alpha_i - \ln R) = n_{iu}$$

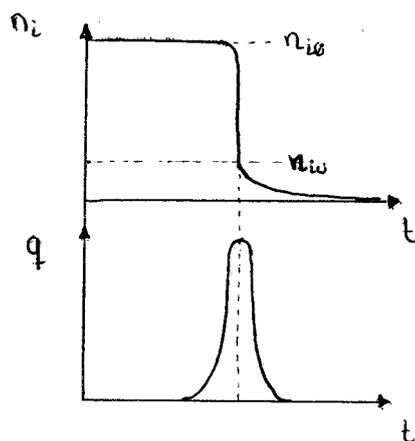
es decir, el máximo de radiación se produce justo en el momento en el que la inversión de población cae al valor umbral (figura 17.5). Durante la subida del pulso, por lo tanto, la inversión comienza a caer cada vez más rápidamente hasta la inversión umbral. La escala de tiempos en que ocurre el fenómeno es  $t_c$ , por lo que resulta ventajoso escribir las ecuaciones en forma adimensional ( $T = t/t_c$ )

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dT} &= \left( \frac{n_i}{n_{ip}} - 1 \right) q \\ \frac{dn_i}{dT} &= - (1 + g_2/g_1) \frac{l}{L} \frac{n_i}{n_{ip}} q\end{aligned}\tag{17.3}$$

si eliminamos la variable temporal entre estas dos ecuaciones podemos obtener una integral primera

$$dq = \frac{\left( \frac{n_{ip}}{n_i} - 1 \right)}{(1 + g_2/g_1) \frac{l}{L}} dn_i$$

<sup>1</sup>Para resolver numéricamente las ecuaciones hay que incorporar la contribución espontánea, ya que de lo contrario el proceso jamás arranca ( $q = 0 \Rightarrow \dot{q} = 0$ ). Esta contribución, sin embargo, no se ha tenido en cuenta en el resto del cálculo, pues no juega ningún papel desde el punto de vista teórico.



**Figura 17.5:** El pulso gigante se produce cuando la inversión de población cae por debajo del valor umbral.

esta ecuación se integra fácilmente

$$\begin{aligned} \int_{q_0}^q dq &= q - q_0 = \frac{1}{(1 + g_2/g_1) \frac{l}{L}} \left[ \int_{n_{i0}}^{n_i} \frac{dn_i}{n_i} - \int_{n_{i0}}^{n_i} dn_i \right] \\ &= \frac{1}{(1 + g_2/g_1) \frac{l}{L}} \left[ n_{ip} \ln \left( \frac{n_i}{n_{i0}} \right) - n_i + n_{i0} \right] \end{aligned}$$

esta integral primera nos da la función  $q = q(n_i)$  si la integración la llevamos hasta la inversión residual, al final del proceso ( $q = q_f, n_i = n_{if}$ )

$$q_f - q_i = \frac{1}{(1 + g_2/g_1) \frac{l}{L}} \left[ n_{ip} \ln \left( \frac{n_{if}}{n_{i0}} \right) - n_{if} + n_{i0} \right]$$

en esta expresión  $q_f$  y  $q_i$  son evidentemente muy pequeños, por lo que es lícito aproximar  $q_f - q_i \simeq 0$ , de lo que resulta

$$\frac{n_{if}}{n_{i0}} = \exp \left[ \frac{n_{if}}{n_{iu}} \left( \frac{n_{if}}{n_{i0}} \right) - 1 \right], \quad n_{iu} = n_{ip} \quad (17.4)$$

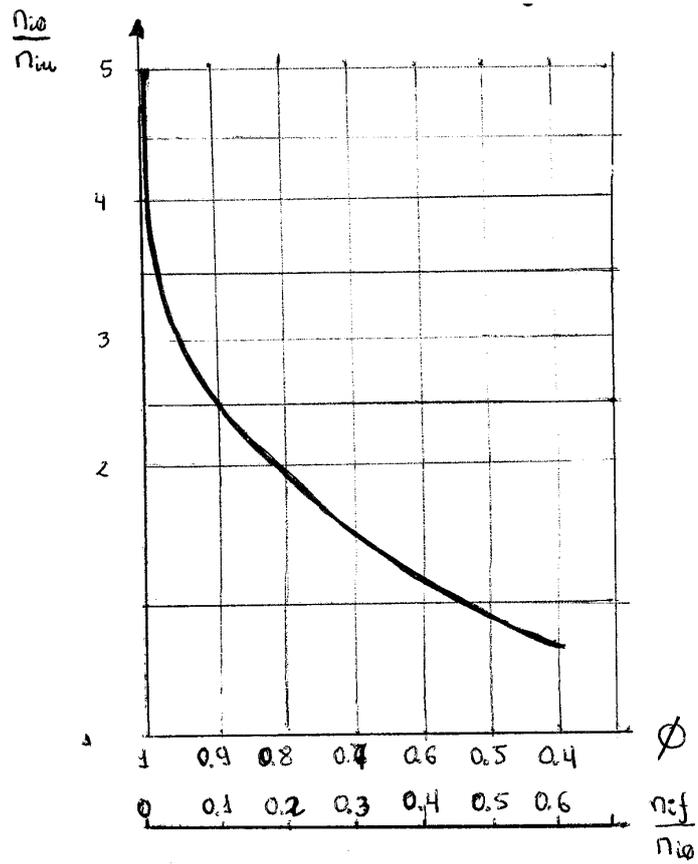
El factor de aprovechamiento de la energía de bombeo es

$$\phi = \frac{n_{i0} - n_{if}}{n_{i0}}$$

y la expresión implícita 17.4 se puede expresar en función de este factor

$$\phi = 1 - \exp \left( - \frac{n_{i0}}{n_{iu}} \phi \right) \quad (17.5)$$

en vez del factor de energía remanente no utilizada,  $n_{if}/n_{i0}$ . Esta función se calcula numéricamente con facilidad y permite conocer (una vez establecido el umbral y la



**Figura 17.6:** Fracción de la inversión de población por encima del umbral en función del factor  $\phi$ .

inversión inicial en que se efectúa la conmutación,  $n_{i0}$ ) la energía extraída en el pulso producido, ya que esta energía en el volumen total  $V$  del medio es

$$E = (n_{20} - n_{2f}) V h \nu$$

y como durante el proceso la población conjunta de los dos niveles no tiene tiempo de cambiar,

$$\begin{aligned} n_{i0} &= n_{10} + n_{20} = n_{1f} + n_{2f} \\ n_{if} &= n_{10} + n_{20} - n_{2f} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} n_{i0} - n_{if} &= n_{20} - \frac{g_2}{g_1} n_{10} - \left( n_{2f} - \frac{g_2}{g_1} n_{1f} \right) \\ &= n_{20} - n_{2f} - \frac{g_2}{g_1} (n_{10} - n_{1f}) \\ &= n_{20} - n_{2f} - \frac{g_2}{g_1} (n_{10} - n_{10} - n_{20} + n_{2f}) \\ &= \left( 1 + \frac{g_2}{g_1} \right) (n_{20} - n_{2f}) \end{aligned}$$

y la energía del pulso queda

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{1 + g_2/g_1} (n_{i0} - n_{if}) V h \nu \\ &= \frac{V h \nu}{1 + g_2/g_1} \phi n_{i0} \end{aligned}$$

no toda esta energía sale del resonador, ya que una parte  $E_a$  proporcional a la absorción interna  $\alpha_i L$  es absorbida y el resto ( $E_s$ ) sale en proporción a la pérdida a través de los espejos:

$$E_a = k_0 \alpha_i L E, \quad E_s = -k_0 (\ln R) E$$

Como  $E = E_a + E_s = k_0 (\alpha_i L - \ln R) E$  con

$$k_0 = \frac{1}{\alpha_i L - \ln R}$$

la energía que sale del láser en el pulso gigante será  $E$  por la fracción  $-\ln R / (\alpha_i L - \ln R)$ :

$$E_s = -\frac{\ln R}{\alpha_i L \ln R} \frac{V h \nu}{1 + g_2/g_1} n_{i0} \phi$$

Como en el pico la inversión es la umbral, ya no aporta potencia y la potencia de pico será la potencia que pierden los fotones que hay dentro de la cavidad en el pico. Si  $q_p$  es el número de fotones en el pico,

$$q_i = 0, \quad q_p = \frac{L}{(1 + g_2/g_1) l} \left[ n_{iu} \ln \left( \frac{n_{iu}}{n_{i0}} \right) - n_{iu} + n_{i0} \right]$$

y estos se pierden con la probabilidad de absorción  $1/t_c$  la potencia del pico será  $h\nu V q_p/t_c$ . Como los fotones absorbidos en la cavidad lo son como antes por absorción interna o a través e los espejos, la potencia del pico a la salida será

$$P_p = -\frac{\ln R}{\alpha_i L - \ln R} \frac{h\nu q_p V}{t_c} = -(\ln R) \frac{ch\nu V}{l} q_p$$

así pues, para tener la salida energética no es necesario conocer la evolución temporal, y queda

$$P_p = -\frac{cL (\ln R) h\nu V}{(1 + g_2/g_1) l^2} \left( \frac{n_{i0}}{n_{iu}} - 1 - \ln \frac{n_{i0}}{n_{iu}} \right) n_{iu}$$

por lo tanto

$$\frac{P_p}{E_s} = \frac{L \frac{n_{i0}}{n_{iu}} - \left(1 + \ln \frac{n_{i0}}{n_{iu}}\right)}{t_c \phi \frac{n_{i0}}{n_{iu}}}$$

así, si se miden  $t_c$ ,  $P_p$  y  $E_s$  se pueden tener los valores de  $n_{i0}/n_{iu}$  y  $\phi$  con la ecuación anterior y la 17.5.

El valor de  $t_c$  no es fácil de predecir, pues se requiere conocer la absorción interna  $\alpha_i$ , cosa nada fácil. Sin embargo, un análisis de la evolución temporal puede permitir obtener un método experimental simple para la determinación de  $t_c$ .

## 17.6. Evolución temporal del pulso gigante

La evolución temporal se rige por las ecuaciones 17.3 con  $n_{ip} = n_{iu}$ . La integración de estas ecuaciones se ha de efectuar por métodos numéricos, pero en los instantes iniciales la inversión de población es apenas afectada por la radiación, ya que se está lejos de la saturación. Si tomamos  $n_i = n_{i0}$  pues

$$q = q_i \exp \left[ \left( \frac{n_{i0}}{n_{iu}} - 1 \right) T \right]$$

por tanto, en los instantes iniciales el comportamiento es exponencial. Ahora bien, para que esta aproximación sea razonable, es preciso que la conmutación se produzca en un tiempo  $t_t$  (*tiempo de conmutación* o *de transición*) corto en comparación con la constante de tiempo de la exponencial,

$$t_t = \frac{t_c}{n_{i0}/n_{iu} - 1}.$$

En los instantes finales, agotada en su mayor parte la inversión de población, podemos tomar  $n_i/n_{iu} \ll 1$  y entonces, si  $q_f$  es el valor del número de fotones para el cual  $n_i = 0$  ( $t = t_f$ ),

$$q = q_f \exp \left( -\frac{t - t_f}{t_c} \right)$$

Así pues, midiendo el decaimiento del pulso se obtiene  $t_c$  experimentalmente, con lo que tendríamos de nuevo un sistema para determinar  $\alpha_i$ .

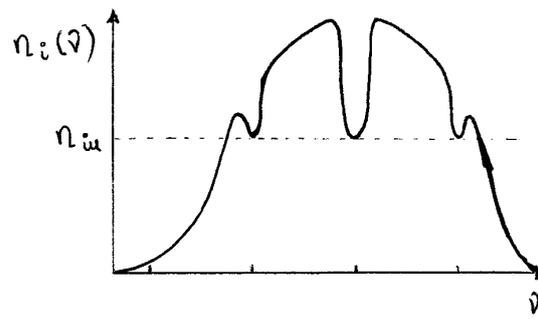


Figura 17.7: La inversión  $n_i(\nu)$  depende de cada modo.

