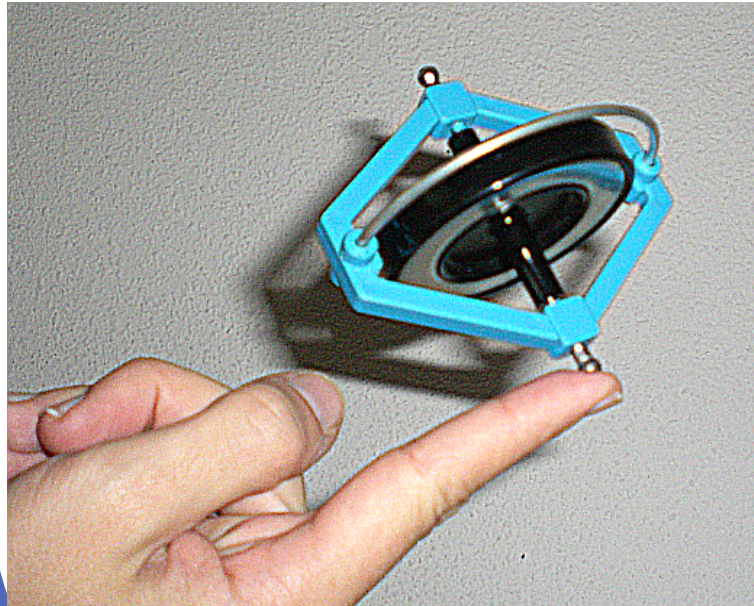


Pablo M. García Corzo

Mecánica y Ondas II:

Sólido Rígido
Oscilaciones
Ondas
Fluidos



<http://alqua.org/documents/LAG>

Pablo M. García Corzo ozrocpablo@gmail.com <http://alqua.org>

Mecánica y Ondas II

versión 0.5.0
29/04/2010



alqua, **madeincommunity**



© 2010 Pablo M. García Corzo

Este documento está bajo una licencia Atribución-No Comercial-CompartirIgual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia escriba una carta a Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA o visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/legalcode.en>.

Las partes del documento que mencionen una licencia distinta se rigen por los términos de aquélla.

CDU 531.5

Area mecánica clásica

Editores

Pablo M. García Corzo ozrocpablo@gmail.com

Notas de producción

alfeizar, v. 0.3 © del diseño Álvaro Tejero Cantero.
compuesto con software libre

Dedicado

A todos los que usan tizas de colores.

Índice general

Portada	I
Copyleft	IV
Índice general	VII
I. Sólido Rígido	5
1. Fenomenología	7
1.1. Péndulo simple Vs. Péndulo físico	7
1.2. Cilindro que rueda	9
1.3. Disco de Maxwell	10
1.4. La tierra y la luna	11
1.5. El carrete travieso	12
1.5.1. Centro de masas	13
1.5.2. Centro instantáneo de rotación	13
1.6. Trompo de Lagrange: el giroscopio	13
1.6.1. Haciendo magia con el giroscopio	14
2. Sintetización	17
2.1. Noción de sólido Rígido	17
2.2. Rotación frente a traslación	18
2.2.1. Momentos frente a fuerzas	18
2.3. Momento de inercia	19
2.3.1. Cálculo geométrico de algunos momentos de inercia	19
3. Construcción del universo	21
3.1. Teoremas geométricos de Euler y Chasles	21
3.2. Grados de libertad	21
3.2.1. Grados de libertad en el movimiento plano	22
3.3. Hacia las ecuaciones de movimiento	22
3.3.1. Momento lineal	24
3.3.2. Energía cinética	24
3.3.3. Momento angular	26
3.3.4. Tensor de inercia	28
3.3.5. Ecuaciones de Euler	32

3.3.6.	Dinámica del sólido libre	34
3.3.7.	Trompo simétrico libre	35
3.4.	La nueva fenomenología	35
3.4.1.	Ángulos de Euler	35
3.4.2.	El trompo de Lagrange	36
3.4.3.	Mirando dentro de la chistera	38
3.5.	Dificultades en el estudio del sólido rígido en el espacio	39
4.	Indagar más en el Sólido Rígido	41
4.1.	Modos de interpretar el movimiento bidimensional del sólido rígido	41
4.2.	Elección sistemática de un sistema de referencia privilegiado	41
4.2.1.	Eje o centro instantáneo de rotación	41
4.3.	En el plano: conceptos de base y ruleta	42
4.3.1.	En el espacio: conos polhodio y herpolhodio	43
4.4.	El trompo de Kovalevskaya	44
4.4.1.	Trompos que pueden estudiarse	44
5.	Resolución de problemas de sólido rígido	47
5.1.	Paralelepípedo libre de momentos con punto fijo	47
5.2.	Energía cinética de una barra respecto a sus extremos	48
5.3.	Cilindro, muelle y plano inclinado	49
II.	Oscilaciones pequeñas	53
6.	Fenomenología	55
6.1.	Harmonices Mundi	55
6.2.	¿Y qué tiene de fascinante un péndulo?	55
6.3.	Oscilador armónico simple	56
6.3.1.	Oscilador armónico unidimensional	56
6.3.2.	Oscilador bidimensional anisótropo	57
7.	Sintetización	59
7.1.	Muelles, masas y paredes	59
7.2.	Potenciales	60
7.2.1.	Equilibrio	61
7.2.2.	Aproximación por potencial armónico	62
8.	Construcción del universo	63
8.1.	Péndulos acoplados	63
8.1.1.	Coordenadas generalizadas	63
8.1.2.	Energía potencial	63
8.1.3.	Energía cinética	63
8.1.4.	Lagrangiano y ecuaciones de movimiento	64
8.1.5.	Coordenadas normales	64

8.1.6. El álgebra de las masas y los muelles	65
8.1.7. Modos normales	66
8.2. Atacando al sistema más general	67
8.2.1. Energía potencial y cinética	67
8.2.2. Lagrange	68
8.3. Método sistemático de ataque	68
9. Rumbo al continuo	71
9.1. El problema de los tres cuerpos	71
9.1.1. Matrices de masas y potenciales	71
9.1.2. Frecuencias y modos normales	72
9.1.3. ¡Un grillón de cuerpos!	73
9.1.4. En busca del orden	73
9.2. Cuerda vibrante de partículas discretas	75
9.2.1. Caso de una sola partícula	76
9.2.2. Caso de dos partículas	77
9.2.3. La cuerda del grillón de partículas	77
9.3. Generalización a sistemas de N cuerpos	78
III. Ondas	79
10. Sintetización	81
10.1. ¿Qué es una onda?	81
10.2. La cuerda vibrante y los padres de la mecánica	81
10.2.1. D’Alambert, el matemático	81
10.2.2. Euler, el físico matemático	82
10.2.3. Bernouilli escucha a la cuerda	82
10.2.4. Luigi de la Grange Tournier	83
10.3. El paso al continuo	83
10.4. Planteamiento continuo	84
10.5. Soluciones	85
10.5.1. Periodicidad en el tiempo: Frecuencia	86
10.5.2. Periodicidad en el espacio: La red recíproca	86
11. Construcción del universo	89
11.1. Principio de superposición	89
11.2. Medios dispersivos	90
11.2.1. Efectos dispersivos	90
11.2.2. Ondas de gravedad (ejemplo de ondas dispersivas)	91
11.3. Energía mecánica asociada a una onda	92
11.3.1. Energía cinética	92
11.3.2. Energía potencial	92
11.3.3. Densidad de energía	93

11.3.4. Transporte de energía	93
11.4. Transmisión y reflexión de una onda	94
11.4.1. Reflexión	95
11.4.2. Transmisión	95
11.4.3. Parámetros característicos de la cuerda: Impedancia Característica	96
IV. Fluidos	97
12. Sintetización	99
12.1. Elasticidad y plasticidad	99
12.2. Fluidos ideales	100
12.3. Resistencia al flujo: Viscosidad	100
12.4. Viscosímetro de Stokes	102
12.5. Tensión superficial	102
12.5.1. Capilaridad: Ley de Jurin	103
13. Fenomenología	105
13.1. Estática de fluidos	105
13.1.1. Tipos de fuerzas	105
13.1.2. Tensiones en el fluido	106
13.1.3. Ecuación dinámica del elemento fluido	110
13.1.4. Principio de Arquímedes	111
14. Construcción del universo	113
14.1. Descripciones Euleriana y Lagrangiana de la cinemática de fluidos	113
14.1.1. Definiciones útiles en la descripción del flujo	114
14.2. Derivada sustancial, derivadas locales y término advectivo	116
14.2.1. La derivada sustancial como operador	116
14.3. Deformaciones en un fluido	117
14.3.1. Tensor de deformaciones	117
14.3.2. Deformación lineal	118
14.3.3. Deformaciones laterales: Rotación y cizalla	119
14.3.4. Tensor de deformación del campo de velocidades	121
14.4. Ecuaciones fundamentales: Leyes de Conservación	123
14.4.1. Conservación de masa: Ecuación de continuidad	123
14.4.2. Conservación del momento: Ecuación dinámica	124
14.4.3. Conservación de la energía: Ecuación de Bernoulli	126
14.5. Flujo Potencial	128
14.5.1. Restricciones necesarias	128
14.5.2. Potencial de velocidades	128
14.5.3. Potencial de corriente	129
14.5.4. Condiciones de Cauchy-Riemann	130

Bibliografía	131
Índice alfabético	132

Sobre el desarrollo de una mecánica constructivista

El arte de la física consiste en levantarle las faldas a la naturaleza para descubrir sus secretos más íntimos y dibujarlos con el más exquisito de los pinceles, la matemática.

En ese romántico afán de descubrimiento cobra un papel trascendente la comprensión de la lógica del mundo y su armonía, y el único camino que nos puede llevar en esa dirección es la generalización de la fenomenología y su descripción con las leyes más sencillas y precisas posibles.

En un primer vistazo al temario de esta asignatura, uno puede quedarse con la impresión de estar frente a tres bloques de materia que abarcan fenomenologías aparentemente desconexas e incluso lejanas.

Giambattista Vico, considerado el primer constructivista, no duda en comenzar sus razonamientos con la consideración de que el hombre sólo puede conocer lo que él mismo crea. Desde el constructivismo sistémico se llega a negar la existencia de una realidad objetiva, lo que podría parecer una negligencia contra el espíritu científico. Sin embargo, lejos de ese absurdo, el constructivismo da al físico el papel de creador del universo y eleva la ciencia a la altura del arte sin perder un ápice de su validez.

