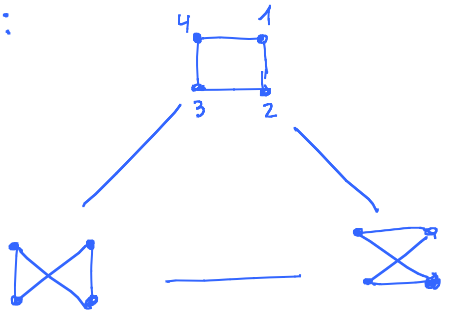
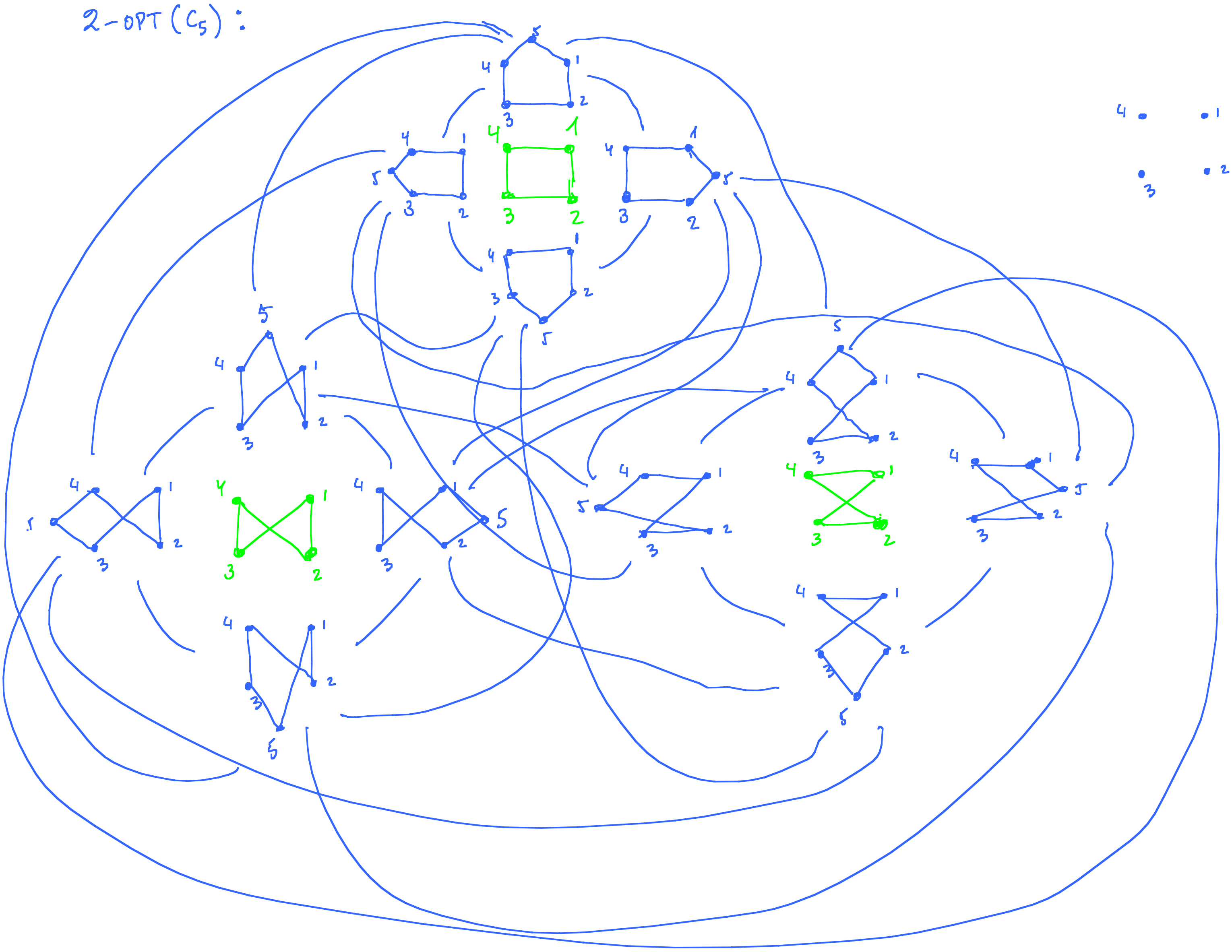
18-03-2011