## 17.7. Bloqueo de modos (mode locking)

En un láser con ensanchamiento inhomogéneo ya hemos comentado que la ganancia puede ser suficiente como para que la mayoría de los modos cuya anchura esté dentro de la del perfil de la línea puedan superar el umbral (figura 17.7).

Esto ocurre porque cada modo dispone de la inversión de población que el material tiene en las proximidades de su frecuencia  $\nu_k$ . En los láseres de ensanchamiento homogéneo pero con resonador en el que se forma una onda estacionaria el quemado axial de la inversión permite oscilar por encima del umbral a los modos contiguos al más favorable. Aunque sean de distintas frecuencias estos modos pueden resultar acoplados en fase, dando lugar al fenómeno conocido como *batido* o *bloqueo de modos (mode locking)*. Para conseguir esta situación se pueden utilizar diferentes técnicas, aunque a veces este régimen dinámico aparece espontáneamente. Prescindiendo de los métodos que llevan a la correlación en fase, vamos a plantear teóricamente esta situación de acoplo para que nos ayude a comprender las características básicas de esta dinámica. Así pues supondremos que están por encima del umbral y con la misma amplitud los  $N + 1$  modos axiales. A estos además los supondremos completamente correlacionados con en la fase del campo. De esta manera los campos de los respectivos modos se pueden escribir así:

$$E^{(0)} = E_0 \exp i(q + 0) \frac{\pi c}{l} t, \quad E^{(1)} = \exp i(q + 1) \frac{\pi c}{l} t, \quad \dots \quad E^{(N)} = E_0 \exp i(q + N) \frac{\pi c}{l} t$$

La amplitud total es la suma

$$E = \sum_{n=0}^N E_0 \exp i(q + n) \frac{\pi c}{l} t = E_0 \exp \left( i q \frac{\pi c}{l} t \right) \sum_{n=0}^N \exp \left( i n \frac{\pi c}{l} t \right)$$

en esta expresión tenemos la suma de los términos de una progresión geométrica de razón  $\exp i \frac{\pi c}{l} t$ , por lo cual

$$E = E_0 \exp \left( i q \frac{\pi c}{l} t \right) \frac{\exp \left[ i (N + 1) \frac{\pi c}{l} t \right] - 1}{\exp i \frac{\pi c}{l} t - 1}$$

Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo o de su módulo se tiene

$$\begin{aligned} I &\propto E_0^2 \frac{(\exp i(N+1)\frac{\pi c}{l}t - 1) [\exp(-i(N+1)\frac{\pi c}{l}t) - 1]}{(\exp i\frac{\pi c}{l}t - 1)(\exp(-i\frac{\pi c}{l}t) - 1)} \\ &= E_0^2 \frac{1 - \cos(N+1)\frac{\pi c}{l}t}{1 - \cos\frac{\pi c}{l}t} \\ &= E_0^2 \frac{\sin^2(N+1)\frac{\pi c}{2l}t}{\sin^2(\frac{\pi c}{2l}t)} \end{aligned}$$

Esta evolución temporal de la intensidad tiene una estructura pulsada en la cual los máximos del numerador se producen cuando

$$I(t) = I_{\max} \Leftrightarrow (N+1)\frac{\pi c}{2l}t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estos son pequeños máximos pues están afectados de un coeficiente finito,  $E_0^2/\sin^2(\pi ct/l)$ . Ahora bien, el seno al cuadrado del denominador se anula cuando

$$\frac{\pi ct}{2l} = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

es decir, en los instantes

$$t_m = m\frac{2l}{c}$$

pero los ceros del numerador se producen cuando

$$(N+1)\frac{\pi c}{2l}t = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

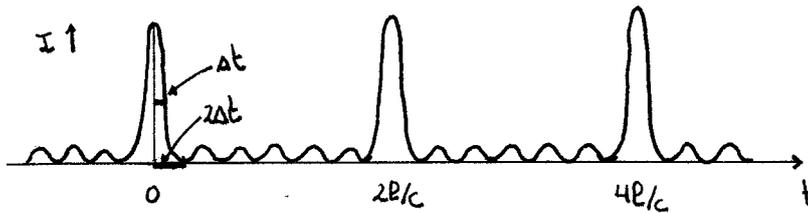
es decir, en los instantes

$$t_n = \frac{n}{N+1}\frac{2l}{c}$$

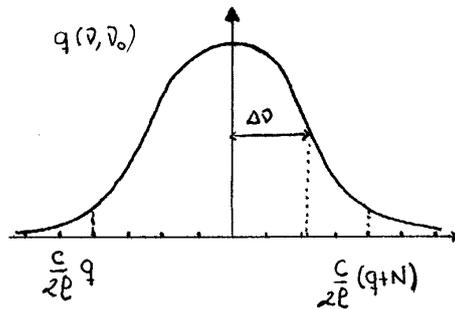
por lo tanto cada vez que  $n/(N+1)$  coincide con un valor entero  $m$  se anulan *simultáneamente* el numerador y el denominador. Entonces todos los ceros del denominador coinciden con *algún* cero del numerador. En ese caso, desarrollando en serie el cociente del límite

$$I \propto E_0^2 \lim_{t \rightarrow 2ml/c} \frac{\sin^2(N+1)\frac{\pi c}{2l}t}{\sin^2\frac{\pi c}{2l}t} = E_0^2 (N+1)^2$$

así pues en cada cero del denominador o en cada instante  $t_m = 2ml/c$  se produce un gran máximo de intensidad. Estos máximos están separados por un intervalo de tiempo  $2l/c$  (figura 17.8), que es el tiempo de ida y vuelta de la radiación entre los espejos del resonador,  $t_r$ . La interpretación física de este resultado es que un pulso de radiación está yendo y viniendo dentro del resonador, reflejándose una y otra vez en ambos espejos. La anchura temporal de estos pulsos dominantes se puede estimar por la situación del



**Figura 17.8:** Evolución temporal de la intensidad en bloqueo de modos. Los máximos secundarios no se suelen ver, ya que el contraste crece cuadráticamente en el número de modos. La anchura de los máximos principales se estima a través del primer corte con el eje del máximo inicial.



**Figura 17.9:** Anchura de los modos que intervienen en la formación de los pulsos.

primer cero contiguo al máximo que ocurre en el instante  $t = 0$  (ver figura 17.8). La semianchura  $\Delta t$  del máximo deberá obtenerse de

$$(N + 1) \frac{\pi c}{2l} (2\Delta t) = \pi$$

$$\Delta t \simeq \frac{1}{N + 1} \frac{l}{c}$$

**Ejemplo**  $l/c$  tiene un valor del orden de ps en un láser. Con  $N = 100$  modos el tiempo es de 30 ps; con  $N = 1000$  se pueden obtener pulsos tan cortos como de 3 ns. Las técnicas actuales han permitido alcanzar tiempos de attosegundos, que permiten “ver” las transiciones entre niveles energéticos de los electrones en un átomo.

Al mismo tiempo la semianchura en frecuencias angulares que ocupa el conjunto de los modos que intervienen en la formación de los pulsos es (figura )

$$\Delta\omega \simeq 2\pi\Delta\nu = 2\pi \frac{N + 1}{2} \frac{c}{2l}$$

por lo cual

$$\Delta t \Delta\omega \simeq \frac{\pi}{2} \simeq 1$$

que es la relación que cabe esperar entre anchuras características de un par de funciones relacionadas por la transformada de Fourier.

Observamos también que el contraste entre los máximos dominantes y los secundarios es proporcional a  $(N + 1)^2$ .

Así pues cuantos más modos axiales intervengan en la formación de esta dinámica menor será la anchura de los pulsos dominantes y mayor será su contraste con los secundarios. Por ello la anchura  $\Delta\omega$  de la amplificación o del perfil inhomogéneo de la luminiscencia debe ser muy grande en comparación con  $2\pi c/2l$  si se desea obtener pulsos muy estrechos, ya que de esta forma serían muchos los modos amplificados.

# 18 Métodos de bombeo

Como se ha descrito anteriormente, para que se produzca amplificación de radiación es preciso que exista inversión de población entre dos niveles.

Los sistemas empleados para producir inversión de población se suelen llamar *métodos de bombeo*; todo método o sistema de bombeo tiene por objeto conseguir que haya más emisores en un nivel excitado que en otro de menor energía. Usualmente cada tipo de láser utiliza un método diferente, pero aun así existen algunos sistemas de bombeo de utilización frecuente en diferentes láseres.

## 18.1. Bombeo óptico

En este apartado vamos a tratar el bombeo óptico, en el cual una radiación producida por una lámpara u otro foco luminoso es utilizada para alterar las poblaciones de los niveles excitados en transiciones resonantes con el estado fundamental. Aunque en la práctica son muchos los niveles que suelen intervenir en el proceso, generalmente los esquemas se pueden reducir a dos filosofías básicas, en las que intervienen o bien tres o bien cuatro niveles esencialmente.

### 18.1.1. Esquema a tres niveles

Vamos a considerar en primer lugar el caso de tres niveles, de poblaciones  $n_1, n_2, n_3$  y energía creciente con el número de índice. La población total que participa en la dinámica es  $n = n_1 + n_2 + n_3$ . La radiación de bombeo está formada por fotones de frecuencia  $\nu_b = (E_3 - E_1)/h$  que producirán transiciones estimuladas entre el fundamental (1) y el de mayor energía (3), con probabilidades  $W_{13}n_1$  (absorción) y  $W_{31}n_3$  (emisión). Lo hemos representado en la figura 18.1.

El estado número (2) debe ser metaestable (largo tiempo de vida  $\tau_{21}$ ) y debe existir una elevada probabilidad de transición radiativa o no del nivel 3 al 2 ( $d_{32}n_3$ ). Incluyendo

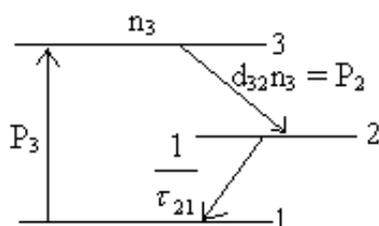


Figura 18.1: Esquema a tres niveles.

las transiciones estimuladas inducidas por el bombeo, pero no las de naturaleza láser las ecuaciones de balance del sistema de niveles son:

$$\begin{aligned}\frac{dn_1}{dt} &= -W_{13}n_1 + W_{31}n_3 + \tau_{21}^{-1}n_2 + \tau_{31}^{-1}n_3 \\ \frac{dn_2}{dt} &= d_{32}n_3 - \tau_{21}^{-1}n_2 \\ \frac{dn_3}{dt} &= W_{13}n_1 - W_{31}n_3 - \tau_{31}^{-1}n_3 - d_{32}n_3\end{aligned}$$

Como el vaciado del nivel 3, por  $d_{32}$ , es muy rápido, podemos suponer que la población que allí se acumula es despreciable. Incluso a bombeos muy elevados se pueden desechar varios términos de las ecuaciones anteriores ( $n_3 \ll n_1, n_2$ ):

$$\tau_{31}^{-1}n_3 \ll d_{32}n_3, W_{13}n_1, \quad W_{31}n_3 \ll d_{32}n_3, \quad W_{31}n_3 \ll W_{13}n_1$$

así que  $n = n_1 + n_2 + n_3 \simeq n_1 + n_2$ . Por otra parte, nos interesa el estado estacionario, en el que todas las derivadas se anulan y el sistema diferencial queda reducido al siguiente sistema algebraico en las poblaciones de los niveles:

$$\begin{aligned}-W_{13}n_1 + \tau_{21}^{-1}n_2 &= 0 \\ d_{32}n_3 - \tau_{21}^{-1}n_2 &= 0 \\ W_{13}n_1 - d_{32}n_3 &= 0\end{aligned}$$