Jean Piaget describe el desarrollo genético de la inteligencia como una camino evolutivo en el que la retroalimentación cobra un protagonismo incontestable. Para el bebé que comienza su camino, la realidad es sólo la impresión inmediata de sus sentidos y el universo no tiene sentido objetivo alguno. Cuando una pelota cae y abandona su campo visual, ésta deja sencillamente de existir.

El bebé posee un universo meramente fenomenológico, las cosas suceden porque sí y no es capaz de predecir sucesos que no haya vivido anteriormente.

Un inmediato primer proceso de comparación y distinción le permitirá construir una primitiva abstracción empírica que forjará los cimientos de su universo. Con esa construcción logrará predecir que al bajar la vista hacia el lugar donde la pelota dejó de existir, ésta volverá a materializarse. Construye un universo en el que los objetos no dejan de existir sino que se desplazan de un lugar a otro y es posible encontrarlos de nuevo.

La corroboración de sus predicciones le hace sentir que su modelo de universo funciona bastante bien y llegará a considerarlo como una realidad objetiva. Sin embargo, el universo nunca llega a serlo. El universo es sólo una construcción abstracta que él mismo ha creado con el mismo valor objetivo en sí mismo que el país de las maravillas imaginado por Carroll. El único valor añadido propio de la ciencia está en la retroalimentación experimental y la corrección honesta del modelo para una predicción acertada.

Estudiar, por tanto, la mecánica como si se tratara de un extenso diccionario fenomenológico sería un tremendo error, pues equivaldría a conformarnos con la primera experiencia del niño y no evolucionar en absoluto hacia la ciencia. Podríamos estudiar de este modo el universo con una objetividad ciega, pero no avanzaríamos en nuestra capacidad de predicción más allá de nuestra más inmediata experiencia.

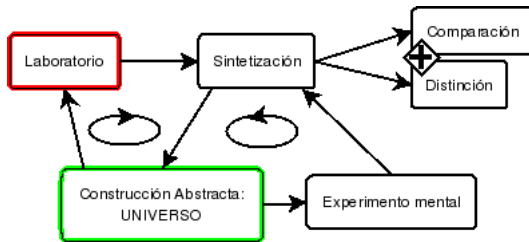
Si, sin embargo, nos dejamos llevar por el espíritu creativo y contemplamos el universo como nuestra propia obra, considerando la ciencia como un verdadero arte es cuando seremos capaces de dejarnos llevar hacia la abstracción más profunda de la mano de la

ÍNDICE GENERAL

matemática y eso nos permitirá abanzar por caminos tan fantásticos como el electromagnetismo, la cosmología, la mecánica cuántica...

No obstante, ha de quedar bien claro que no se trata en ningún momento de caer en la especulación vacía y toda construcción debe ser corroborada por la experiencia en el laboratorio.

Así, aunque el universo construido no es objetivo en absoluto, sí que debe ser coherente con los sentidos, que es la mayor objetividad con que contamos, y en esa retroalimentación desde la matemática hacia el laboratorio es donde reside su valor.



Aceptar estos valores filosóficos debe ayudarnos a definir un esquema lógico a seguir en el desarrollo de este curso de mecánica. Comenzaremos jugando en el laboratorio para poder observar la fenomenología y sintetizarla en un proceso de comparación y distinción.

De la fenomenología debemos ser capaces de construir nuestro universo abstracto y de los formalismos matemáticos predecir nuevas fenomenologías. Las nuevas fenomenologías debemos ponerlas a prueba en experimentos preferiblemente de laboratorio aunque en muchas ocasiones no vaya a ser posible más que plantearlos mentalmente. Sin embargo, aun tratándose de experimentos mentales, podemos tratar de corroborarlos para retroalimentar con los resultados obtenidos nuestro universo enriqueciéndolo y limando asperezas.

Enlace con Mecánica y Ondas I

A lo largo de la asignatura de mecánica y ondas I se lleva a cabo un proceso de generalización de formalismos. Se trata de adquirir una serie de métodos sistemáticos para tratar problemas de dinámica de una forma generalizada.

Partiremos de un formalismo Newtoniano que nos debiera resultar ya familiar.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

En un primer paso de abstracción, trataremos de acercarnos a la mecánica lagrangiana. Ya no necesitaremos imaginar los resultados de un problema previamente a resolverlo, sino que planteando los elementos que conformen nuestro universo sabremos llegar sistemáticamente a la descripción matemática de la evolución del sistema.

La gracia de la mecánica lagrangiana es que no necesitamos acudir a nuestra intuición formada de la experiencia directa para imaginar las fuerzas que intervienen en la dinámica de nuestro sistema.

Sólo tenemos que describir la topología del problema en términos de transformaciones de coordenadas y ligaduras, y todo lo demás aparecerá cuando apliquemos nuestros conjuros matemáticos.

Mediante un proceso de abstracción y subjetivización del universo somos capaces de resolver cuestiones a las que nuestra experiencia sensorial objetiva no ha accedido nunca e incluso quizá nunca pueda acceder.

Esos elementos que conforman el universo y que tendremos que aprender a identificar y caracterizar son:

Ligaduras Su análisis nos dará información sobre los grados de libertad que debemos manejar y por tanto el número de coordenadas generalizadas.

Ecuaciones de transformación Que transformen las coordenadas cartesianas que nos resultan las más naturales en una primera aproximación en unas generalizadas quizá menos intuitivas pero que sin duda la naturaleza parece preferir.

Potencial Los potenciales serán las últimas piezas que conformen nuestro puzzle dinámico describiendo una topología abstracta en términos de energías al espacio de configuraciones.

Con esos elementos llegamos a describir una función Lagrangiana que no sabemos explicar muy bien pero entendemos como una especie de balance de energías

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - U = T_2 + T_1 + T_0 - U_0 - G_1$$

De uno de los términos en ese balance de energías, concretamente T_2 obteníamos unas relaciones matemáticas muy elegantes que nos ayudaban a desacoplar los diferentes grados de libertad de un sistema:

$$\frac{1}{2}m(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Con ello fuimos capaces de entender cómo la naturaleza ve la mecánica y encontrar la expresión más sencilla y elegante posible de la fenomenología.

Posteriormente entramos a formular la mecánica con otra función que llamamos **Hamiltoniana**

Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(p, q, t)$$

Dejamos de describir nuestro universo en función de posiciones y velocidades para hacerlo en función de posiciones y momentos.

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Al hacerlo así pudimos integrar la inercia del sistema de una forma natural en la descripción dinámica.

Además, este Hamiltoniano, bajo ciertas condiciones, coincide exactamente con la energía total del sistema, que es una integral primera, una invariante, y un concepto que ya creemos tener más asimilado y nos resulta más conocido.

$$\mathcal{H} = \sum p\dot{q} - \mathcal{L} \rightsquigarrow \equiv E$$

En todo este proceso de generalización hemos ido construyendo simplificaciones y describiendo el universo con diferentes sistemas matemáticos con la idea de simplificar la naturaleza generalizando conceptos.

Llegamos a los límites de nuestro viaje de generalización cuando nos adentramos en la mecánica relativista redefiniendo la propia geometría del espacio-tiempo completamente fuera del alcance de nuestra experiencia diaria.

Sin embargo, hasta ahora hemos ido generalizando la geometría del espacio y del tiempo, la dinámica que acontece al mover algo, pero no hemos entrado a describir la geometría de ese algo y generalizarlo. De hecho, apenas hemos utilizado otra cosa que no fueran masas puntuales. Pinchamos la pelota para no tener que distinguir si era de rugby o de baloncesto. Para nosotros era sólo un punto matemático con una cualidad que llamamos masa.

A lo largo de este curso nos vamos a meter dentro de las masas puntuales, vamos a darles forma y a describirlas generalizando sus propiedades y utilizando las generalizaciones que ya hemos desarrollado. Esto nos llevará a encontrarnos con pelotas de rugby, monedas, peonzas, vasos de cerveza, ríos, redes cristalinas, e incluso mares.

Parte I.

Sólido Rígido

1. Fenomenología

Queremos hacer física, estudiar el comportamiento de la naturaleza. Empezar esta empresa proponiendo sistemas de coordenadas o describiendo objetos mediante funciones de punto e integrales que aceptamos como verdades de fe sería poco menos que una aberración. Lo primero que hay que hacer es observar la naturaleza para tratar de acercarnos a esa utópica objetividad científica. Hoy los físicos tendemos demasiado en muchas ocasiones a aceptar nuestras etéreas construcciones matemáticas como realidades objetivas y a los resultados algebraicos casi como verdades de fe. ¿Qué nos diría Galileo si levantara la cabeza?

En ramas de la física como la mecánica cuántica, por nombrar el caso más sangrante, es difícil acudir con frecuencia al hecho experimental, a la verdad objetiva, por lo que debemos construirnos un universo extremadamente complejo y oscuro con la esperanza de llegar a un lugar en el que seamos capaces de pararnos, abrir los ojos y comprobar con un experimento que la matemática sigue dando buenos resultados y que nuestro modelo funciona.

Sin embargo, en un tema tan sumamente palpable y accesible como es el que nos disponemos a afrontar no hay excusa posible para no agarrar un sólido rígido y jugar con él.

Es importante insistir en algo que podría parecer tan obvio desde el punto de vista del método científico porque en muchos cursos de dinámica del sólido rígido no se toca un sólo sólido rígido y muchos alumnos estudian el comportamiento de un giroscopio sin haber tocado nunca uno, sin haber sentido o visto las sorprendentes fuerzas que actúan en su movimiento y que sin duda fascinan a nuestros sentidos la primera vez que las experimentamos.

En unos apuntes escritos no se pueden hacer experiencias de cátedra. Aunque quizá lo más conveniente sería poder regalar un giroscopio a cada uno que se dispusiera a estudiar este temario, no está dentro de nuestras posibilidades, por lo que trataremos de hacer un esfuerzo para transmitir las inquietudes que deben llevar al físico a estudiar la dinámica del sólido rígido describiendo lo mejor posible varias experiencias y tratando de animar al lector a jugar con todo lo descrito con sus propios medios.

Trataremos de demostrar que el sólido rígido merece toda la atención que en apartados posteriores le dedicaremos.