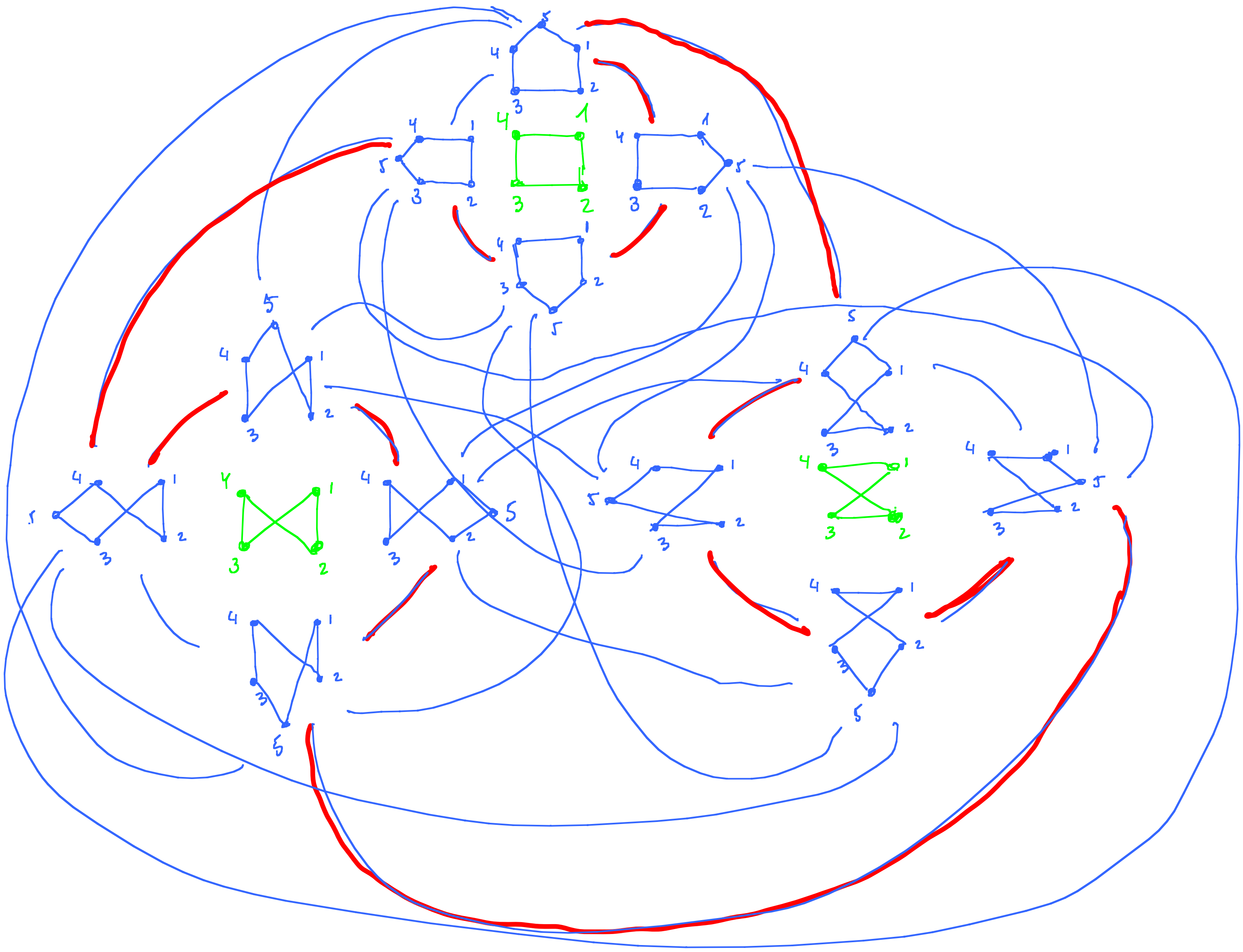
$2\text{-OPT}(C_4)$:



$2\text{-OPT}(C_5)$:



Ciclo hamiltoniano en 2-OPT(C_4):

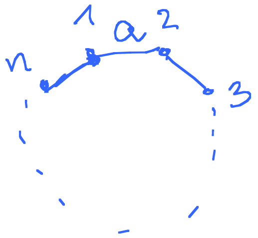


¿ Valdrá una estructura parecida para n ?