Además, de las tres ecuaciones una es combinación lineal de las otras dos (por ejemplo: (3) = -(2)-(1)), por lo que se suele emplear la ecuación de la población total,  $n = n_1 + n_2$  junto con dos de las ecuaciones. De la segunda y la tercera,

$$W_{13}n_1 \simeq d_{32}n_3 = \tau_{21}^{-1}n_2$$

Y si despejamos con  $n \simeq n_1 + n_2$  obtenemos

$$\begin{aligned}n_1 &= \frac{\tau_{21}^{-1}}{W_{13} + \tau_{21}^{-1}}n \\ n_2 &= \frac{W_{13}}{W_{13} + \tau_{21}^{-1}}n.\end{aligned}$$

la inversión de poblaciones entre 2 y 1 se producirá siempre que<sup>1</sup>

$$n_i = n_2 - n_1 = \frac{W_{13} - \tau_{21}^{-1}}{W_{13} + \tau_{21}^{-1}}n > 0$$

Para que  $n_i$  sea positivo el bombeo a través de  $W_{13}$  debe ser lo suficientemente grande para que  $W_{13} \gtrsim \tau_{21}^{-1}$ . La condición nos permite hallar el bombeo necesario para que el

<sup>1</sup>Estamos suponiendo niveles no degenerados. En otro caso, la definición de la variable inversión de población está dada por la fórmula 10.3.

láser alcance el umbral de oscilación:

$$\begin{aligned} n_{iu} &= -\frac{1}{\sigma_{21}L} \ln RT_i \\ &= \frac{W_{13u} - \tau_{21}^{-1}}{W_{13u} + \tau_{21}^{-1}} n. \end{aligned}$$

Así, en los casos más favorables en que el umbral sea bajo

$$W_{13u} \gtrsim \tau_{21}^{-1} \rightarrow n_{iu} \ll n$$

por tanto

$$n_i = n_2 - n_1 = n_2 - (n - n_2) = 2n_2 - n \simeq 0 \rightarrow n_2 \simeq \frac{n}{2}, n_1 \simeq \frac{n}{2}$$

Vemos pues que incluso en el caso más favorable para tener inversión de población hay que excitar al menos la mitad de los centros al estado superior 2. En la práctica esto significa un bombeo muy intenso.

### 18.1.2. Esquema a cuatro niveles

El otro esquema de bombeo es el de cuatro niveles, en el cual la población total participante en la dinámica, esquematizada en la figura 18.2 es

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + n_3$$

si bien en equilibrio térmico  $n \simeq n_0$ . En este caso el bombeo se introduce entre los niveles 0 y 3, mediante radiación de la frecuencia

$$\nu_b = (E_3 - E_0) / h$$

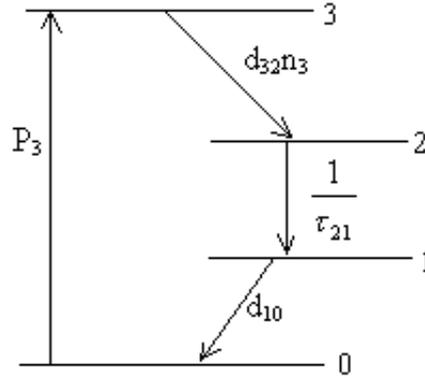
Usualmente también en este caso el nivel 3 puede ser una o varias bandas con un cuasicontínuo de niveles<sup>2</sup>. En este esquema, si  $d_{32}$  y  $d_{10}$  son probabilidades muy altas, es decir

$$d_{32}, d_{10} \gg A_{21} = \tau_{21}^{-1}$$

La población conducida a la banda 3 por el bombeo será llevada rápidamente a 2, donde tenderá a acumularse.

Al mismo tiempo, la población del nivel 2 desexcitada al nivel 1 será llevada rápidamente al estado fundamental 0, estando el nivel 1 siempre prácticamente vacío. Por lo tanto, aún el más pequeño bombeo  $W_{03}$  generará inversión de población entre los niveles 2 y 1. Las ecuaciones de balance para las cuatro poblaciones serán, en ausencia de emisión láser,

<sup>2</sup>Si se tratase de un nivel único, sería difícil con un bombeo de cierta anchura espectral (como una lámpara) llevar sistemas a dicho nivel.



**Figura 18.2:** Esquema a cuatro niveles.

$$\begin{aligned}\frac{dn_0}{dt} &= W_{30}n_3 - W_{03}n_0 + \tau_{30}^{-1}n_3 + d_{10}n_1 \\ \frac{dn_1}{dt} &= \tau_{21}^{-1}n_2 - d_{10}n_1 \\ \frac{dn_2}{dt} &= -\tau_{21}^{-1}n_2 + d_{32}n_3 \\ \frac{dn_3}{dt} &= -W_{30}n_3 + W_{03}n_0 - d_{32}n_3 - \tau_{30}^{-1}n_3.\end{aligned}$$

Si asumimos que tal como hemos razonado los niveles 3 y 1 se mantienen prácticamente des poblados,

$$n \simeq n_0 + n_2$$

podremos prescindir de los términos  $W_{30}n_3$  y  $\tau_{30}^{-1}n_3$  en la primera y cuarta ecuaciones. Además, dado que entre estas cuatro ecuaciones una de ellas es combinación lineal de las otras tres, quedándonos en estado estacionario (derivadas temporales nulas) con las tres últimas, tenemos el siguiente sistema algebraico

$$\begin{aligned}\tau_{21}^{-1}n_2 - d_{10}n_1 &= 0 \\ -\tau_{21}^{-1}n_2 + d_{32}n_3 &= 0 \\ W_{03}n_0 - d_{32}n_3 &= 0\end{aligned}$$

y como

$$n_i = n_2 - n_1 \simeq n_2$$

entre las dos últimas ecuaciones podemos eliminar el término  $d_{32}n_3$ , quedando

$$W_{03}n_0 = \tau_{21}^{-1}n_2$$

es decir,

$$n_i \simeq n_2 = \frac{W_{03}}{\tau_{21}^{-1}}n_0 \simeq \frac{W_{03}}{\tau_{21}^{-1}}(n - n_2)$$

o

$$n_i = \frac{W_{03}}{W_{03} + \tau_{21}^{-1}} n$$

el umbral se alcanzará para un bombeo  $W_{03u}$  tal que

$$\frac{W_{03u}}{W_{03u} + \tau_{21}^{-1}} n = -\frac{1}{\sigma_{21} L} \ln RT_i$$

Ahora el traslado de una pequeña fracción de la población total  $n$  al nivel 2 será suficiente para alcanzar el umbral.

Los láseres más eficientes suelen ser los de cuatro niveles, pero existen en gran cantidad dispositivos a tres niveles.

La descripción precedente tiene el esquematismo de la teoría: en la realidad el nivel invertido (2 o 3, según el esquema) puede o suele ser una banda, con lo cual la que se observa es la radiación del nivel cuya transición es más probable. Un ejemplo clásico es el láser HeNe, con el que en función de las transiciones que se inhiban o faciliten, se puede conseguir un cierto número de frecuencias láser.

### 18.1.3. Probabilidad de absorción del bombeo

En el bombeo óptico la probabilidad de absorción del nivel fundamental al excitado de bombeo  $W_{fe}$  se puede relacionar con la intensidad luminosa del bombeo,  $I_b(\nu)$ :

$$W_{fe} = \int \frac{1}{h\nu} \sigma_{fe}(\nu) I_b(\nu) d\nu$$

Para calcularla hay que integrar el espectro de la radiación sobre el espectro de absorción de la transición de bombeo. Existen dos situaciones frecuentes en la práctica en las que el cálculo se resuelve fácilmente.

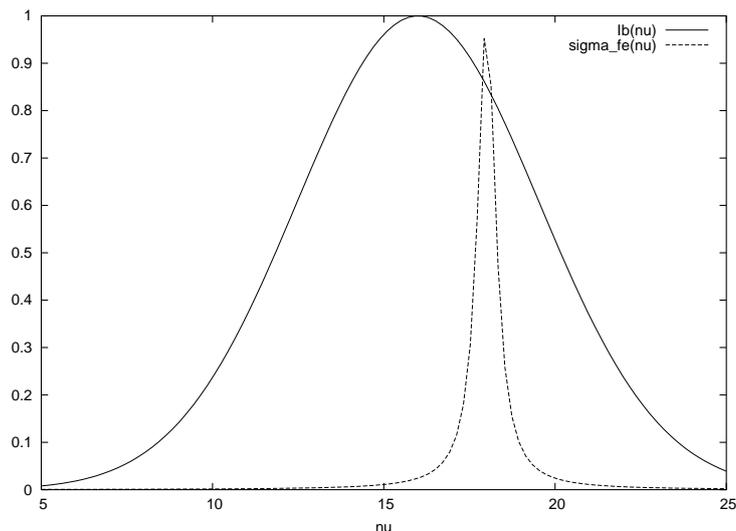
#### Espectro ancho: lámpara de destellos

Cuando se utiliza una lámpara de flash (como las de Xe o Kr) el espectro es continuo y mucho más ancho que el espectro de absorción (figura 18.3). Entonces se toma la intensidad de bombeo sobre la frecuencia  $\nu_{fe}$ , y luego se supone una forma rectangular para  $\sigma_{fe}(\nu)$ :

$$\begin{aligned} W_{fe} &\simeq \frac{1}{h\nu_{fe}} I_b(\nu_{fe}) \int \sigma_{fe}(\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{h\nu_{fe}} I_b(\nu_{fe}) \sigma_{fe}(\nu_{fe}) \Delta\nu_{fe} \end{aligned}$$

de aquí se obtiene la intensidad por unidad de intervalo de frecuencia necesaria para producir la probabilidad estimulada  $W_{fe,u}$ :

$$I_{b,u}(\nu_{fe}) = \frac{h\nu_{fe}}{\sigma_{fe}(\nu_{fe}) \Delta\nu_{fe}} W_{fe,u}$$



**Figura 18.3:** Cuando el bombeo se realiza mediante una lámpara, su perfil se puede aproximar por el valor de la intensidad en la frecuencia central de absorción  $\nu_{fe}$ .

En la práctica se utilizan para el bombeo *lámparas lineales*. La lámpara puede funcionar o bien

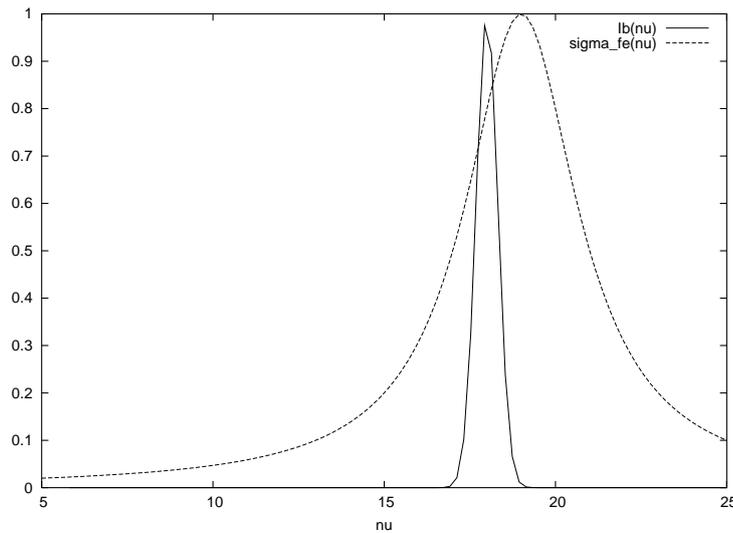
- como lámpara flash (de destellos), descargando un condensador. La resistencia permite un cierto retraso entre recargas del condensador  $\tau = (RC)^{-1}$ , regulando así el ritmo de los destellos.
- o en onda continua: si se hace pasar una corriente elevada, la lámpara se mantiene en emisión continua. Eso origina una disipación térmica brutal, por lo que hay que sumergirla en un circuito de refrigeración por agua que retire la energía disipada.