1.1. Péndulo simple Vs. Péndulo físico

A lo largo del curso de mecánica y ondas I y en cualquiera de física elemental el péndulo es uno de los primeros juguetes con que se encuentra el estudiante.

1. Fenomenología

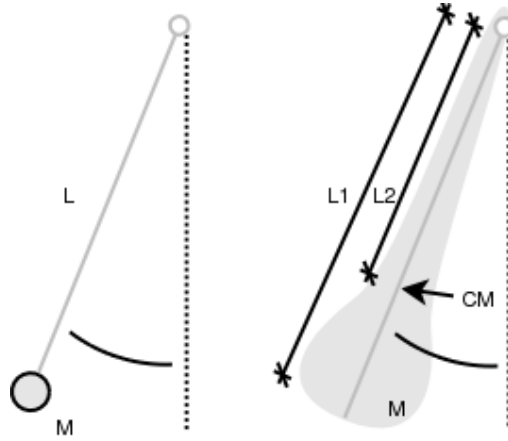


Figura 1.1.: Péndulos matemático y físico

En primer lugar se estudia el péndulo matemático, esto es, una masa puntual pendiente de una ligadura (un hilo sin masa).

$$\left. \begin{array}{l} x = -L \sin \phi \\ y = -L \cos \phi \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -L\dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{y} = L\dot{\phi} \sin \phi \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2$$

$$U = mgh = mgL(1 - \cos \phi)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\phi}^2 - mgL(1 - \cos \phi) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mL^2\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} = mL^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mgL \sin \phi \approx -mgL\phi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \rightarrow mL^2\ddot{\phi} + mgL\phi = 0 \quad (1.3)$$

Suponiendo soluciones armónicas del tipo $\phi = A \cos(\omega t + \delta)$

$$-mL^2\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) + mgLA \cos(\omega t + \delta)$$

$$-L\omega^2 + g = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L} \quad (1.4)$$

Aprendemos que este sistema oscila en torno a un punto de equilibrio y que tiene una frecuencia que no depende de la amplitud con que lo hayamos puesto a oscilar ni de la masa que tenga,¹ sino exclusivamente de la gravedad y de la longitud del hilo. Ese es un

¹En aproximación para oscilaciones pequeñas

detalle que pudo sorprender a nuestra experiencia en su momento.

Veamos qué sucede si en lugar de un péndulo matemático nos encontramos con algo más realista, un péndulo físico. Ya no es una masa puntual pendiente de un hilo sin masa sino un sólido rígido con un punto fijo que se mueve en el plano.

$$\begin{aligned}
 T' &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \\
 \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(mL^2 + I)\dot{\phi}^2 - mgL(1 - \cos\phi) \\
 \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} &= 0 \\
 -(mL^2 + I)\omega^2 + mgL &= 0 \\
 \omega'^2 &= \frac{mgL}{mL^2 + I}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

También oscila, y la frecuencia de sus oscilaciones tampoco depende de la amplitud con que activemos su movimiento, pero ahora sí que está en las ecuaciones la masa y ese nuevo término que es el momento de inercia.

El momento de inercia tiene que ver con la geometría del cuerpo, pues ha aparecido al darle forma a la masa puntual. Más adelante, al estudiar en detalle el momento de inercia, veremos que en realidad la masa continúa sin figurar en la expresión de la frecuencia del péndulo, ya que hay una dependencia implícita en el momento de inercia.

1.2. Cilindro que rueda

Otro de los problemas con los que nos aburrieron hasta la saciedad durante los primeros cursos de física es el del plano inclinado.

¿Por qué péndulos y planos inclinados? La respuesta es histórica y viene de Galileo. Quería estudiar la caída de los cuerpos pero sucedía demasiado rápido para medirlo con precisión. Galileo trató de buscar la forma de “hacer caer más despacio los cuerpos”.

Hay otro paralelismo interesante (que Galileo no creo que advirtiera) entre estos dos sistemas. Para verlos, basta plantearse sendos problemas en coordenadas polares planas y ver qué sucede con las coordenadas radial y angular.

En este caso sucedía algo similar que con el péndulo al plantear la diferencia entre el movimiento del móvil que se desliza y el del que rueda sin deslizar:

1. Fenomenología

$$\begin{aligned}T_{\text{desliza}} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\T_{\text{rueda}} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 \\U &= -mg\frac{x}{\sin\alpha} \\\mathcal{L}_{\text{desliza}} &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg\frac{x}{\sin\alpha} \\&\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow m\ddot{x} - \frac{mg}{\sin\alpha} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{\sin\alpha} \\\mathcal{L}_{\text{rueda}} &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 + mg\frac{x}{\sin\alpha} \\&\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \rightarrow \left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} - \frac{mg}{\sin\alpha} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}\frac{g}{\sin\alpha}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Vemos de un primer plumazo que la aceleración es igualmente constante pero cuantitativamente menor en el caso del cilindro que rueda. Al pensar en términos de energía, no toda la energía potencial es invertida en acelerar el centro de masas del sistema sino que una parte importante es destinada a hacer girar el cilindro, dirigiéndose hacia un término que involucra al momento de inercia y al radio del cilindro.

Es interesante pensar que cuando el momento de inercia toma la expresión $I = mr^2$ desaparece de la aceleración la dependencia explícita con la masa al igual que sucedía con una masa puntual que se desliza por el plano, salvo que aparece un término $\frac{1}{2}$. Parece que este sistema es el más justo e imparcial, pues la energía es repartida a partes iguales entre rotación y traslación.

1.3. Disco de Maxwell

disco de Maxwell

El caso del **disco de Maxwell** es el límite del caso del cilindro que rueda sin deslizar cuando el plano inclinado se pone vertical.

La diferencia entre dejar caer el disco de Maxwell contra la gravedad o desenrollándose como un yo-yo es más que evidente para nuestra experiencia.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 \\
U &= U_0 - mgx \\
\mathcal{L} &= T - U = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\dot{x}^2 - U_0 + mgx \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \rightarrow \left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} - mg = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}g \\
\dot{x} &= \ddot{x}t = \frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}gt \\
x &= \frac{1}{2}\ddot{x}t^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}gt^2
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Introduciendo este resultado en la expresión del lagrangiano podemos hacernos una idea de cómo evoluciona el balance energético:

$$\begin{aligned}
T_t &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}gt\right)^2 \\
T_r &= \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\frac{I}{r^2}\left(\frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}gt\right)^2 \\
U &= U_0 - mgx = U_0 - \frac{1}{2}\frac{m}{m + \frac{I}{r^2}}gt^2
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Veamos gráficamente cómo evolucionan las energías cinéticas de rotación y traslación y la energía potencial del sistema en el tiempo. Para la representación cualitativa hemos igualado a 1 todas las constantes salvo el momento de inercia, que hemos igualado a 2 para evitar que se solapasen las curvas de energía cinética de rotación y traslación.

La pérdida de energía potencial no se va directamente a incrementar la energía cinética de traslación sino que se reparte entre ambas y por eso cae más despacio en la práctica.

1.4. La tierra y la luna

Ya hemos estudiado las órbitas de un punto material en torno a un potencial radial y hemos comprendido cómo casar esto con las leyes de la inercia de Newton. Ya tenemos una idea intuitiva más o menos clara de por qué el móvil abandona su trayectoria rectilínea y uniforme para reemplazarla por una elíptica en torno a un objeto que está en uno de sus focos.

Sin embargo, no nos es ajeno que el **movimiento de la luna en torno a la tierra** o el de la tierra en torno al sol no se quedan ahí, sino que hay también un movimiento de rotación e incluso uno más sutil de precesión que no debieran romper con las leyes de la inercia pero puede que no tengamos tan claro que esto no ocurra así.

movimiento de la luna en
torno a la tierra

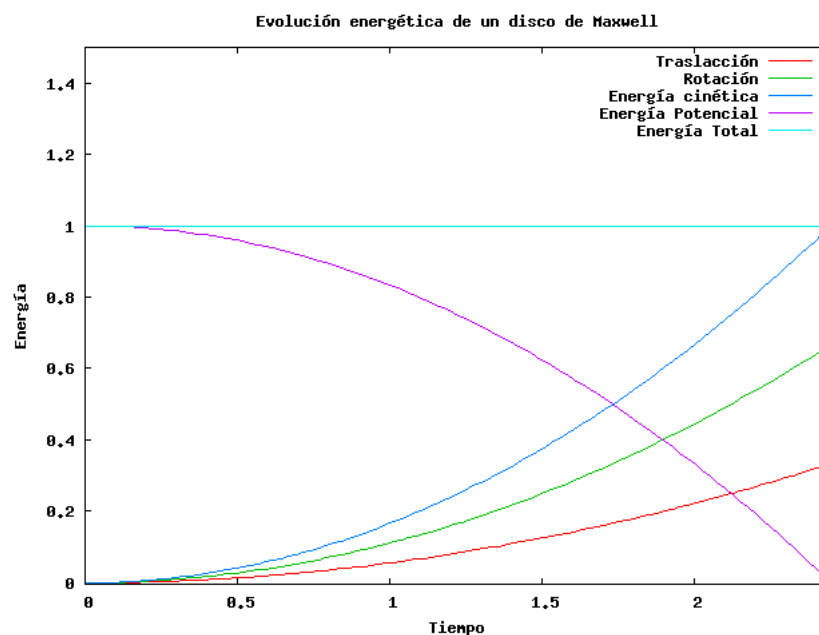


Figura 1.2.: Evolución energética del disco de Maxwell

1.5. El carrito travieso

Imaginemos que un carrito de hilo se nos cae debajo de la cama [Lan78]. Tenemos en nuestra mano el extremo del hilo pero no llegamos a coger el carrito con la mano. ¿Cómo tirar del hilo para que el carrito venga hacia nosotros y no se desenrolle?

Sucede algo bastante asombroso en este sistema. Si tiramos del hilo poniendo éste en posición horizontal, traeremos hacia nosotros el carrito². Sin embargo, al tirar de él con un ángulo grande éste se desenrollará alejándose de nosotros.

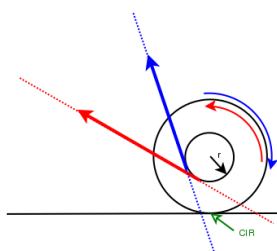


Figura 1.3.: Tirando del hilo

En este caso se pone explícitamente de manifiesto la lucha entre las fuerzas de traslación y las de rotación (los momentos). Es más, una misma fuerza es la que reparte su acción sobre el sistema entre una rotación y una traslación completamente antagónicas.