<u>Lema</u>: Sea $v \in$ 2-OPT(C_{n+1}) el vértice obtenido al partir la arista a de un ciclo C_n de 2-OPT(C_n), entonces $\delta_{n+1}(v) = 2 + n_1 + 2n_2$, siendo n_1 el nº de vértices de 2-OPT(C_n) adyacentes a a que tienen la arista a y n_2 el nº de tales adyacentes que no la contienen.

<u>Dem</u>: Bastará probar que $2 + n_1 + 2n_2 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$

n_1:

$v =$ 

$\delta_n(v) = \frac{n(n-3)}{2}$

$n_1 = |\{v \in V(2\text{-opt}(C_n)) \mid a \in v\}|$

Si contraemos la arista a obtenemos $v \in V(2\text{-opt}(C_{n-1}))$

$$n_1 = 1 + \delta_{n-1}(v) = 1 + \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

quitar las aristas 1n y 23

$n_2 = n-3$ pues serían los adyacentes a v_n quitando la arista 12 y otra:

$\left(n_1 + n_2 = \frac{n(n-3)}{2}\right)$

y fácilmente se ve que

$$2 + n_1 + n_2 = 2 + 1 + \frac{(n-1)(n-4)}{2} + n - 3 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

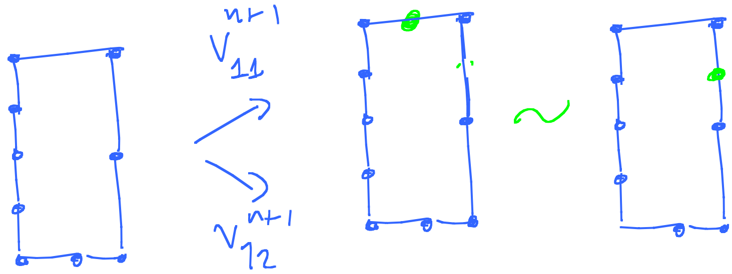
cqd.

Notación: $v_1^n \in V(2\text{-OPT}(C_n))$ y al romper una arista obtenemos un vértice $v_1^{n+1} \in V(2\text{-OPT}(C_{n+1}))$

Lema: Sea $\{v_1^n, v_2^n\} \in A(2\text{-OPT}(C_n))$. $\forall v_1^{n+1}$, hijo de v_1^n, $\exists v_2^{n+1}$ hijo de v_2^n tal que $\{v_1^{n+1}, v_2^{n+1}\} \in A(2\text{-OPT}(C_{n+1}))$

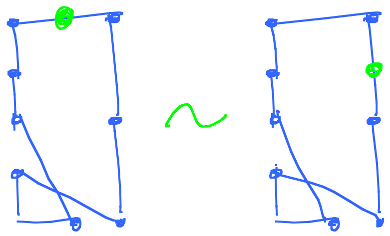
Lema: Dado un $V_1^n \in V(2\text{-OPT}(C_n))$ y dos hijos $V_{11}^{n+1}, V_{12}^{n+1}$ adyacentes entre sí. Cualquier $V_2^n \in V(2\text{-OPT}(C_n))$ adyacente a V_1^n tiene dos hijos $V_{21}^{n+1}, V_{22}^{n+1}$ adyacentes entre sí (formándose un C_4)

Demo: Sea V_1^n:

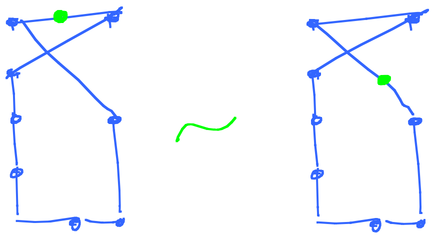


Posibles vecinos de V_1^n:

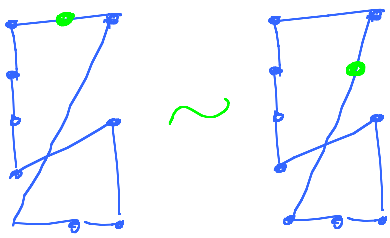
Caso 1:



Caso 2:



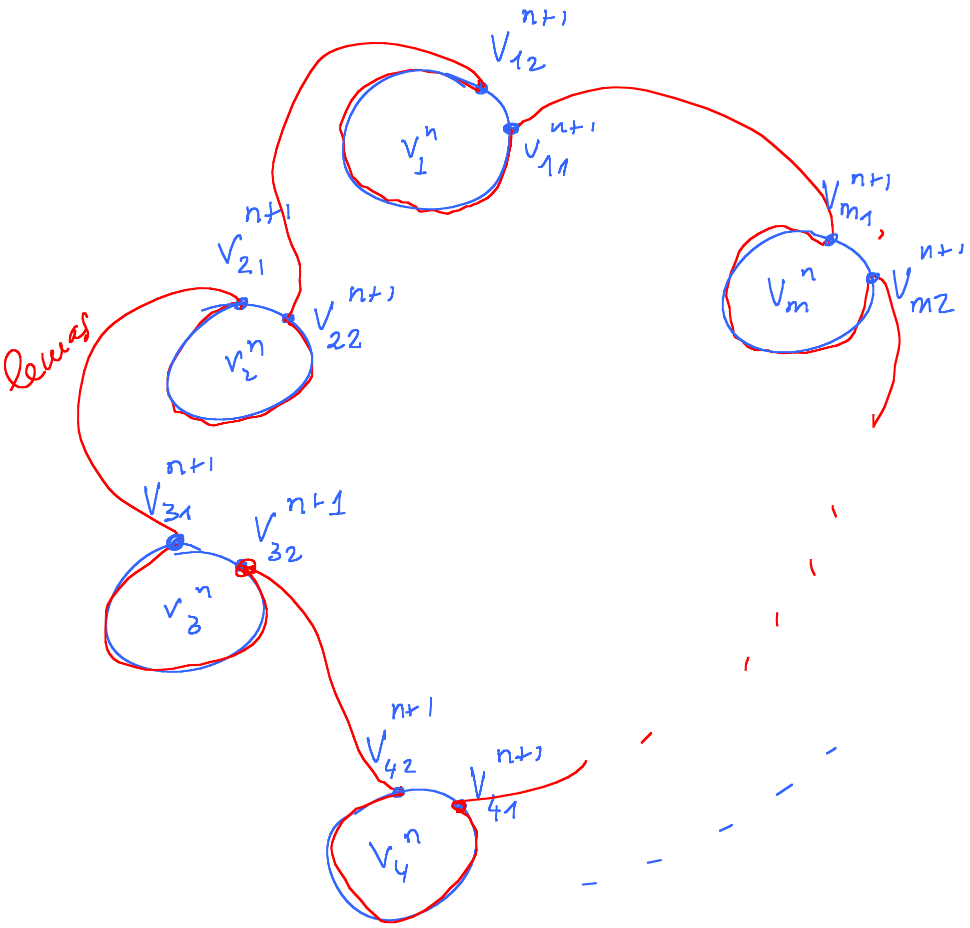
Caso 3:



qed

Teorema (Atienza 1) $2\text{-OPT}(C_{n+1})$ es hamiltoniano

Demo: Sea $m = \frac{(n-1)!}{2} = V(2\text{-OPT}(C_n))$ que da lugar a $2\text{-OPT}(C_{n+1})$ con la estructura anterior:



Y $m = \frac{(n-1)!}{2}$ es par para $n > 4$

$n = 4 \rightarrow$ $2\text{-OPT}(C_{n+1}) = K_{66} - 6e$ que es hamiltoniano.