Para introducir la radiación en el láser de modo que se aproveche la máxima cantidad de radiación existen diferentes estrategias. Una de ellas consiste en disponer la lámpara y la varilla del láser en paralelo, cada una en un foco de un reflector elíptico. Por las propiedades de la elipse, todo rayo procedente de uno de sus focos, al ser reflejado, atraviesa el otro foco.

#### 18.1.4. Espectro estrecho: bombeo láser

Otro caso sencillo en el que el bombeo se puede aproximar sin hacer la integral se da cuando el bombeo lo produce otro láser (figura 18.4). La aproximación es, teniendo en cuenta que la anchura espectral del láser ahora es mucho menor que la de la transición,

$$W_{fe} = \frac{1}{h\nu_b} \sigma_{fe}(\nu_b) \int I_b(\nu) d\nu$$



**Figura 18.4:** En el caso del bombeo láser, la intensidad de bombeo  $I_b(\nu)$  tiene una anchura espectral menor que la de la transición,  $\sigma_{fe}(\nu)$ . Por ello se aproxima  $\sigma_{fe}$  por su valor en la frecuencia central de bombeo,  $\nu_b$ .

llamando  $I_b$  al valor de la integral, la intensidad umbral a la que hay que fijar el láser es

$$I_{b,u} = \frac{h\nu_b}{\sigma_{fe}(\nu_b)} W_{fe,u}$$

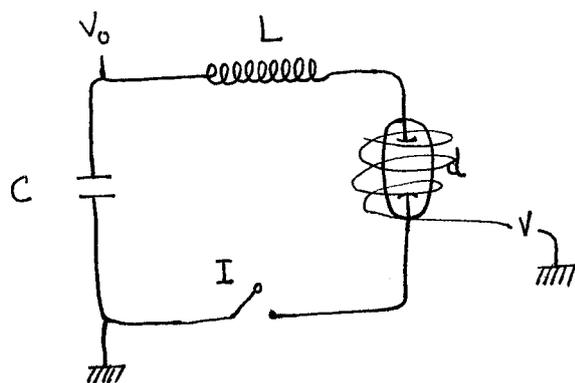
la disposición geométrica pasa por convertir el haz cilíndrico proveniente del láser en una línea horizontal a través de una lente cilíndrica. El bombeo se proyecta así sobre la línea de amplificación como un bombeo uniforme.

## 18.2. Bombeo con lámparas en régimen de destello

### 18.2.1. Fundamento de las lámparas de descarga

Una lámpara de descarga contiene un plasma con un alto grado de ionización producido por el paso a través de un gas de una corriente eléctrica. El gas debe ser inerte bajo las condiciones de descarga a las que se somete. Eso excluye, por ejemplo, el  $N_2$ . Se suelen utilizar los gases nobles Xe (con emisión en el visible y el UV) y Kr (con emisión en el rojo y el IR). Las presiones suelen ser de un orden tal ( $\sim .5$  atm) que el ensanchamiento colisional elimina el espectro de líneas, dando lugar a un espectro continuo y amplio que no es muy selectivo en la excitación.

El plasma suele inducirse en el gas contenido en un tubo de cuarzo mediante una corriente eléctrica continua, pulsada, o de radiofrecuencia. El crecimiento de la densidad de corriente  $j$  durante el proceso de ionización del plasma es producido por ionizaciones secundarias que tienen lugar en avalanchas sucesivas, con un poder generador tal que el crecimiento es prácticamente exponencial en el tiempo. La energía que entra en el



**Figura 18.5:** Circuito auxiliar para la inducción del régimen de descarga en una lámpara.

plasma a través de la corriente que lo recorre se emplea por tanto por un lado en ionizar el gas y por otro en calentarlo sustancialmente, y en energía de excitación atómica por impacto. La energía sale del plasma por dos mecanismos independientes:

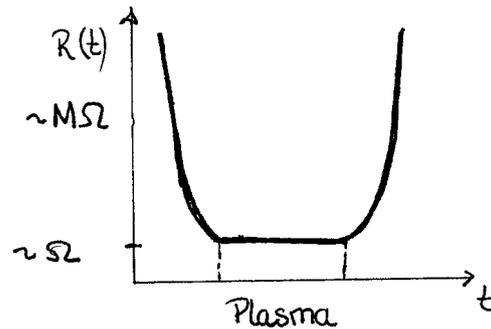
- la energía de excitación de los átomos y moléculas se radia en buena parte, y la fracción que no es absorbida en el cuarzo constituye la salida de la lámpara.
- el resto de la energía se disipa en el cuarzo, de donde debe ser extraída.

El proceso de crecimiento de la ionización se detiene cuando la energía introducida por la corriente iguala a la disipada radiativamente y en el cuarzo.

En las lámparas de destello, que son las que nos interesan en este apartado, la corriente suele producirse mediante la descarga de un condensador a través del gas de la lámpara. El circuito de descarga, esquematizado en la figura 18.5, es en apariencia muy simple, pues contiene el condensador, de capacidad  $C$ , un inductor de inductancia  $L$  y la lámpara en serie.

Esta simplicidad es sólo aparente, pues el plasma posee una resistencia variable en el transcurso de la descarga (figura 18.6). Ahora bien, la gran variación de resistencia se produce en los primeros cientos de nanosegundos del proceso de ionización: pasa de valer típicamente algunos cientos de  $M\Omega$  a valer  $\Omega$  o décimas de  $\Omega$ . Esta etapa de rápido decrecimiento es inducida generalmente por un arrancador que ceba con un potencial la descarga. Puesto que el arrancador no tiene otro efecto en el circuito, lo hemos representado como un interruptor  $I$  cuyo cierre da lugar a la caída de la resistencia.

Pasada la etapa de rápido crecimiento de la corriente, se entra en un régimen en el que la resistencia depende moderadamente de la corriente, de tal suerte que, en una primera aproximación, se puede tomar como constante, con un valor medio fijo. Vamos a resolver el problema de forma exacta con esta aproximación y luego afrontar la dificultad que supone considerar la dependencia de la resistencia de la lámpara en la intensidad que la atraviesa.



**Figura 18.6:** Resistencia del plasma en una lámpara de destello en función del tiempo. El incremento de la resistencia tras la región estacionaria se debe al corte de la corriente; si la lámpara fuera de onda continua seguiría en el régimen anterior.

### 18.2.2. Estudio en aproximación de $R = \text{cte}$

#### Regímenes de funcionamiento

La ecuación para los transitorios del circuito de destellos, en la aproximación de resistencia constante, es

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int_0^t i dt' = V_0$$

Esta ecuación se puede escribir en forma adimensional con el habitual cambio de variables

$$I = \frac{i}{V_0} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (18.1)$$

$$\tau = t / \sqrt{LC} \quad (18.2)$$

Se puede comprobar que se cumple la condición de normalización siguiente

$$\int_0^\infty I d\tau = 1$$

Con este escalamiento de las variables, y con la definición de un parámetro de amortiguamiento  $\alpha$  que va a regular el régimen de operación y que encapsula las características eléctricas del circuito,

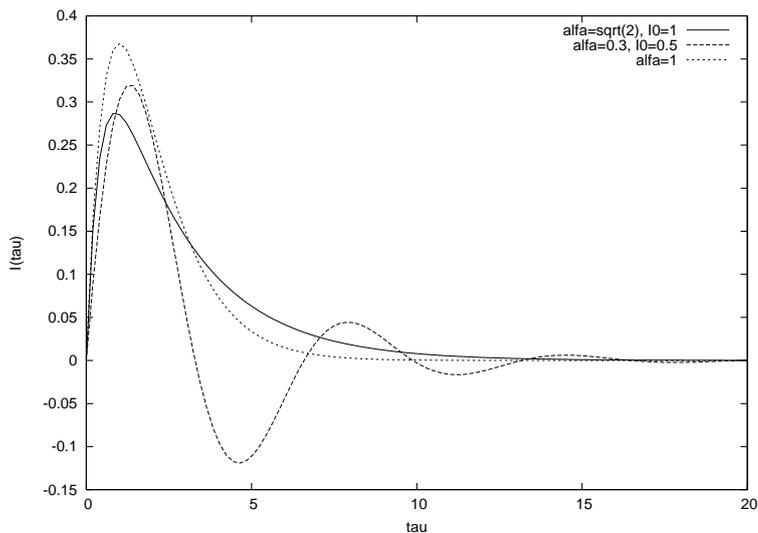
$$\alpha \equiv \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (18.3)$$

la ecuación se escribe así:

$$\frac{dI}{d\tau} + 2\alpha I + \int_0^\tau I d\tau' = 1.$$

Con la condición inicial  $I(0) = 0$  su solución (es una ecuación de segundo orden con término independiente constante) es

$$I = K \exp(-\alpha\tau) \left[ \exp\left(\sqrt{\alpha^2 - 1}\tau\right) - \exp\left(-\sqrt{\alpha^2 - 1}\tau\right) \right],$$



**Figura 18.7:** Evolución de la intensidad escalada en función del tiempo característico para las tres situaciones: sobreamortiguamiento ( $\alpha > 1$ ), subamortiguamiento ( $\alpha < 1$ ) y amortiguamiento crítico ( $\alpha = 1$ ).

Los argumentos de las exponenciales son las raíces del polinomio característico de la ecuación. Tenemos que considerar varios casos, según sea el valor de  $\alpha$  (figura 18.7):

- Régimen sobreamortiguado,  $\alpha > 1$ :

$$I = I_0 \exp(-\alpha\tau) \sinh \sqrt{\alpha^2 - 1}\tau$$

La anchura del pulso de corriente disminuye al aumentar  $\alpha$ .

- Si  $\alpha < 1$  el circuito está subamortiguado y la solución es

$$I = I_0 \exp(-\alpha\tau) \sin \sqrt{\alpha^2 - 1}\tau$$

Es una solución oscilante amortiguada. El seno da el período, la exponencial la envolvente de amortiguamiento.

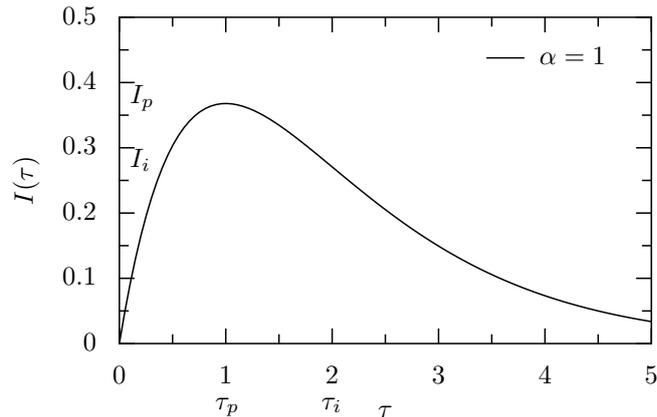
- Si  $\alpha = 1$  el amortiguamiento se dice *crítico*.

$$I = I_0 \tau \exp(-\tau)$$

(en virtud de la condición de normalización,  $I_0 = 1$ ).

No nos interesa que el pulso sea oscilante por dos razones:

- La energía se distribuye sobre todas las oscilaciones, de manera que en cada una sólo se aprovecha en el plasma una pequeña fracción.



**Figura 18.8:** Evolución del pulso en régimen crítico. Se han señalado los puntos de máximo  $(\tau_p, I_p)$  e inflexión  $(\tau_i, I_i)$ . Convencionalmente se toma como duración del pulso  $\tau_d = 3$ .