²En la práctica hemos de realizar fuerzas muy pequeñas y gestos suaves para no romper la ligadura de rodar sin deslizar ni levantar el carrito del suelo.

Podemos buscar una explicación a este fenómeno desde un punto de vista newtoniano de dos modos diferentes:

1.5.1. Centro de masas

Si pensamos en términos del **centro de masas**, el momento que le aplicamos al carrito (la fuerza que le hará tender al giro) es siempre constante si el módulo de la fuerza aplicada no varía. El vector que une el centro de masas con el punto de aplicación de la fuerza tiene un módulo invariante y es siempre normal a la fuerza aplicada.

centro de masas

Sin embargo, al variar el ángulo varían las componentes de la fuerza aplicada al centro de masas normal y paralela al suelo, con lo que se establecerá un equilibrio entre la fuerza aplicada sobre el centro de masas y el momento de giro constante.

Habrà un punto de equilibrio en el que el carrito se estará quieto donde estas fuerzas se igualen.

1.5.2. Centro instantáneo de rotación

Este sistema tiene un **centro o eje instantáneo de rotación (CIR)**³ bien claro donde el carrito entra en contacto con el suelo. El concepto de centro o eje instantáneo de rotación (ver 4.2.1) es algo sutil que quizá no nos sea familiar. Se define como un punto respecto al cual no hay movimiento de traslación de los puntos del sólido. De momento nos quedaremos con que en el caso de cilindros que ruedan sin deslizar, éste coincide con el punto de contacto con el suelo.

centro o eje instantáneo de rotación

Si pensamos en el movimiento desde el punto de vista de este punto, los momentos ya no serán constantes como respecto al centro de masas. Es más, los momentos cambiarán de signo en función de si la prolongación del vector de la fuerza aplicada pasa por un lado u otro del centro instantáneo de rotación.

Habrà un punto de equilibrio donde la prolongación del vector de la fuerza aplicada pase exactamente por el centro instantáneo de rotación.

1.6. Trompo de Lagrange: el giroscopio

La cumbre en nuestro estudio llega cuando la fenomenología observada es completamente nueva e inexplorada para muchos de nosotros. Aquí es donde de verdad entra en juego el espíritu aventurero del científico que le hace desear adentrarse en territorios inexplorados y descubrir los fenómenos más fascinantes.

Todos tenemos más o menos claro cómo se comporta una **peonza** porque hemos jugado con alguna de niños. ¿Nos hemos preguntado alguna vez qué sentiríamos sentados sobre una? ¿Hacia dónde nos empujarían las fuerzas de inercia? Puede parecer una locura

peonza

³El concepto de centro o eje instantáneo de rotación puede ser un concepto complejo y creemos que no merece la pena entrar en profundidad en él en un curso tan extenso como el que abordamos. Sin embargo lo hemos agregado como apéndice al bloque de sólido rígido (??) y en determinados casos bidimensionales en los que su sentido es más intuitivo, acudiremos a él sin entrar a estudiarlo en profundidad.

1. Fenomenología

pensar en algo así, pero cuando nos damos cuenta de que vivimos sobre algo muy parecido a una peonza de inmensas proporciones, el absurdo ya no lo parece tanto.

giroscopio

El **giroscopio** consiste sencillamente en un sólido rígido que gira en torno a su eje de simetría. Su tendencia natural es a mantener constante la orientación de su eje de rotación en contra de las fuerzas externas que traten de perturbarlo.

León Foucault

Fue inventado por un viejo conocido nuestro, **León Foucault**, después de haber demostrado que la tierra giraba con el péndulo que lleva su nombre. A Foucault le molestaba que su péndulo girase más despacio que la tierra en un factor sin (latitud), así que trató de construirse un sistema como la tierra pero un poco más manejable para comprender mejor las fuerzas involucradas en el sistema.



El giroscopio puede usarse para señalar el norte, a modo de brújula. Esta variante es conocida como *girocompás*.

Hay un juguete que se ha puesto bastante de moda llamado “PowerBall”, “Dynabee” o “GyroTwister”. No se trata de nada más que de un giroscopio que activas proporcionándole una cierta velocidad angular. Al tenerlo en la mano se sienten las fuerzas involucradas y si se reacciona contra ellas de una determinada manera se puede frenar o aumentar esa velocidad angular inicial. El objetivo es mantener el sistema activo (girando) el mayor tiempo posible.

Existen unas pequeñas motocicletas teledirigidas que tienen el eje del manillar fijo. Para girar desplazan un contrapeso que simula al motociclista hacia el lado al que se quiere girar. Cualquiera que haya andado en bicicleta sabe que para girar uno se inclina hacia el interior de la curva... ¿Cómo funciona esto? ¿Podríamos conducir una bicicleta con el eje fijo?

1.6.1. Haciendo magia con el giroscopio

Imaginemos un giroscopio sencillo formado con una barra delgada con un disco que gira libremente en torno a ella en un extremo, un contrapeso en el otro extremo y un punto fijo situado justo en el centro de masas.

El disco girará hasta perder por disipación toda su energía cinética sin hacer nada espectacular. Se dice que el **trompo está dormido**.

trompo está dormido

Sin embargo, colgámosle un pequeño peso para desequilibrarlo. La intuición le dice, a quien nunca ha jugado con un giroscopio, que simplemente se balancearía hacia el lugar donde hemos puesto el peso, pero contrariamente a nuestra intuición basada en la experiencia objetiva, éste comienza a girar manteniéndose en el plano horizontal. El trompo ha despertado.

- ¡Magia! ¿Dónde está el truco?
- No hay trucos, sólo tensores.

La ciencia va siempre un paso por delante, así que debemos ponernos a su altura lo más rápido posible para descubrir qué hay escondido en la chistera. Comencemos, pues, nuestro apasionante viaje a lo desconocido.

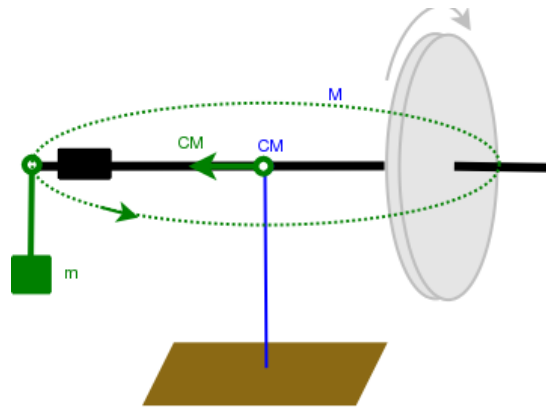


Figura 1.4.: La magia de los tensores

2. Sintetización

Una vez hemos jugado en el laboratorio y nos ha picado nuestra curiosidad científica, tratemos de extraer el meollo de todos estos sistemas, buscar lo que los hace especiales y describirlos en los términos más sencillos posibles para abordarlos matemáticamente.

2.1. Noción de sólido Rígido

Todos tenemos una idea intuitiva más o menos clara de lo que es un **sólido rígido**. Sin embargo, tratar de enunciar de una manera precisa una definición de sólido rígido no es tan simple y encontraremos casi tantas variantes como textos consultemos. Veamos un par de definiciones posibles:

- Llamamos sólido rígido a un sistema de partículas dentro del cual las distancias relativas se mantienen invariantes.
- Un sólido rígido es un sistema material cuyas **ligaduras** internas se conservan invariantes

sólido rígido

ligaduras

Estas (y otras) definiciones comparten el estar divididas en dos partes claramente diferenciadas.

Por un lado, se define el sólido rígido como un *sistema de partículas, sistema material, sistema de puntos materiales...* Lo que nos da la idea de que se trata de una suerte de colectividad.

A continuación las definiciones dan una característica importante acerca de cómo se agrupa esa colectividad: *ligaduras internas conservadas, distancias relativas invariantes...* Es decir, que esas partes que constituyen el todo denominado sólido rígido se mantienen en posiciones fijas unas respecto a otras. Dicho de otro modo, la forma se preserva.

Pensando en dicha noción y en lo que intuitivamente entendemos por sólido rígido, imaginemos un objeto fácilmente deformable como, por ejemplo, una pelota de gomaespuma. Si la apretamos con una cierta fuerza, la deformaremos y no se comportará como sólido rígido según cómo lo hemos definido. Imaginemos ahora, por ejemplo, una varilla de metal. Eso podría parecerse más a un sólido rígido, pero si aplicamos una fuerza suficiente también podríamos deformarla, con lo que ya no se trataría de un sólido rígido.

Parece ser que el que un cierto objeto se comporte o no como sólido rígido, no sólo depende de su naturaleza sino de la magnitud de las fuerzas que actúen en su universo. Bajo ciertas condiciones, una pelota de gomaespuma puede comportarse como sólido rígido y bajo otras podría no hacerlo una varilla de metal.

En virtud a la noción dada, ¿puede el firmamento estrellado ser considerado un sólido rígido?

2. Sintetización

Por otro lado, si pensamos en la *composición cristalográfica* de la materia a nivel cuántico, ni siquiera podríamos definir con exactitud la velocidad y posición de las todas las partículas que componen el cuerpo para ver si conservan sus posiciones relativas, con lo que la noción de sólido rígido deberíamos aplicarla exclusivamente al mundo macroscópico.

Por último, si disparamos nuestro cuerpo a grandes velocidades, la teoría de la relatividad redefiniría las distancias desde la propia geometría del espacio-tiempo dejando bastante inservibles nuestras definiciones.

Con todo, llegamos a la conclusión de que podemos hablar de sólido rígido en un contexto macroscópico y alejado de los límites relativistas y teniendo cuidado de que las fuerzas involucradas sean suficientemente pequeñas.

2.2. Rotación frente a traslación

En el contexto de la mecánica newtoniana, debiera sernos ya familiar el movimiento de rotación y las fuerzas y energías involucradas en él.

Es fácil observar en un primer vistazo las simetrías existentes entre las **ecuaciones de movimiento de Newton para una masa puntual** y las ecuaciones de movimiento involucradas en el movimiento de rotación:

ecuaciones de movimiento de Newton para una masa puntual

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \sum \vec{M} &= I\vec{\alpha}\end{aligned}\quad (2.1)$$

El papel de las fuerzas lo hacen los momentos, el de la masa lo desempeña el momento de inercia y las aceleraciones lineales son substituidas por sus homónimas angulares.