- Los iones son masivos y producen impactos muy distintos que los electrones; cada electrodo se diseña de modo que resista uno de ambos tipos de impactos de forma óptima: las lámparas se diseñan con una polaridad. Si la corriente se va invirtiendo, se deterioran los electrodos, pues reciben cada medio período impactos del tipo que no están preparados para soportar.

Así, nos quedan los otros dos regímenes; de ellos el que produce menos pérdidas a partir de una misma energía almacenada en el condensador (y por lo tanto mayor eficiencia, mayor brillo) es el crítico, pues es el caso en el que las pérdidas resistivas de la lámpara son menores ( $R$  toma el menor valor compatible con un pulso amortiguado).

### Régimen crítico

Habida cuenta de que es el que nos interesa, situémonos en el régimen crítico, con  $\alpha = 1$ . Ello implica ajustar los parámetros hasta que

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}$$

los parámetros que podemos ajustar para entrar en este régimen son  $L, C$ , ya que  $R$  es característico de la lámpara.

Estudiando la primera y la segunda derivada de la intensidad (figura 18.8) se obtienen los siguientes valores, respectivamente, para la el pico de intensidad y el punto de inflexión:

$$\begin{aligned} (\tau_p, I_p) &= (1, e^{-1} \simeq 0.37) \\ (\tau_i, I_i) &= (2, 2e^{-2} \simeq 0.27) \end{aligned}$$

para estimar la duración total del pulso de corriente podemos tomar el criterio  $\tau_d = 3$  ( $I_d \simeq 0.14$ ,  $I_d/I_p = 0.40$ )

La evolución de la intensidad, en variables no escaladas, viene dada por

$$i = \frac{V_0}{L} t \exp(-Rt/2L)$$

en el pico, teniendo en cuenta el valor de  $\alpha$  en la definición 18.3:

$$t_p = \sqrt{LC}, \quad i_p = \frac{V_0}{e} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2V_0}{eR} \approx 0.74 \frac{V_0}{R}$$

Asimismo, la duración del pulso es  $T = 3\sqrt{LC}$ .

Se puede destacar que en esta aproximación no es preciso conocer la resistencia de la lámpara para diseñar el circuito de excitación. La corriente se puede normalizar al pico para dar una forma universal:

$$\frac{i}{i_p} = \frac{V_0 t \exp(-Rt/2L)}{L \frac{2V_0}{eR}} = \frac{t}{t_p} \exp\left(1 - \frac{t}{t_p}\right).$$

Desafortunadamente, en la práctica, la resistencia del plasma no se puede considerar independiente de la intensidad.

### 18.2.3. La lámpara como elemento no lineal

Goncz encuentra esta fórmula empírica para la resistividad del plasma, con la densidad de corriente que se hace circular  $j$  en A/cm<sup>2</sup> y la presión de llenado  $P$  en torr:

$$\rho = \left(\frac{c_1}{\sqrt{|j|}}\right) \left(\frac{P}{450}\right)^{0.2} \Omega \times \text{cm}$$

el coeficiente  $c_1$  vale 1.13 para la lámpara de Xe; para la de Kr el coeficiente  $c_1$  es 1. Esta fórmula es válida para un amplio rango de lámparas utilizables: aquellas de forma cilíndrica con diámetro interno  $d$  entre 1.3 mm y 28 mm y distancia entre electrodos  $l$  entre 6.3 mm y 300 mm, con duraciones de pulso desde 30  $\mu$ s a 10 ms para lámparas pequeñas y desde 100  $\mu$ s a 100 ms en lámparas grandes.

Mientras estemos con lámparas estándar del mercado, esta fórmula será normalmente válida, y la resistencia de la lámpara será

$$R = \frac{4}{\pi} \frac{\rho}{d^2} = \frac{c_2}{d|i|^{1/2}} \left(\frac{P}{450}\right)^{0.2}.$$

Como vemos, la resistencia depende de la intensidad  $i = j \pi d^2/4$  que circula por el circuito. La constante  $c_2$  depende del gas en la lámpara, y vale 1.28 para la de Xe y 1 para la de Kr. El valor absoluto aplicado a  $j$  o  $i$  permite mantener la validez de la fórmula con  $i$  oscilante, pues  $\rho, R$  se mantienen, como debe ser, positivas, independientemente del sentido de la corriente.

Para unas determinadas características geométricas  $(l, d)$ , gas  $(c_2)$  y presión  $P$  de trabajo podemos escribir

$$R = \frac{K_0}{|i|^{1/2}}$$

donde  $K_0$  una constante, que suele ser aportada por los fabricantes de los tubos o se puede estimar como

$$K_0 = c_2 \frac{l}{d} \left( \frac{P}{450} \right)^{0.2}$$

si la presión no se conoce, se debe saber que en la mayoría de los casos es muy próxima a 450 (que es la razón por la que este número aparece en la fórmula).

Entonces la caída de potencial de la lámpara será

$$V_l = \pm K_0 |i|^{1/2}$$

donde el signo se ha de escoger de manera que coincida con el de la corriente. Así englobamos los regímenes de intensidad alternante, aunque en general no nos interesan y podemos considerar solamente el signo positivo. La ecuación de evolución es, despreciando el término  $R_S i$  debido al conexionado del circuito:

$$L \frac{di}{dt} \pm K_0 |i|^{1/2} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = V_0$$

Aunque esta ecuación es no lineal y debe ser atacada numéricamente, la resolución simplificada del apartado anterior nos sirve de modelo. Así, escalamos la ecuación de acuerdo con 18.1 y 18.2. Utilizamos la abreviatura  $z_0 = \sqrt{L/C}$  y definimos la constante de amortiguamiento  $\alpha$  del siguiente modo:

$$\alpha \equiv \frac{K_0}{\sqrt{V_0 z_0}}$$

La expresión escalada de la ecuación es

$$\frac{dI}{d\tau} \pm \alpha |I|^{1/2} + \int_0^\tau I d\tau' = 1$$

Las soluciones así obtenidas presentan un amortiguamiento algo mayor que las comentadas anteriormente para el modelo de resistencia constante. El régimen crítico se obtiene ahora cuando  $\alpha = 0.8$ . Por lo demás, la introducción de la dependencia no lineal en la resistencia de la lámpara se traduce en una pequeña diferencia en el pico de corriente calculado, que se aproxima más al valor experimental.

La energía almacenada en el condensador es un parámetro relevante

$$E = \frac{1}{2} C V^2$$

en función del cual podemos escribir el amortiguamiento

$$\alpha = \frac{K_0}{\left( (2E/C)^{1/2} z_0 \right)^{1/2}} = \frac{K_0}{\left( (2E/C)^{1/2} t_p/C \right)^{1/2}}, \quad \alpha^4 = \frac{K_0^4 c^3}{2E t_p^2}$$

Por razones de eficiencia que explicaremos un poco más adelante, la duración total del pulso de la lámpara se debe elegir de tal manera que el pulso de bombeo sea de menor duración que tiempo de vida de la inversión de población:  $T \lesssim \tau$ . Este criterio fija una condición para escoger los parámetros del circuito. Puesto que  $t_p$  se establece a partir de la duración del pulso y  $K_0$  es un dato de la lámpara, podemos ajustar  $C$  para obtener el amortiguamiento crítico necesario para el tiempo de subida deseado:

$$C^3 = \frac{2Et_p^2\alpha}{K_0^4}$$

y la inductancia deberá ser

$$L = t_p^2/C$$

El potencial de carga que corresponde a esta energía  $E$  es, por su parte,

$$V_0 = \left(\frac{2E}{C}\right)^{1/2}$$

Estas tres ecuaciones permiten calcular el circuito necesario para el funcionamiento en régimen crítico de una determinada lámpara.

El tiempo de subida  $t_p = \sqrt{LC}$  y la intensidad de pico  $i_p$  que corresponden al circuito de resistencia constante, se ven ligeramente aumentados en el tratamiento no lineal:

$$\begin{aligned} t_r &= 1.25t_p \\ i_r &= 0.5\frac{V_0}{z_0} = 0.5V_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 1.35i_p \end{aligned}$$

Aunque el pulso de corriente es más alto su duración se obtiene de nuevo razonablemente tomando tres veces el tiempo del pico,  $T = 3t_p = 3\sqrt{LC}$ .

El hecho de que el funcionamiento crítico se obtenga para valores determinados de  $C, L$  y  $V_0$  debe ser tenido en cuenta, pues significa que un cambio en el potencial de carga  $V_0$  del condensador puede sacar al circuito del amortiguamiento crítico. Esta es una situación no prevista en el tratamiento simplificado de resistencia constante.

Aunque la duración del pulso de radiación es algo mayor que la del pulso de corriente, para tener un óptimo aprovechamiento del pulso de bombeo conviene ajustar la duración  $T$  del pulso de corriente en la lámpara al tiempo de vida  $\tau$  de la inversión de población:

$$3t_p = T \lesssim \tau = A^{-1}$$

El uso de un tiempo más corto puede dar lugar a un exceso de potencia de bombeo, lo que puede provocar la saturación de la transición en el medio amplificador: el exceso de potencia de bombeo se pierde. Si por el contrario el tiempo es más largo, el bombeo ha de competir con la desexcitación espontánea, y el rendimiento también baja.

Con las nociones precedentes, estamos en condiciones de diseñar un circuito de excitación para una lámpara de destello a partir de los datos de la lámpara y las características del medio láser (tiempo de vida de la inversión de población, energía necesaria para superar el umbral).

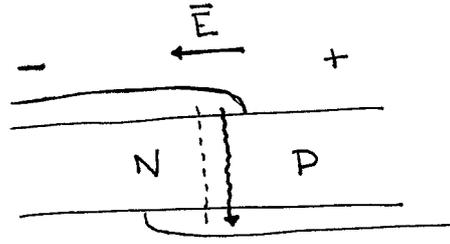


Figura 18.9: Representación esquemática de una unión PN polarizada directamente.

### 18.3. Bombeo en uniones

Cuando se polariza de modo directo un diodo semiconductor los electrones pasan a través de la barrera en los niveles de la banda de conducción. Dado que en la parte  $P$  de la unión la banda de valencia tiene niveles desocupados, los electrones que ocupan la banda de conducción en esta parte constituyen una población invertida respecto de los niveles desocupados de la banda de valencia (huecos). Lo mismo ocurre con los huecos que pasan de la parte  $P$  a la  $N$ .

En la zona de la unión tenemos inversión de población entre los niveles de las dos bandas, y es lo que se aprovecha para la emisión láser (figura ). El tiempo total que los electrones permanecen en el lado  $P$  produciendo inversión de población (tiempo de recombinación) lo designamos por  $\tau$ . La recombinación es en parte radiativa y en parte no radiativa.  $I/e$  es el número de portadores que llegan a la unión por unidad de tiempo, la densidad de portadores en el volumen  $V$  de difusión en la unión (distancia de difusión por sección de la unión) será la inversión de población, es decir:

$$n_i \simeq \frac{I\tau}{eV}.$$

Si  $\sigma$  es la sección eficaz óptica en la banda de emisión del semiconductor y se pretende alcanzar la emisión umbral

$$n_{iu} = -\frac{1}{\sigma L} \ln RT_i$$

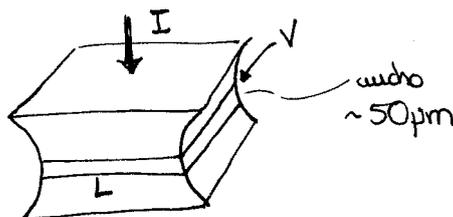
la corriente umbral que será necesario aplicar para ello valdrá, de acuerdo con nuestros cálculos,

$$I_u = -\frac{eV}{L} \frac{1}{\sigma\tau} \ln RT_i$$

La sección eficaz de la transición óptica de emisión se puede estimar si se conoce la anchura de la emisión espontánea  $\Delta\nu$  (la emisión espontánea sale por los lados exteriores y puede estudiarse):

$$\sigma(\nu_0, \nu_0) = \mu \frac{\lambda^2}{8\pi} g(\nu_0, \nu_0) \simeq \frac{1}{8\pi} \frac{\lambda^2}{\Delta\nu} \frac{\mu}{\tau_r}$$

donde  $\tau_r$  es el tiempo de recombinación *radiativo*. Así, podemos reexpresar la intensidad



**Figura 18.10:** Geometría para un láser de semiconductor.

umbral del siguiente modo

$$I_u = -8\pi e \frac{V}{L} \frac{\Delta\nu}{\mu\lambda^2} \frac{\tau_r}{\tau} \ln RT_i$$

donde  $S = V/L$  es la sección recta del canal láser. Como se ve, el umbral es tanto menor cuanto menor sea la sección  $S$  del láser y el cociente  $\tau_r/\tau$ .

Los espejos del resonador se suelen construir en el propio monocristal que contiene el canal láser, por exfoliación. Entonces, como el índice de refracción es del orden de  $\mu = 3.6$  se consiguen reflectividades, según la fórmula de Fresnel,

$$R = \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^2 \simeq 0.32,$$

en virtud de la gran ganancia del láser, esta cifra es suficiente y no se requiere la introducción de espejos. Basta con el corte o exfoliación. Si se toman los valores  $T_i \simeq 1$ , con las cifras del GaAs (hay que tener en cuenta que en función del compuesto semiconductor, se pueden conseguir muy variadas longitudes de onda de salida),  $\Delta\nu = 1.4 \times 10^{13}$  Hz,  $\lambda = 0.8 \mu\text{m}$ ,  $\tau = 5 \times 10^{-10}$  s,  $\tau_r = 10^{-8}$  s y  $S = 5 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$  (ver figura) se tiene que la intensidad de corriente umbral es del orden de  $I_u \simeq 150$  mA. La longitud del canal láser puede ser del orden de  $250 \mu\text{m}$ , y como el potencial de transición es del orden de 1 V la potencia de bombeo umbral sería  $P_u = VI_u \simeq 150$  mW. Con esto se pueden obtener 50 mW de luz: la eficiencia puede llegar a ser enorme (0.1 – 0.3). Como punto de comparación, un láser HeNe produce 5 mW, con una eficiencia de  $10^{-4}$ .

Los láseres de semiconductores existen en una enorme variedad de formatos, y son ubicuos en la tecnología de hoy en día (lectura y grabación de discos ópticos, por ejemplo). En virtud de su gran eficiencia y pequeño tamaño, van sustituyendo a los otros láseres en las aplicaciones (por ejemplo, los escáneres de código de barras del supermercado). No obstante, justamente su pequeño tamaño deriva en la aparición de un haz de sección elíptica que diverge ( $30^\circ$  en la dirección horizontal y  $10^\circ$  en la vertical) por los efectos difractivos. Afortunadamente, con la óptica anamórfica cilíndrica adecuada (ej. punteros láser) se puede corregir el haz a sección circular con buena colimación.

No se ha podido hasta ahora construir un láser de semiconductor fiable que funcione en el verde, porque el material con el gap adecuado (el seleniuro de zinc) es muy difícil de tratar. De hecho, se tiene que recurrir a temperaturas criogénicas (y modo pulsado)

para reducir las pérdidas no radiativas y aumentar  $\tau$  de recombinación, manteniendo el umbral controlado.

En la tecnología láser, se utiliza con frecuencia el láser de semiconductor para bombear otros materiales sólidos, que suelen emitir en el IR próximo y se duplican o triplican con un cristal no lineal. Son los láseres DPSS (Diode Pumped Solid State Lasers).

Los láseres de semiconductor se pueden apilar en varias capas formando estructuras bidimensionales, lo que permite construir matrices con potencias del orden de W. El límite está fijado por los métodos de refrigeración. Una posibilidad alternativa es usar sustratos de diamante (conductividad térmica del orden de 30 veces superior a la del cobre), y eso permite disipar cantidades ingentes de calor. Precisamente el diamante (que puede hacerse crecer con cierta calidad, todavía no suficiente, en laboratorio) tiene un gap muy ancho, lo que permite pensar en láseres que funcionen directamente en UV lejano, con una buena disipación térmica. Esos láseres permitirían procesos fotolitográficos más precisos para la construcción de circuitos impresos, que podrían ser, por lo tanto, más pequeños.

## 18.4. Bombeo en descargas

Una descarga en un gas es un fenómeno de transporte de partículas en un campo eléctrico. Para estudiar con propiedad los fenómenos de transporte se utiliza la ecuación de Boltzmann. En ella el principal interés está en los términos de colisión, que dan cuenta de la entrada y salida de partículas en la trayectoria que en el espacio de fases realiza el colectivo estadístico. Hay de hecho en las descargas de gases dos tipos de procesos de colisión que juegan un papel importante en el bombeo de poblaciones y en el mantenimiento de la descarga.

- La ionización que es necesaria para la producción y el mantenimiento de la descarga.
- La excitación colisional de los niveles que participan en la emisión láser.

La optimización ambas clases de procesos en una descarga suele ser conflictiva, pues en general los electrones necesitan una elevada energía para ionizar y mantener la descarga y sin embargo la excitación de los átomos o moléculas es en general mucho más eficiente a bajas energías.

La energía media de los electrones es la que adquieren del campo eléctrico  $E$  durante el tiempo de vuelo libre entre las colisiones con los átomos del gas. Por ello esta energía media y otras magnitudes relacionadas con ella son funciones del cociente  $E/N$  entre el campo eléctrico y la densidad  $N$  de átomos o moléculas en el gas. Como a temperatura constante  $N$  es proporcional a la presión  $p$ , también se puede expresar la dependencia en función de  $E/p$ .

### 18.4.1. Procesos colisionales

Supongamos que tenemos un colectivo de partículas  $i$  cuyas energías cinéticas  $E_c$  están distribuidas. Llamamos  $f_i(E_c)$  a la distribución sobre las energías cinéticas de las  $N_i$  partículas del colectivo por unidad de volumen,

$$N_i = \int_0^{\infty} f_i(E_c) dE_c.$$

Supongamos ahora que  $E_c$  es la energía cinética relativa de las partículas del colectivo  $i$  respecto a los de otro colectivo,  $j$  con  $N_j$  partículas por unidad de volumen.

Consideremos las partículas del colectivo  $i$  cuyas energía están comprendidas entre  $E_c$  y  $E_c + dE_c$ , o sea  $dN_i = f_i(E_c) dE_c$ . La densidad corriente de estas partículas es  $v_i(E_c) dN_i$ , siendo  $v_i$  su velocidad. Cuando esta corriente se desplaza una distancia  $dr$  a través de la unidad de área encuentra a las partículas del colectivo  $j$  contenidas en el volumen  $dr \times 1$ . Si la sección eficaz de colisión para partículas de ambos colectivos es  $\sigma_{ij}(E_c)$  el número de partículas que colisionan en el recorrido  $dr$  será el producto de la corriente por el área total que representan todas las secciones eficaces de las partículas contenidas en el volumen  $dr \times 1$ , es decir:

$$[v_i(E_c) dN_i] \times [N_j dr \times 1 \times \sigma_{ij}(E_c)]$$

éste es entonces el número de partículas del colectivo  $i$  que son sacadas de su trayectoria en el espacio de fases en el recorrido  $dr$  por unidad de tiempo, o sea, es el cambio en la intensidad del colectivo  $i$ :

$$d(v_i dN_i) = [dN_i(E_c, r + dr) - dN_i(E_c, r)] v_i = N_j \sigma_{ij} v_i dN_i dr$$

como el recorrido se realiza a la velocidad  $v_i$  en un tiempo  $dt$ :

$$d\left(\frac{dN_i}{dt}\right) = N_j \sigma_{ij}(E_c) v_i(E_c) f_i(E_c) dE_c$$

entonces el número de colisiones por unidad de volumen y de tiempo en todas las energías cinéticas será

$$\frac{dN_i}{dt} = N_j \int \sigma_{ij}(E_c) v_i(E_c) f_i(E_c) dE_c$$

si no se conoce la dependencia  $\sigma(E_c)$  se suele tomar un promedio sobre las velocidades de  $\sigma_{ij}$  y se utiliza la velocidad media  $\bar{v}_i$  para escribir la anterior ecuación de modo aproximado,

$$\frac{dN_i}{dt} \simeq N_j \bar{\sigma}_{ij} \bar{v}_i \int f_i(E_c) dE_c = N_j N_i \bar{\sigma}_{ij} \bar{v}_i$$

esta ecuación es útil en los dos tipos de procesos que hemos apuntado anteriormente. En el caso de los procesos de ionización de las moléculas por impactos electrónicos, tendremos que el número de electrones producidos por unidad de volumen y tiempo será

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_i = N n_e \bar{\sigma}_{ei} \bar{v}_i$$

donde  $n_e$  es la concentración o densidad electrónica,  $\bar{v}_e$  la velocidad electrónica media y  $\bar{\sigma}_{ei}$  la sección eficaz de ionización por impacto de electrones. El producto  $\bar{\alpha}_i \equiv N\bar{\sigma}_{ei}$  se conoce como *coeficiente de ionización* o *coeficiente de Townsend*. Empleándolo la ecuación se conoce como *ecuación de Townsend*:

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_i = \bar{\alpha}_i v_e n_e.$$

Para los gases más conocidos el coeficiente de ionización  $\bar{\alpha}_i$  ha sido calculado o medido experimentalmente como función de  $E/p$ . De hecho, en numerosos casos se puede emplear la expresión

$$\frac{\bar{\alpha}_i}{p} = k_\alpha \left(\frac{E}{p}\right)^{n_\alpha}$$

en particular en el nitrógeno esta expresión es válida para valores de  $E/p$

$$\frac{E}{p} < 100 \frac{\text{V}}{\text{cm} \times \text{mm Hg}}$$

con  $k_\alpha \simeq 2.5 \times 10^{-13}$  en las mismas unidades de la fórmula y  $n_\alpha \simeq 6.5$ .

De manera análoga en los procesos de excitación por impacto de electrones el número de átomos o moléculas excitados por unidad de tiempo sería

$$\frac{dN^*}{dt} = N_j n_e \bar{\sigma}_e \bar{v}_e$$

y la excitación colisional de una especie  $j$  por otra  $i$  sería obtenida a un ritmo

$$\frac{dN_j^*}{dt} = N_j N_i \bar{\sigma}_{ej} \bar{v}_i$$

las velocidades electrónicas han sido calculadas y medidas en diferentes gases y frecuentemente obedecen a fórmulas empíricas del tipo

$$\bar{v}_e = v_0 + k_v \left(\frac{E}{p}\right)^{n_v}$$

que en el caso del nitrógeno se cumple con los valores  $k_v \simeq 6.67$ ,  $n_v \simeq 1$ ,  $v_0 = 4 \times 10^7 \text{ cm s}^{-1}$  usando  $E$  en V/cm y  $p$  en mm Hg para el mismo rango de  $E/p$  en que se empleaba la otra ecuación.

Por otra parte, en el plasma los electrones además de reproducirse por ionizaciones pueden ser extraídos de la trayectoria por dos tipos de captura. Por un lado los electrones pueden ser recombinados por los iones positivos que en la descarga tienen la misma densidad que los electrones (ya que habitualmente el plasma es neutro). Entonces el ritmo de recombinación sería

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_r = -\bar{\sigma}_{er} n_e^2 \bar{v}_e$$

pero también pueden ser capturados por átomos neutros, con un ritmo

$$\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_n = -Nn_e\bar{\sigma}_{en}\bar{v}_e$$

por lo tanto en el plasma de la descarga la producción total de electrones es

$$\frac{dn_e}{dt} = Nn_e\bar{\sigma}_{ei}\bar{v}_e - \bar{\sigma}_{er}n_e^2\bar{v}_e - Nn_e\bar{\sigma}_{en}\bar{v}_e$$

si el plasma está en equilibrio esa producción es nula, lo que permite obtener la densidad electrónica que adquiere el plasma en el campo  $E$  y a la presión  $p$  del gas, pues todos los coeficientes que en ella intervienen son funciones de  $E/p$  calculados teóricamente o determinados experimentalmente.