2.2.1. Momentos frente a fuerzas

Cuando aplicamos una fuerza sobre una partícula, está claro dónde se le aplica, pues sólo disponemos de un punto geométrico para hacerlo. Es por ello que sólo aparecían en nuestras ecuaciones la intensidad, dirección y sentido de nuestras fuerzas. Ahora tratamos con sólidos rígidos, conjuntos en general inmensos de partículas sobre los que aplicaremos una fuerza en un punto concreto. El resultado variará en función de dónde apliquemos esa fuerza y será por ello que tendremos que explicitarlo en nuestro formalismo. Así,

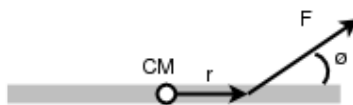


Figura 2.1.: Momentos frente a fuerzas

generalizaremos el concepto de fuerza con el de **momento**, que escribiremos como:

momento

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Donde $\vec{r} = (x, y, z)$ es el vector que va desde el centro de masas (centro geométrico en condiciones de densidad homogénea) del sólido rígido al **punto de aplicación** de la fuerza \vec{F} .

punto de aplicación

El **producto vectorial**, aunque debiera sernos ya bastante familiar, es una receta matemática bastante compleja¹. Veamos cómo se comporta frente a **reflexiones especulares**:

producto vectorial

reflexiones especulares

$(\vec{r}', \vec{F}') \rightarrow (-\vec{r}, \vec{F})$ El momento cambiará también de signo: $\vec{M}' \rightarrow -\vec{M}$

$(\vec{r}', \vec{F}') \rightarrow (-\vec{r}, -\vec{F})$ El momento se mantiene invariante: $\vec{M}' = \vec{M}$

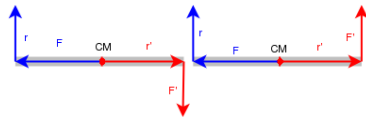
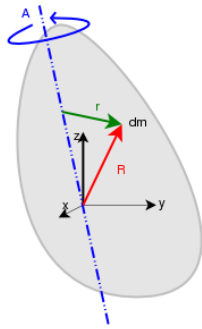


Figura 2.2.: Momentos y reflexiones especulares

2.3. Momento de inercia



Hasta ahora, siempre se ha tratado el **momento de inercia** en casos sencillos en los que lo reducíamos a una cantidad escalar que hacía un papel paralelo al de la masa en movimientos de rotación y que calculamos con una expresión de la forma:

momento de inercia

$$\int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho(r) dV \Rightarrow I_A = \int_V r^2 \rho(r) dV \quad (2.3)$$

Cuando un sólido está anclado en un punto, que es un caso muy común en la fenomenología, la descripción más general de su movimiento consta sencillamente de una rotación en torno a un eje que pasa por dicho punto.

En casos bidimensionales sólo hay un grado de libertad de rotación y por tanto hay siempre un sólo momento de inercia asociado al eje perpendicular al plano del movimiento. Por esos motivo pudimos resolver muchos problemas considerando el momento de inercia como una magnitud escalar.

2.3.1. Cálculo geométrico de algunos momentos de inercia

Varilla

Pensemos en una varilla de longitud L , sección despreciable, masa M y densidad constante $\rho = \frac{M}{L}$

¹Tensor de Levi Civita

2. Sintetización

- Respecto a un eje que pase por el centro de masas y sea perpendicular a la varilla:

$$I = \int_V r^2 \rho(r) dV = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{M}{L} x^3 \Big|_{\pm \frac{L}{2}} = \frac{1}{12} \frac{M^2}{L} \quad (2.4)$$

- Para calcularlo respecto de un eje que pase por un extremo, podemos aplicar el teorema de Steiner:

$$I' = I_0 + Md^2 = \frac{1}{12} \frac{M^2}{L} + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3} ML^2 \quad (2.5)$$

3. Construcción del universo

3.1. Teoremas geométricos de Euler y Chasles

1. Teorema de Euler:

Teorema de Euler

Dadas 2 posiciones de un sólido rígido con *un punto fijo* O , siempre se puede pasar de una a otra mediante *un único giro* alrededor de un *eje que pase por ese punto* O .

2. Teorema de Chasles:

Teorema de Chasles

Dadas dos posiciones de un sólido rígido en el espacio, bastan *un movimiento de traslación y otro de rotación* para pasar de una a otra. Existe un numero infinito de combinaciones, pero *una única combinación* en la que los *ejes de rotación y traslación son paralelos*, generando un movimiento de tipo *helicoidal*.

3.2. Grados de libertad

El primer problema que puede plantearnos el estudio del sólido rígido está íntimamente ligado a nuestra capacidad para imaginar movimientos en el espacio. Para tratar de que aquellos que no tengan una visión espacial demasiado desarrollada, imaginemos un sólido rígido bastante peculiar, formado por tres cilindros unidos en uno de sus extremos y dispuestos en las tres direcciones del espacio, es decir, a lo largo de los ejes coordenados. Si nos imaginamos cómo podríamos girarlo en el espacio, resulta intuitivo “agarrarlo” por cada uno de sus brazos haciendo girar al sólido. Si por cada brazo tenemos un sentido de giro y a éste le asociamos un ángulo, nos resultarán inmediatamente tres coordenadas angulares (φ_1 , φ_2 , φ_3)

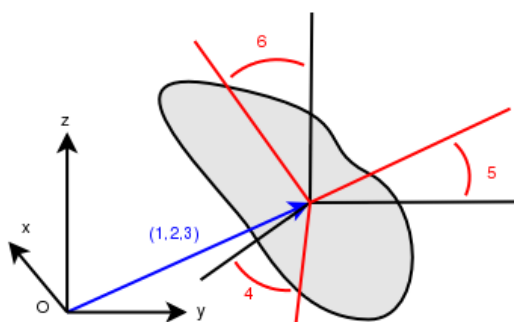


Figura 3.1.: Grados de libertad de un sólido rígido en el espacio

3. Construcción del universo

En cuanto a traslaciones, es evidente que podemos trasladar como un bloque todo el sólido tomando como referencia un punto cualquiera (el de confluencia de los tres brazos, por ejemplo) con lo que le añadiremos otros tres **grados de libertad** (x_1, x_2, x_3).

Tenemos, en resumen:

Rotación 3 grados de libertad correspondientes a giros en torno a cada uno de los tres ejes espaciales.

Traslación 3 grados de libertad correspondientes a las tres coordenadas espaciales del movimiento del centro de masas.

3.2.1. Grados de libertad en el movimiento plano

Resulta bastante interesante el estudio del movimiento del sólido rígido en el plano porque se trata de una aproximación que verdaderamente simplifica las cosas y además es aplicable a gran cantidad de casos reales. En nuestros desarrollos trataremos de mantener la mayor generalidad posible tratando el caso tridimensional, pero eventualmente reduciremos los resultados al caso bidimensional para aclarar conceptos y presentar ejemplos más sencillos.

Para poder trabajar con sólo dos dimensiones, hemos de imaginar que cada punto del sólido se mueve siempre por un plano paralelo al plano de referencia y que el cuerpo posee **simetría** respecto a dicho plano de referencia donde se mueve el centro de masas. Imaginando un movimiento en el plano XY y utilizando una función de punto densidad para caracterizar la geometría del sólido:

$$\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$$

En el movimiento plano habrá 3 *grados de libertad*:

- **Dos de traslación** por las dos dimensiones en que puede moverse el centro de masas.
- Y **una de rotación** ya que cada punto describe órbitas circulares alrededor de un punto común.

3.3. Hacia las ecuaciones de movimiento

Una vez sabemos cuántas **coordenadas generalizadas** nos hacen falta, elijamos las que nos resulten más naturales¹ e indaguemos en busca de las **ecuaciones de movimiento**.

Parece bastante razonable plantear un **sistema de referencia inercial** con respecto al cual localizar el centro de masas del sólido rígido mediante tres coordenadas cartesianas $\vec{R}_{CM} = (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM})$. A continuación situemos un segundo **sistema de referencia no inercial**, que sea solidario al cuerpo, con origen en el centro de masas

¹Véase 4.2.1 sobre la elección de sistemas de referencia privilegiados.

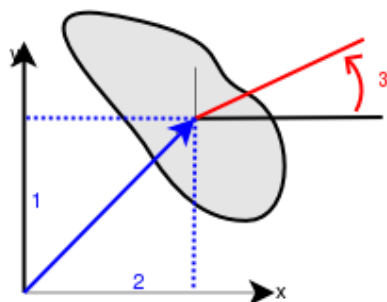


Figura 3.2.: Grados de libertad en el movimiento plano de un sólido rígido

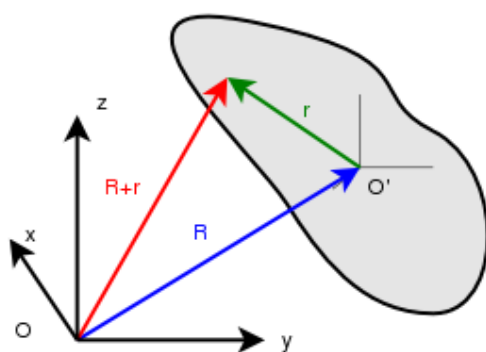


Figura 3.3.: Sistemas de coordenadas

y tres ejes coordenados en torno a los cuales definamos los tres grados de libertad de rotación (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3). Un punto cualquiera del sólido vendría dado por sus coordenadas cartesianas respecto al sistema de referencia no inercial más las del origen del sistema de referencia no inercial:

$$\vec{R} = \vec{r}_c + \vec{r}$$

Las coordenadas evolucionarán en el tiempo como:

$$\begin{aligned} \vec{v}_O &= \frac{d}{dt} (\vec{r}_c + \vec{r})_o = \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} \right)_o + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_o \\ &= \left(\frac{d\vec{r}_c}{dt} \right)_o + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{o'} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}}_{\equiv 0} = \vec{v} + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nótese que el haber eliminado $\vec{v}_{o'}$ es una consecuencia inmediata de la noción de sólido rígido, concretamente de la invarianza de las distancias relativas entre las partículas que lo conforman.

Expresión de la velocidad de un sólido rígido

$$\vec{v}_o = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (3.2)$$

3.3.1. Momento lineal

Veamos cómo expresar el **momento lineal** partiendo de la integración de los momentos lineales de las partículas infinitesimales que conforman el sólido.