La ecuación precedente se suele escribir en la forma

$$\frac{dn_e}{dt} = \alpha n_e - \beta n_e - \gamma n_e^2$$

donde  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son respectivamente las probabilidades de ionización, captura y recombinación.

#### 18.4.2. Difusión y deriva de los iones en un campo

En la descarga la energía entra por la acción del campo eléctrico aplicado que actúa sobre los iones presentes.

Por su menor masa, los electrones son los que más alteradas tienen sus trayectorias debido a la presencia del campo eléctrico. Si el campo tiene valores moderados, la nube electrónica se desplaza con una velocidad en la que el rozamiento a que equivalen las colisiones inelásticas equilibra a la fuerza del campo. Esta fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad y por lo tanto la velocidad de deriva de la nube electrónica es

$$\mathbf{v}_d = k\mathbf{E}$$

esta velocidad de deriva, junto con la velocidad de agitación térmica, constituyen la corriente en cada punto:

$$\mathbf{J} = -D\nabla n_e + n_e\mathbf{v}_d = -D\nabla n_e + n_ek\mathbf{E} \quad (18.4)$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión y la constante de rozamiento  $k$  (conocida como *movilidad*) puede relacionarse con  $D$ . Para ello basta suponer al sistema en equilibrio térmico bajo la acción del campo  $\mathbf{E}$  pero con corriente nula. Es un problema análogo al de la atmósfera sobre la superficie terrestre. Se puede resolver con la distribución de Maxwell-Boltzmann como la mencionada ecuación barométrica, y se obtiene:

$$\nabla n_e = \frac{n_e e}{k_B T} \mathbf{E}$$

con este resultado en la ecuación 18.4

$$0 = -D \frac{n_e e}{k_B T} \mathbf{E} + n_e k \mathbf{E}$$

se obtiene la *ecuación de Einstein*

$$k = \frac{eD}{k_B T},$$

válida para  $E/p \leq 2 \text{ V/cm torr}$ . La velocidad de deriva en un gas ideal ( $pV = Nk_B T$ ) es

$$v_d = \frac{eD}{k_B T} E = eDNE/p$$

(recordemos que  $N$  es el número de moléculas por unidad de volumen). Cuando los campos son más elevados la relación deja de ser válida; se pueden obtener con diferentes criterios otras relaciones teóricas que, en general, observan la forma

$$v_d = k_d \left( \frac{E}{p} \right)^{n_d}$$

En el caso del nitrógeno se pueden usar hasta  $100 \text{ V/m}$  los valores  $k_d = 7.94 \times 10^6$  y  $n_d = 0.83$ .

La forma de la ecuación para la velocidad de arrastre en campos más intensos se puede obtener mediante un razonamiento basado en considerar el plasma de electrones y átomos o moléculas del gas como un gas de esferas duras (ver apéndice ??). En efecto, con la notación del apéndice, podemos considerar las esferas 1 como los electrones,  $\bar{v}_1 = \bar{v}$  y a los átomos o moléculas como las esferas 2, es decir,  $\bar{v}_2 = \bar{V}$ ,  $N_2 = N$ . En estos plasmas débilmente ionizados y en una primera aproximación podemos no tener en cuenta las colisiones con los iones positivos. Tampoco, en consecuencia, consideraremos su movimiento.

Bajo la acción del campo eléctrico aplicado al plasma, el gas de electrones sufre un empuje o arrastre. Esto se traduce en un movimiento de conjunto del gas con una velocidad de deriva  $v_d$  respecto a los átomos o moléculas. Una primera estimación de la velocidad de deriva se puede obtener con el siguiente razonamiento: bajo la acción del campo  $E$  el electrón experimenta una aceleración  $eE/m$  que en el tiempo de vuelo  $\tau$  entre colisiones con las moléculas produce una velocidad

$$v_d \simeq \left( \frac{eE}{m} \right) \tau$$

Una expresión más refinada se puede obtener usando las leyes de conservación del momento y la energía en los choques y promediando sobre el conjunto. También hay que tener en cuenta la naturaleza de la interacción, por lo que en general se obtienen expresiones del tipo

$$v_d = \xi \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \left( \frac{eE}{m} \right) \tau = \xi \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) eE\tau, \quad \xi \simeq 1$$

donde  $M$  sería la masa de las moléculas y  $\tau$  el tiempo  $\tau_{12}$  calculado en el apéndice (ec. ??). No obstante, al calcular la velocidad  $\bar{v}_r$  debemos considerar al menos dos casos extremos por las diferentes aproximaciones que requieren.

### Campos bajos

Si el campo eléctrico  $E$  aplicado es lo suficientemente pequeño para que no se haya alterado apreciablemente el equilibrio térmico

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{1}{2}M\bar{V}^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

entonces ( $\sigma_0 = \bar{\sigma}_e$ )

$$\begin{aligned}\bar{v}_r^2 &= 3k_B T \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \\ \tau^{-1} &= \bar{\sigma}_e N \left[ 3k_B T \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \right]^{1/2} \\ \bar{v}_d &= \frac{\xi}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^{1/2} \frac{e}{(k_B T)^{1/2} \bar{\sigma}_e} \frac{E}{N}\end{aligned}$$

para campos suficientemente bajos se puede calcular

$$\xi = \frac{3}{16} \sqrt{6\pi} = 0.814.$$

### Campos altos

Si los campos son muy elevados, se puede despreciar la energía térmica frente a la adquirida en el tiempo de vuelo libre de los iones. No obstante no sería correcto tomar directamente que la velocidad  $\bar{v}$  de los electrones es  $\bar{v} = v_d$ . La razón de esto es que las colisiones no sólo absorben energía del electrón sino que una parte de la energía que lleva la conserva pero en dirección aleatoria. Así, la energía de los electrones sigue repartida en una parte de deriva con la velocidad  $v_d$  y una parte aleatoria. Utilizando las leyes de conservación del momento y la energía y promediando sobre las colisiones se tiene

$$m\bar{v}^2 = (m + M)v_d^2 \rightarrow \bar{v}^2 = \left( 1 + \frac{M}{m} \right) v_d^2 \stackrel{m \ll M}{\simeq} \frac{M}{m} v_d^2$$

por lo tanto,

$$\bar{v}_r = \left[ \left( 1 + \frac{M}{m} \right) v_d^2 + \bar{V}^2 \right]^{1/2} \simeq \left( 1 + \frac{M}{m} \right)^{1/2} v_d$$

quedando

$$v_d = \xi^{1/2} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^{1/4} \left( \frac{e}{M^{1/2} \bar{\sigma}_e} \right)^{1/2} \left( \frac{E}{N} \right)^{1/2}$$

aquí

$$\xi = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{3} [\Gamma(\frac{3}{4})]^2} = 0.805.$$

### 18.4.3. Campos intermedios

Suponiendo aditivas las energías térmicas y de campo tendríamos

$$\overline{v_r^2} = \overline{v^2} + \overline{V^2} = 3k_B T \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) + v_d^2 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \quad (18.5)$$

con lo cual ahora hay que resolver la ecuación bicuadrada

$$(v_d^2)^2 + \frac{3k_B T}{M} (v_d^2) - \frac{\xi^2}{M} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \left( \frac{eE}{N\sigma_e} \right)^2 = 0.$$

La solución de esta ecuación permite encontrar la velocidad de deriva con la que obtener  $\overline{v_r}$  mediante la ecuación 18.5. La velocidad media  $\overline{v_r}$  es la que se necesita en el cálculo de los ritmos de ionización y excitación en la descarga junto a las secciones eficaces.

La solución de la ecuación es

$$v_d^2 = -\frac{3k_B T}{2M} + \sqrt{\left( \frac{3k_B T}{2M} \right)^2 + \frac{\xi^2}{M^2} \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \left( \frac{eE}{N\sigma_e} \right)^2}$$

y representa una fórmula razonable de interpolación para todos los campos con  $\xi = 0.81$ :

$$v_r^2 = \frac{3k_B T}{2m} \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \left[ 1 + \sqrt{1 + \xi^2 \left( 1 + \frac{M}{m} \right) \left( \frac{\frac{eE}{N\sigma_e}}{\frac{3}{2}k_B T} \right)^2} \right].$$

## 18.5. Bombeo electrónico

El bombeo electrónico se produce estableciendo una descarga eléctrica a través de un gas. El gas se ioniza en presencia del campo eléctrico establecido entre los electrodos. Éste acelera los iones del gas y los impactos de aquellos con las moléculas neutras producen iones secundarios que se vienen a unir a los preexistentes, contribuyendo de esta forma a aumentar el grado de ionización del gas. Al mismo tiempo los iones de signos opuestos tienden a recombinarse y convertirse en moléculas neutras.

Al principio la población de iones existentes es muy baja, y su origen es diverso y más o menos casual (rayos cósmicos, ionizaciones por radiación ultravioleta y espontáneas, de origen colisional, etc.). Por lo tanto en la fase inicial predominan los procesos de ionización sobre los de recombinación. Durante el desarrollo de la descarga, sin embargo, se puede llegar a un equilibrio entre unos y otros, quedando entonces una población estable de iones en la descarga. Si el gas posee un cierto grado de afinidad electronegativa también se pueden dar procesos de captura de electrones por moléculas neutras, creándose iones negativos pesados como los positivos. Ni unos ni otros pueden adquirir gran velocidad y, por tanto, apenas contribuyen a la ionización del gas, que se produce fundamentalmente por impacto de los electrones.

De la misma forma, son los impactos de los electrones los que producen la mayoría del conjunto de moléculas excitadas.

Si la densidad electrónica en la descarga es  $n_e$ , la densidad de moléculas es  $N$ , la sección eficaz de excitación por impacto electrónico es  $\bar{\sigma}_e$  y la velocidad media de los electrones es  $\bar{v}$ , el número de excitaciones producidas por impacto de electrones en la unidad de tiempo es

$$P = \left( \frac{dn_e}{dt} \right)_c = \bar{\sigma}_e n_e N \bar{v}.$$

Si las energías cinéticas de los electrones bajo la acción del campo eléctrico son mucho mayores que las de equilibrio térmico se tiene que, aproximadamente,

$$\bar{v} \simeq \sqrt{\frac{M}{m}} v_d$$

donde  $M$  es la masa de las moléculas y  $v_d$  la velocidad de deriva del gas electrónico bajo la acción del campo eléctrico.

La densidad de corriente en la descarga es  $e n_e \bar{v}_d$  y si, como es frecuente en un láser ésta se encuentra confinada en un tubo de sección  $S$  la corriente a su través será  $i_e = e n_e \bar{v}_d S$ . Con ello

$$P = \bar{\sigma}_e N \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{i_e}{S e}$$

entonces el bombeo a los niveles entre los que se pretende obtener inversión de población será

$$P = P_2 - \frac{g_2}{g_1} P_1 = N \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{i_e}{S e} \left( \bar{\sigma}_{e2} - \frac{g_2}{g_1} \bar{\sigma}_{e1} \right)$$

por lo tanto, si una vez conocidas las secciones eficaces se comprueba que

$$\frac{\bar{\sigma}_{e2}}{g_2} > \frac{\bar{\sigma}_{e1}}{g_1}$$

entonces se sabe que el bombeo podrá producir inversión de población y una ganancia en pequeña señal que será:

$$\alpha_0 = \sigma_{21} \tau P = \sigma_{21} \tau N \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{i_e}{S e} \left( \bar{\sigma}_{e2} - \frac{g_2}{g_1} \bar{\sigma}_{e1} \right)$$

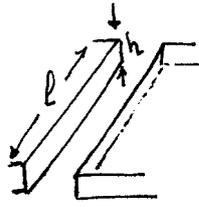
expresión que permite obtener la densidad de corriente umbral en la descarga,  $j_{eu} = i_{eu}/S$ :

$$j_{eu} = \frac{e \ln RT_i}{\sigma_{21} \tau N \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{i_e}{S e} \left( \bar{\sigma}_{e2} - \frac{g_2}{g_1} \bar{\sigma}_{e1} \right)}.$$

Si el bombeo electrónico no se efectúa directamente a los niveles láser el problema puede ser más complicado.