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_V \vec{v}_o dm = \int_V (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \vec{v} \int dm + \vec{\omega} \times \int \vec{r} dm = \\ &= M\vec{v} + M(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}) = M(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para localizar el **centro de masas** en el sólido:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm \Rightarrow \int_V \vec{r} dm = M\vec{r}_{CM}$$

Con todo, aplicando la ecuación (8.4) a los resultados obtenidos en (8.5):

$$\vec{p} = M\vec{v}_{CM} \quad (3.4)$$

Llegamos a la conclusión de que el momento lineal del sólido rígido depende única y exclusivamente del estado de movimiento de su centro de masas.

3.3.2. Energía cinética

En cuanto a la energía cinética, que definimos como la mitad del producto entre la masa y la velocidad al cuadrado para una partícula, la redefiniremos para un volumen arbitrario como sigue:

$$T = \int_V \vec{v}_o^2 dm = \frac{1}{2} \int_V \rho v_o^2 dV$$

Definiremos explícitamente las integrales a toda la masa mediante las integrales de volumen y una densidad que es función de punto como $\int_V \rho dV$. La notación de integral a todo el volumen sobre el elemento diferencial de masa $\int_V dm$ asumirá este paso implícitamente. Utilizaremos indistintamente ambas notaciones.

Teniendo en cuenta (8.4)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = \\ &= \frac{v^2}{2} \underbrace{\int_V dm}_{\equiv M} + \vec{v} \cdot \left(\vec{\omega} \times \underbrace{\int_V \vec{r} dm}_{\equiv M\vec{r}_{CM}} \right) + \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \end{aligned}$$

Expresión más general de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + M\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}) + \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.5)$$

Imaginemos que lanzamos al aire una barra alargada. En primer lugar lancémosla a modo de jabalina y a continuación haciéndola girar como si se tratase de un boomerang. Si ignoramos las consideraciones aerodinámicas, ¿serán diferentes las trayectorias en el espacio en ambos lanzamientos? ¿Cual sería el método más efectivo para un lanzador olímpico de jabalina?

Particularización de la energía cinética

Examinando cuidadosamente los términos involucrados en esta expresión, encontramos:

$$T = \begin{cases} \frac{1}{2}Mv^2 & \rightarrow \text{Traslación pura} \\ M\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}) & \rightarrow \text{Término mixto} \\ \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm & \rightarrow \text{Rotación pura} \end{cases}$$

Tenemos un término de **traslación pura** asociado al centro de masas y dos términos de rotación. El último de los términos es un término de **rotación pura** asociada a un eje que pasa por el centro de masas del sólido.

traslación pura
rotación pura

El término restante, lo hemos denominado **término mixto** porque está asociado a una cierta traslación que corresponde en realidad a un giro en torno a un eje externo al sistema.

término mixto

Pensemos en el llamado “movimiento de traslación” de la Tierra en torno al Sol, que puede verse como un giro de la Tierra en torno a un eje que pasa por el Sol.

Veamos bajo qué condiciones se simplifica esa forma de la energía cinética:

- Un sólido rígido con un **punto fijo** perderá el término de traslación pura ($\vec{v} \equiv \vec{v}_{CM} \equiv 0$) y el mixto quedándose exclusivamente con el término de rotación pura.

$$T = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.6)$$

- Un **trompo dormido** es aquel cuya velocidad angular es paralela al vector que une el centro de masas con el origen del sistema de referencia no inercial. En ese caso se pierde el término mixto.

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.7)$$

- El término mixto se perderá también cuando el sistema de referencia no inercial se mueva a lo largo de una recta paralela a la velocidad angular o al vector del centro

3. Construcción del universo

de masas en el sistema no inercial ($M\vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}) \equiv 0$).

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.8)$$

En función del sistema de referencia utilizado para su estudio también podemos simplificar la expresión de la energía cinética con el valor añadido de que no perderemos la generalidad de nuestro universo.

- Si utilizamos el **centro de masas como origen de nuestro sistema de referencia**, el segundo término se anula, ya que $\vec{r}_{CM} = 0$. Por tanto la expresión se nos queda como:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.9)$$

- Si utilizamos como origen de nuestro sistema de referencia el **eje instantáneo de rotación** (ver 4.2.1), se nos anularán los dos primeros términos, pues todos los momentos angulares del sistema son referidos al origen de coordenadas de nuestro sistema de referencia no inercial.

$$T = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (3.10)$$

3.3.3. Momento angular

Quedémonos con la primera de las elecciones de sistema de referencia, la que centra el origen del sistema no inercial en el centro de masas del sólido, y planteemos la expresión para la energía cinética:

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{T_T} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm}_{T_R} \quad (3.11)$$

Como ya habíamos observado, tiene dos términos, uno de traslación y uno de rotación. El término de traslación no tiene ningún misterio para nosotros, es de sobra conocido de la dinámica del punto material, pero examinemos con cuidado el término de rotación:

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2} \int_V \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{v}_o} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \frac{1}{2} \int_V \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}_o) dm = \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underbrace{\int_V (\vec{r} \times \vec{v}_o) dm}_{\vec{L}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hemos llegado a una expresión sencilla de sólo dos términos, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y un objeto $\vec{L} = \int_V (\vec{r} \times \vec{v}_o) dm$ que llamaremos momento angular. Estudiemos este segundo más de cerca:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_V (\vec{r} \times \vec{v}_o) dm = \int_V (\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \\ &= \int_V \underbrace{(\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}))}_{\equiv \vec{\lambda}} dm \\ \vec{\lambda} &= (\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) \rightarrow \begin{cases} \vec{r} = (x, y, z) \\ \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \end{cases} \\ \rightarrow \begin{cases} \lambda_x = \omega_x r^2 - x(x, y, z) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_y \end{pmatrix} = \omega_x (r^2 - x^2) - xy\omega_y - xz\omega_z \\ \lambda_y = \omega_y r^2 - y(x, y, z) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_y \end{pmatrix} = -yx\omega_x + \omega_y (r^2 - y^2) - yz\omega_z \\ \lambda_z = \omega_z r^2 - z(x, y, z) \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_y \end{pmatrix} = -zx\omega_x - zy\omega_y + \omega_z (r^2 - z^2) \end{cases} \quad (3.13) \end{aligned}$$

Parece que la estructura de ese objeto que hemos llamado $\vec{\lambda}$ nos esté pidiendo a gritos que lo expresemos en forma matricial, pero antes vamos a integrarlas para obtener la expresión del momento angular:

$$L_x = \int_V \lambda_x dm = \omega_x \underbrace{\int_V (r^2 - x^2) dm}_I - \underbrace{\int_V xy dm}_{PI} \omega_y - \underbrace{\int_V xz dm}_{PI} \omega_z \quad (3.14)$$

Al integrar vemos que nos quedan las integrales en masa de momentos al cuadrado, que nos recuerdan sospechosamente a la definición de momento de inercia. Llamaremos momentos de inercia (I) a los elementos “diagonales” (x con x , y con y y z con z) y productos de inercia (PI) a los términos cruzados.

Ahora sí, expresándolo matricialmente:

Forma tensorial del momento angular

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2 - y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2 - z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_y \end{pmatrix} = \hat{I} \vec{\omega} \quad (3.15)$$

Con esta expresión tensorial para el momento angular, podemos reescribir (8.3) como

$$T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega} \quad (3.16)$$

3. Construcción del universo

3.3.4. Tensor de inercia

De la expresión (8.12)

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \hat{I}\vec{\omega}$$

Llegamos a una forma matricial aparentemente compleja, ya que tenemos (aparentemente) nueve valores diferentes.

Veamos la expresión para las componentes del tensor de inercia:

$$I_{ij} = \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm \quad (3.17)$$

donde δ_{ij} es la **delta de Kronecker** definida como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato, viendo que x_i y x_j son escalares y por tanto conmutan, que $I_{ij} = I_{ji}$.

Nos hemos quitado tres componentes en un momento. sólo quedan seis.

Estamos ante una matriz simétrica que además es real, lo que nos da una pista muy importante para nuestro estudio que es que la matriz de inercia será siempre **diagonalizable**.

En cualquier caso, sin pérdida de generalidad, vamos a poder diagonalizar nuestro tensor de inercia para obtener una expresión que contenga sólo tres componentes de la forma:

Diagonalización del tensor de inercia

$$(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \omega_x^2 I_1 + \omega_y^2 I_2 + \omega_z^2 I_3 \quad (3.18)$$

Diagonalizar la matriz no es otra cosa que elegir acertadamente los ejes de nuestro sistema de referencia solidario con el cuerpo, con lo que en muchos casos la intuición y nuestra habilidad para hallar las simetrías en la geometría de los cuerpos que vamos a estudiar nos proporcionarán ya una forma diagonal del tensor de inercia.

Matemáticamente se trata de una aplicación de la propiedad tensorial $\hat{I}' = \hat{A}^t \hat{I} \hat{A}$. Donde A es una transformación de coordenadas que contiene las direcciones de los ejes principales, esto es, los autovectores de I . Los autovalores son los momentos de inercia respecto a cada uno de esos ejes principales.

Teorema de Poincot

Dado el momento de inercia para tres ejes cualesquiera, es posible hallarlo para un cuarto eje arbitrario.

Expresemos el vector velocidad angular en función de sus cosenos directores:

$$\vec{\omega} = \hat{n}\omega = (\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k})\omega \quad (3.19)$$

Llevando esto a la expresión de la energía cinética

Teorema de Poincot

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega \hat{n} \hat{I} \hat{n} \omega = \frac{1}{2} I_{\omega} \omega^2 \\ I_{\omega} &= (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma \end{aligned} \quad (3.20)$$

Generalización del teorema de Steiner

Ya nos es conocido el teorema de Steiner para ejes paralelos en el caso bidimensional que nos permitía obtener el momento de inercia respecto de un eje cualquiera conocido éste respecto a uno paralelo que pasase por el centro de masas a una distancia c

$$I' = I_c + Mc^2$$

Veamos ahora la generalización del teorema:

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \int_V (\vec{r}' \cdot \vec{r}' \delta_{ij} - x'_i x'_j) dm \\ \vec{r}' \cdot \vec{r}' &= (\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{r} - \vec{R}) = r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{R} + R^2 \\ x'_i x'_j &= (x_i - R_i)(x_j - R_j) = x_i x_j + R_i R_j - x_i R_j - x_j R_i \\ I'_{ij} &= \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) dm + \int_V (R^2 \delta_{ij} - R_i R_j) dm - \\ &\quad - \underbrace{2\delta_{ij} \vec{R} \int_V \vec{r} dm}_{\vec{r}_{CM} \equiv 0} - \underbrace{R_j \int_V x_i dm}_{x_i^{CM} \equiv 0} - \underbrace{R_i \int_V x_j dm}_{x_j^{CM} \equiv 0} \\ I'_{ij} &= I_{ij}^{CM} + M (R^2 \delta_{ij} - R_i R_j) \end{aligned}$$

La generalización nos ha llevado de tener una simple distancia en la ecuación a todo un tensor de traslación \vec{R} :

Teorema de Steiner

$$\hat{I}' = \hat{I}^{CM} + M\hat{R} = \hat{I}^{CM} + M \begin{pmatrix} R_y^2 + R_z^2 & -R_x R_y & -R_x R_z \\ -R_x R_y & R_x^2 + R_z^2 & -R_y R_z \\ -R_x R_z & -R_y R_z & R_y^2 + R_x^2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Teorema de las figuras planas

Llamemos figura plana a un sólido que tiene una dimensión despreciable frente a las otras dos. El momento de inercia respecto al eje principal correspondiente a dicha dimensión es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los otros dos ejes principales.

Veamos que la demostración de este teorema es muy barata:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + \underbrace{z^2}_{\equiv 0}$$

$$I_x = \int_V (r^2 - x^2) dm = \int_V \left(x^2 + y^2 + \underbrace{z^2}_0 - x^2 \right) dm = \int_V y^2 dm$$

$$I_y = \int_V (r^2 - y^2) dm = \int_V \left(x^2 + y^2 + \underbrace{z^2}_0 - y^2 \right) dm = \int_V x^2 dm$$

$$I_z = \int_V (r^2 - z^2) dm = \int_V (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dm = \int_V x^2 dm + \int_V y^2 dm \quad (3.22)$$

Teorema de las figuras planas

$$I_z = I_x + I_y \quad (3.23)$$

Trompos: Clasificación de sólidos Rígidos

Al obtener la forma diagonal de la matriz de inercia, tenemos como resultado formal, tres direcciones o ejes principales y los valores correspondientes del momento de inercia respecto a cada eje. Según dichos momentos (autovalores de la matriz de inercia) hablaremos de tres tipos de trompo:

Trompo Asimétrico $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

Trompo Simétrico $I_1 = I_2 \neq I_3$

Trompo Esférico $I_1 = I_2 = I_3$

Búsqueda geométrica de los ejes principales

Unas pocas propiedades nos ayudarán a localizar los ejes principales:

1. Si el trompo presenta un **plano de simetría**, habrá un eje principal que será perpendicular al mismo pasando por el centro de masas. plano de simetría
2. Si el trompo presenta un **eje de simetría** de cualquier orden, dicho eje será un eje principal. En caso de que dicha simetría axial² sea de orden > 2 entonces el trompo será simétrico. eje de simetría

Veamos en un pequeño ejemplo [Ant94] cómo determinar los ejes principales mediante el estudio intuitivo de las simetrías en el sólido. Con ello determinaremos el elipsoide de inercia y qué valores tomarán los momentos de inercia respecto de dichas direcciones o ejes principales:

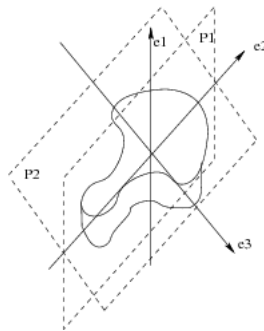


Figura 3.4.: Determinación de ejes principales

1. En primer lugar encontramos un eje e_2 de simetría de orden 2 que será por sí mismo un eje principal.
2. Encontramos un plano de simetría P_1 . Perpendicular a éste y pasando por el centro de masas trazaremos un segundo eje principal e_3 .
3. De manera análoga al caso anterior, encontramos un último plano de simetría P_2 que nos ayudará a determinar el tercer eje principal con la dirección de su normal y pasando por el centro de masas.

²Simetría axial de orden n : $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, \varphi + \frac{2\pi}{n}, z)$.

3. Construcción del universo

Elipsoide de Inercia

Es el lugar geométrico representado por:

$$\sum_{i,j} I_{ij} x_i x_j = 1$$

Si como ejes de referencia tomamos los ejes principales (diagonalizamos el tensor de inercia), obtenemos una expresión sencilla para el elipsoide de inercia:

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

Los semiejes del elipsoide de inercia miden $\sqrt{\frac{1}{I_k}}$; $I_k \geq 0$.

Si $\vec{r} = r\vec{n}$ se cumple que $r = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_n}}$.

Si tomamos la dirección del vector velocidad angular $\vec{\omega}$ y el radio del elipsoide en dicha dirección \vec{r} , en dicho punto la normal al elipsoide de inercia será paralela al momento de inercia.

Definiendo el elipsoide como $f = \sum_{i,j} I_{ij} x_i x_j \rightarrow \nabla_i f = \sum_j I_{ij} x_j = I\vec{r} \rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega}$.

3.3.5. Ecuaciones de Euler

Tomemos un sistema de referencia no inercial solidario al sólido para el cual el tensor de inercia sea diagonal:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\omega_1 \\ I_2\omega_2 \\ I_3\omega_3 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Respecto a un sistema de referencia inercial podemos expresar el momento total como

$$\vec{M} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_O \quad (3.25)$$

Uniendo (9.4) y (9.3), podemos expresar el momento total como:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \hat{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \\ &= \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix} = \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} N_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ N_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\ N_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Las ecuaciones de Euler son bastante comprensibles, aunque no por ello vayan a resultar más comprensibles.

$$N_i = I_i \dot{\omega}_i + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} I_j \omega_j \omega_k \quad (3.28)$$

Particularización de las ecuaciones de Euler: Búsqueda de soluciones

No siempre vamos a poder encontrar soluciones a un problema general. Tendremos que restringirnos a determinadas circunstancias que simplifiquen el problema. Dichas circunstancias las encontraremos en simetrías, ausencia de fuerzas o momentos, independencia del tiempo de alguna variable... Particularicemos a algunos casos:

Tenemos claro lo que es el movimiento inercial de una partícula.

No se trata de un concepto sencillo pero sí lo hemos estudiado ya en suficiente profundidad y lo tenemos asimilado en primera aproximación como una trayectoria rectilínea con velocidad constante en ausencia de fuerzas externas.

¿Cómo generalizar esto al caso del sólido rígido?

1. Problema libre de momentos: $N_i \equiv 0$

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z &= 0 \\ I_y \dot{\omega}_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x &= 0 \\ I_z \dot{\omega}_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Podremos encontrar en general, soluciones mediante funciones elípticas.

2. Problema en que las componentes principales de la velocidad angular son constantes conocidas y los momentos son desconocidos:

$$\dot{\omega}_i = 0 \implies \begin{aligned} (I_3 - I_2) \omega_y \omega_z &= N_x \\ (I_1 - I_3) \omega_x \omega_z &= N_y \\ (I_2 - I_1) \omega_y \omega_x &= N_z \end{aligned} \quad (3.30)$$

3. Problema donde las componentes de la velocidad angular son constantes y los momentos angulares son idénticamente cero:

$$\dot{\omega}_i \equiv 0; N_i \equiv 0 \implies \begin{aligned} (I_3 - I_2) \omega_y \omega_z &= 0 \\ (I_1 - I_3) \omega_x \omega_z &= 0 \\ (I_2 - I_1) \omega_y \omega_x &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Estudiemos los diferentes tipos de trompo bajo estas restricciones ($N_i \equiv 0$ y $\dot{\omega}_i \equiv 0$) y veamos si podemos encontrar soluciones sencillas bajo diferentes geometrías:

Trompo asimétrico: Para poder estudiarlo tendrían que ser cero al menos dos de las componentes de la velocidad angular: $\omega_x = \omega_y = 0 \rightarrow \vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$

3. Construcción del universo

Trompo simétrico: Dos de los autovalores de la matriz de inercia son iguales, por lo que se anula una de las ecuaciones de Euler:

$$\dot{\omega}_k = 0; N_k = 0; I_1 = I_2 \neq I_3 \implies \begin{cases} (I_3 - I_2)\omega_y\omega_z = 0 \\ (I_1 - I_3)\omega_x\omega_z = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Seremos capaces de estudiar dos circunstancias diferentes:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_y = 0 & \vec{\omega} = \omega_z \vec{k} \\ \omega_z = 0 & \vec{\omega} \in (x, y) \end{cases}$$

En el caso en que $\omega_z = 0$, tendremos a la velocidad angular incluida en el plano que contiene a los dos ejes principales degenerados.

Trompo esférico: En este caso, todas las direcciones son principales, por lo que bastaría tomar ω_k paralela a una dirección principal, anulándose por tanto las otras dos componentes.

3.3.6. Dinámica del sólido libre

sólido libre

Diremos que hablamos de un **sólido libre** cuando las fuerzas y momentos generalizados sean nulos: $\vec{F} = 0; \vec{N} = 0$

Dada dicha circunstancia, podremos aplicar dos invariantes:

1. Ley de conservación de la energía:

$$I_1\omega_x^2 + I_2\omega_y^2 + I_3\omega_z^2 = 2T = Cte$$

2. Ley de conservación del Momento Angular:

$$I_1^2\omega_x^2 + I_2^2\omega_y^2 + I_3^2\omega_z^2 = L^2 = Cte$$

Analíticamente, las leyes describen sendos elipsoides cuya intersección será la trayectoria de la velocidad angular ($\rho_k = \frac{\omega_k}{\sqrt{2T}}$).

$$I_1\rho_1^2 + I_2\rho_2^2 + I_3\rho_3^2 = 1$$

polhodia

La trayectoria de ρ sobre el elipsoide se denomina **polhodia**.

En cada momento, tangente a la polhodia y al elipsoide de inercia, está el llamado plano invariante.

herpolhodia

El elipsoide de inercia rueda sin deslizar sobre el plano invariante. La curva trazada sobre el elipsoide es la polhodia y la trazada sobre el plano de inercia es la **herpolhodia**. El centro del elipsoide de inercia se mantiene a una distancia constante sobre el plano (de ahí que sea llamado el plano invariante). \vec{L} es perpendicular al plano invariante y el elipsoide de inercia es en todo momento tangente al plano en un punto P .