En el caso de un láser de avalancha la intensidad de radiación amplificada era

$$I = \frac{h\nu_0 P l}{2}$$



**Figura 18.11:** Geometría transversa para el bombeo electrónico.

por lo tanto, y usando la expresión obtenida para el bombeo ( $g_2 \simeq g_1$ )

$$I = \frac{h\nu_0}{2e} \frac{l}{S} \sqrt{\frac{M}{m}} N (\sigma_{e2} - \sigma_{e1}) i_e$$

**Ejemplo** En el caso del láser de nitrógeno ( $\lambda = 337 \text{ nm}$ ) se tiene  $h\nu_0/e = 3.68 \text{ eV}$  y  $\sqrt{M/m} = 226$ . Las secciones eficaces para la excitación desde el estado fundamental a los niveles láser por impacto de electrones (de energía media  $\simeq 36 \text{ eV}$  son  $\sigma_{e2} = 6.2 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_{e1} = 1.8 \times 10^{-18} \text{ cm}^2$ . Por tanto, suponiendo  $p = 50 \text{ mb}$  y  $T = 300 \text{ K}$  y usando  $N = p/(k_B T) \simeq 1.2 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$  sólo queda precisar el factor geométrico  $l/S$ .

En bombeo transverso (figura 18.11), si  $l$  es la longitud de los electrodos (y por tanto también la de amplificación), y  $h$  es del orden de su anchura (y por tanto la del plasma),  $S = lh \rightarrow l/S = h^{-1}$ . Tomando una distancia entre electrodos de  $8 \text{ cm}$  y un valor  $i_e \simeq 10^3 \text{ A}$  se tiene una intensidad de salida bastante razonable:

$$I \simeq 2.7 \text{ MW cm}^{-2}.$$



# Historia

## 1.0.0 - 15 de abril de 2004

- Primera versión pública, basada en los los temas expuestos en el curso de la asignatura Física del láser impartida en la licenciatura de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid por José Manuel Guerra Pérez.
- Pasados a máquina, con numerosas figuras por Roberto Arévalo, Lucas Lamata, José Augusto Rodrigo, Isabel González y Álvaro Tejero.
- Reorganización de la estructura, con la creación de cuatro apéndices - ATC, JGP.
- Corrección de erratas, revisión notacional, mejoras a la presentación - ATC, JGP.
- Compleción de la nómina de figuras - ATC, Robert Jördens.

Las siguientes tareas merecen atención, a juicio de los editores y autores:

- Incorporar ejercicios.
- Completar la bibliografía indicando las ediciones más actuales.
- Completar y homogeneizar el índice de materias.



# Creative Commons Deed

## Attribution-NonCommercial-ShareAlike 1.0: Key License Terms

**Attribution.** The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees must give the original author credit.

**Noncommercial.** The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees may not use the work for commercial purposes – unless they get the licensor’s permission.

**Share Alike.** The licensor permits others to distribute derivative works only under a license identical to the one that governs the licensor’s work.

Whoever has associated this Commons Deed with their copyrighted work licenses his or her work to you on the terms of the Creative Commons License found here: [Legal Code \(the full license\)](#)

---

This is not a license. It is simply a handy reference for understanding the Legal Code (the full license) - it is a human-readable expression of some of its key terms. Think of it as the user-friendly interface to the Legal Code beneath. This Deed itself has no legal value, and its contents do not appear in the actual license.

Creative Commons is not a law firm and does not provide legal services. Distributing of, displaying of, or linking to this Commons Deed does not create an attorney-client relationship.

[Learn how to distribute your work using this license](#)



# Manifiesto de Alqua

## Origen y metas del proyecto

En 1999 fundamos el proyecto Alqua con el objetivo de promover la creación de un fondo de documentos libres de carácter científico que permita a cualquiera aprender con libertad.

Al constatar la duplicación de esfuerzos en la preparación de materiales didácticos para la física y con el deseo de compartir nuestros conocimientos, nos inspiramos en los principios de libertad que rigen el movimiento del software libre para establecer aquéllos de Alqua. Primero pensamos que lo que escribiésemos debería poder disfrutarse sin merma de libertad por las personas interesadas, y más tarde decidimos organizar nuestros esfuerzos para ayudar a otras personas que compartían nuestra visión a difundir sus saberes mediante un esfuerzo cooperativo.

Para hacer efectivos dichos principios decidimos que los documentos publicados deben ser libres en un sentido amplio: pueden reproducirse y distribuirse (gratuitamente o no, es irrelevante) pero también pueden modificarse y usarse como base para otros trabajos. A fin de evitar que estas libertades del lector-autor se restrinjan posteriormente, los documentos contienen una licencia que explica los derechos que posee y estipula que nadie que distribuya el documento, modificado o no, puede hacerlo de modo no libre.

## Las ventajas de los documentos libres

Actualmente es ilegal compartir o modificar la mayoría del conocimiento científico en fuentes impresas, que suelen ser inaccesibles para la mayoría de los estudiantes y bibliotecas del mundo en virtud de su precio y se actualizan con poca frecuencia debido a su sistema de distribución tradicional.

En este contexto los documentos libres presentan ciertas ventajas.

Por una parte, en algunas disciplinas los documentos libres permiten facilitar el establecimiento de un sistema de mérito reduciendo las barreras de precio y disponibilidad. El modelo de desarrollo libre para la ciencia se apoya sobre las libertades de distribución y modificación. Éstas se ven favorecidas por el medio digital, así como por la concepción del conocimiento como un patrimonio comunitario. Todo lo anterior permite reducir el coste del documento a una cantidad marginal y anima a que lo mejor se combine con lo mejor para producir un resultado excelente a la vez que actualizado.

Por otra parte, en casos donde la evaluación del mérito es más subjetiva, los documentos libres pueden aportar una base sobre la que elaborar con un menor esfuerzo diferentes perspectivas doctrinales o estéticas, mutaciones, iteraciones y apuestas que incentivan la

creación como un aspecto más del disfrute de la obra.

En suma, los documentos libres fomentan un acceso a la cultura más justo y completo. Para algunos dominios del conocimiento científico el proceso de desarrollo libre facilita la recombinación, lo que permite la producción de obras muy sofisticadas y completas mientras que en otros ámbitos facilita la difusión de perspectivas plurales y la experimentación creativa.

## Una nueva dinámica de creación y aprendizaje

Algunas personas que hemos conocido están interesadas por este modelo de colaboración, pero se preguntan qué clase de control tienen sobre sus documentos libres. La respuesta es sencilla: la licencia está diseñada de modo que a cada cual se le atribuya aquello de lo que es responsable y nada más. Para ello, se incluye en el documento una sección en la que se explica quién hizo qué y cuándo lo hizo.

Uno de los efectos más interesantes de introducir los documentos libres en el aula es que difuminan la frontera entre quien aprende y quien enseña. Los documentos libres son un puente para establecer contacto con una comunidad de interés mucho más vasta que la del centro educativo, permitiendo el aprendizaje continuo y fomentando una experiencia plural y transformadora: el criterio para participar en un documento es, solamente, hacerlo bien.

Un autor puede pensar que distribuir su documento bajo un copyright que restringe la libertad de copia es *más rentable* que otorgar mayores libertades. Esto no es necesariamente así, por varias razones.

En primer lugar, libre no quiere decir gratuito. Una editorial puede publicar un documento libre obteniendo beneficio de ello. De hecho, es una buena idea hacerlo dado lo agradable que resulta manejar un libro bien encuadernado. También los autores pueden aceptar una compensación de los lectores por su trabajo en un determinado documento.

En segundo lugar, la mayor parte de los autores son primeramente lectores. Cabe esperar, pues, que para la mayoría el enorme ahorro derivado del acceso a *muchos* documentos libres supere holgadamente el beneficio económico obtenido de *unos pocos* documentos no libres. La experiencia del software libre lo avala.

Finalmente, no se puede poner precio al beneficio social derivado de la existencia de documentos libres. Gracias a los derechos que uno posee sobre un documento libre puede adaptarlo para un curso académico eliminando lo que no es pertinente o es demasiado avanzado y complementando el tema con nuevas aportaciones, desde ejercicios o diagramas hasta apartados enteros.

Pensamos que las universidades u otras instituciones educativas podrían cumplir mejor su función social poniendo a disposición de la sociedad que las financia, en condiciones de libertad, su patrimonio más importante: el conocimiento.

El modelo de cooperación que proponemos (que anima al trabajo en equipo aunque no lo impone) permite abrir todas estas perspectivas y algunas más. Alqua intenta ofrecer los medios para esta tarea y relacionar, a través de los documentos libres, a los que tienen saberes que comunicar y a los que sienten curiosidad por dichos saberes.

## **Conclusión**

Alqua tiene una tarea muy ilusionante y tan ambiciosa que sólo es factible en comunidad. Por ello, pedimos a las personas que forman parte de instituciones o empresas que colaboren con Alqua para que éstas apoyen económicamente el proyecto o patrocinen ediciones impresas y donaciones a las bibliotecas públicas. Ciertamente, los medios materiales son necesarios, pero inútiles si, a nivel particular, no contamos con tu participación como individuo, aprendiendo y enseñando, para que los documentos libres en marcha y otros nuevos alcancen los altos niveles de calidad a los que aspiramos.

Te invitamos a construir un patrimonio científico que nos pertenezca a todos.

---

Versión 2.0, marzo de 2003

<http://www.alqua.org/fundamentos/manifiesto-de-alqua> Copyright (C) Álvaro Tejero Cantero y Pablo Ruiz Múzquiz, 2003.



# El proyecto libros abiertos de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el [manifiesto de Alqua](#) y las [directrices para documentos libres de Alqua](#). Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.

## Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.
- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.
- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.

- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

## ¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

## ¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, <http://alqua.org>

2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.
3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.
4. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a [contacto@alqua.org](mailto:contacto@alqua.org).

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

## En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el [manifiesto de Alqua](#), persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

---

(C) Álvaro Tejero Cantero, 2003.



**Física del láser**  
*Volumen 1: fundamentos*  
José Manuel Guerra Pérez

**descripción**

Un curso de física del láser en el que se describen sus fundamentos en la teoría cuántica de la radiación, el funcionamiento de los resonadores comúnmente utilizados, el proceso de amplificación y los métodos de bombeo para instalar la inversión de población. El libro se centra en los fundamentos teóricos que mayor dificultad pueden ofrecer al estudiante no especializado, exponiéndolos de una forma detallada, ordenada y lo más autoconsistente posible. Contiene ejemplos y numerosas figuras.

**requisitos**

- Un curso de electromagnetismo que cubra las ecuaciones de Maxwell.
- Un curso de física cuántica.
- Un curso de óptica electromagnética.

<http://alqua.org/documents/FdL>

Aprende en comunidad - <http://alqua.org> <

**otros documentos libres**

Variedades, tensores y física - Óptica electromagnética - Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción a la física cuántica, segunda parte - Redes y sistemas - Sistemas Operativos - Geometría simpléctica - Física del láser - Análisis funcional - Mecánica lagrangiana - Geografía general de España (en preparación).

<http://alqua.org/documents/>

alqua, **madeincommunity**