3.3.7. Trompo simétrico libre

La condición de sólido libre se expresa como $N_k = 0$.

El hecho de que sea un trompo simétrico implica $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Las ecuaciones de Euler toman la forma:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x + (I_3 - I_1) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_1 \dot{\omega}_y + (I_1 - I_3) \omega_x \omega_z = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0 \rightarrow \omega_z = cte \end{cases}$$

Definiendo, para simplificar la escritura, $\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_z$ obtenemos de forma simplificada:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = -\Omega \omega_y \\ \dot{\omega}_y = \Omega \omega_x \end{cases} \rightarrow \omega_{xy}^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 = cte = D^2 \rightarrow \begin{cases} \omega_x = D \cos(\Omega t + \delta) \\ \omega_y = D \sin(\Omega t + \delta) \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ describe un cono alrededor del eje z con semi-ángulo de apertura $\alpha = \text{atan}\left(\frac{\omega_{xy}}{\omega_z}\right)$

3.4. La nueva fenomenología

3.4.1. Ángulos de Euler

Necesitamos para el estudio del sólido rígido en el espacio, tres coordenadas rectangulares para delimitar la posición del centro de masas así como tres coordenadas angulares que nos indicarán el estado de giro y nos ayudarán a estudiar su movimiento. Euler, que era un tipo astuto, encontró un conjunto de ángulos que simplifican enormemente los cálculos. Los llamaremos **ángulos de Euler** en un alarde de elocuencia.

ángulos de Euler

$$\text{Coordenadas} \begin{cases} (x, y, z) \rightarrow \text{Lineales} \\ (\varphi, \vartheta, \psi) \rightarrow \text{Angulares} \end{cases}$$

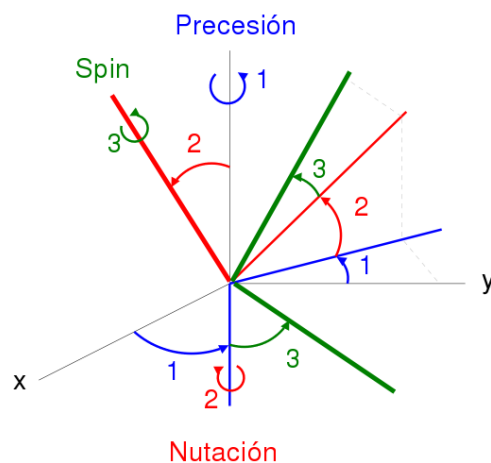


Figura 3.5.: Ángulos de Euler

3. Construcción del universo

Todos los giros del sólido vendrán determinados por variaciones en dichas coordenadas angulares.

Un primer giro (según ilustración) en torno al eje Z , será denotado con la coordenada φ , y su variación con el tiempo $\dot{\varphi}$ será denominada PRECESIÓN.

Un segundo giro (según ilustración) en torno al nuevo eje x' será identificado con la coordenada ϑ , y su derivada respecto del tiempo $\dot{\vartheta}$ será la NUTACIÓN.

Un tercer giro (según ilustración) en torno al nuevo eje z'' , que denotaremos con la coordenada ψ será aquel cuya variación con el tiempo $\dot{\psi}$ llamaremos SPIN.

$$\begin{cases} \dot{\varphi} & \text{Precesión} \\ \dot{\vartheta} & \text{Nutación} \\ \dot{\psi} & \text{Spin} \end{cases}$$

Con esa notación, las componentes de la velocidad angular $\vec{\omega}$, toman la forma:

Velocidad angular respecto a los ángulos de Euler

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \text{sen}(\vartheta) \text{sen}(\psi) + \dot{\vartheta} \text{cos}(\psi) \\ \omega_y = \dot{\varphi} \text{sen}(\vartheta) \text{cos}(\psi) - \dot{\vartheta} \text{sen}(\psi) \\ \omega_z = \dot{\varphi} \text{cos}(\vartheta) + \dot{\psi} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.4.2. El trompo de Lagrange

El trompo de Lagrange es la cumbre en nuestro estudio de la dinámica del sólido rígido.

El trompo de Lagrange es un sistema que presenta un punto fijo y cuyos autovalores del tensor de inercia vienen descritos como $I_1 = I_2 \neq I_3$

Planteemos la expresión de la energía cinética:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_j I_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \\ &\downarrow \text{usando (3.33)} \\ T &= \frac{1}{2} I (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Planteando ahora la expresión del lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - Mgl \cos \theta \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\dot{\varphi}, \theta, \dot{\vartheta}, \dot{\psi}) \Rightarrow \mathcal{L} \neq \mathcal{L}(\varphi, \psi) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \varphi \\ \psi \end{array} \right\} \text{ Cíclicas} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Podemos buscar las cantidades conservadas para esas coordenadas cíclicas que no aparecen explícitamente en la expresión del lagrangiano. Esas integrales primeras serán:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= Cte = P_j \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= P_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \equiv J_1 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= P_\phi = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \underbrace{(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})}_{\equiv J_1} \cos \theta = J_2 \\
 J_2 &= I \dot{\phi} \sin^2 \theta + J_1 \cos \theta \\
 \dot{\phi} &= \frac{J_2 - J_1 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Hemos encontrado, a partir de las simetrías subyacentes al problema, dos constantes de movimiento J_1 y J_2 .

Una integral primera es una relación imperturbable entre variables del sistema que cambian constantemente. Es un reflejo del equilibrio entre el cambio y la eternidad que enfrentó a Heráclito y Parménides. ¿Qué es lo que definimos como realidad objetiva más allá de nuestro mundo de las ideas? ¿Hay algo intrínseco en la naturaleza que se mantiene imperturbable o acaso absolutamente todo cambia como el agua de un río?

Por otro lado observamos que entre las integrales primeras que hemos obtenido parece haber una cierta estructura jerárquica $J_2 = J_2(J_1)$

La tercera y última integral primera del movimiento es la ley de conservación de la energía que deriva de la no dependencia explícita del lagrangiano con el tiempo:

$$\begin{aligned}
 E = Cte &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{I}{2} \sin^2 \theta \frac{J_2 - J_1 \cos \theta}{I^2 \sin^4 \theta} - 2 \frac{J_1^2}{I_3} + Mgl \cos \theta \equiv E_0 \\
 \dot{\theta}^2 + \left(\frac{J_2 - J_1 \cos \theta}{I \sin \theta} \right)^2 - \underbrace{2 \frac{Mgl}{I} \cos \theta}_{\equiv \beta} &= \underbrace{2 \frac{E_0}{I} - \frac{J_1^2}{II_3}}_{\equiv \alpha}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Llamando $a \equiv \frac{J_2}{I}$ y $b \equiv \frac{J_1}{I}$:

$$\dot{\theta}^2 + \left(\frac{a}{\sin \theta} - b \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \beta \cos \theta - \alpha = 0 \tag{3.38}$$

Hemos llegado a una expresión bastante elegante en la que lo único que podría molestarnos a primera vista son esos senos en el denominador. Para librarnos de ellos multiplicaremos ambos términos por el cuadrado del seno. Este es un paso menos trivial de lo que parece. Al hacerlo estamos desestimando la solución para $\theta = 0$, cosa que ningún matemático nos perdonaría. Pero estamos haciendo física y queremos que el trompo precesione, así que consideramos que ese es otro problema (además más sencillo). Aceptemos esta justificación y prosigamos con nuestros cálculos.

3. Construcción del universo

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + (a - b \cos \theta)^2 + (\beta \cos \theta - \alpha) \sin^2 \theta = 0 \\ \text{cambio de variable: } u = \cos \theta & \Rightarrow \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \\ & \dot{u}^2 + (a - bu)^2 + (\beta u - \alpha) (1 - u^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ecuaciones de movimiento del trompo de Lagrange

$$\dot{u}^2 + (a - bu)^2 + (\beta u - \alpha) (1 - u^2) = 0 \quad (3.40)$$

Cuando ponemos el punto fijo justo en el centro de masas, la energía potencial del sólido se hace idénticamente cero, con lo que el término $\beta = 2 \frac{Mgl}{I} \equiv 0$. Eso nos elimina de las ecuaciones diferenciales un molesto u^3 dejándolas bastante más simétricas y elegantes. No obstante, obtener soluciones sigue siendo un problema que deberán abordar los matemáticos. No entraremos en detalles pero tiene que ver con funciones elípticas. Puede verse un desarrollo asequible de este caso en [Law98], sección 7.4.

3.4.3. Mirando dentro de la chistera

Llegados a este punto vamos a desvelar qué había dentro de la chistera en aquel “truco de magia”.

En efecto, había un tensor escondido que veremos claramente si analizamos el sistema desde las ecuaciones de Euler(3.27).

En nuestro desarrollo anterior, las tres ecuaciones de Euler las igualábamos a las tres componentes del momento total. El tensor de Levi-Civita está oculto en el producto vectorial que nos haría definir dichas componentes del momento. La magia aparece a través del producto vectorial de la fuerza de atracción gravitatoria que actúa sobre el centro de masas del sistema y el vector que une el centro de masas con el punto fijo.

$$\vec{M} = \vec{F}_g \times \vec{r}_{CM} = \hat{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\hat{I} \vec{\omega})$$

Mientras el sistema estaba equilibrado, el centro de masas coincidía exactamente con el punto fijo y se anulaban los momentos. Nos encontrábamos entonces con un trompo simétrico ($I_2 = I_3 \neq I_1$) libre de momentos y con un punto fijo, que permanecería dormido con una velocidad angular constante dirigida a lo largo del eje de simetría del trompo.

Desequilibrarlo fue equivalente a desplazar su centro de masas (que, recordemos, coincidía con el punto fijo), con lo que apareció el producto vectorial y por tanto los momentos tomaron valores distintos de cero en general.

Realmente, en el sistema de referencia inercial sólo una de las componentes del momento (la horizontal perpendicular al eje de simetría del sólido) toma valor. Sin embargo, los momentos han de estar referidos al sistema de referencia no inercial, con lo que ese

3.5. Dificultades en el estudio del sólido rígido en el espacio

momento se repartirá entre las dos direcciones degeneradas del trompo a través de la frecuencia ω_1 :

$$\begin{aligned} N_2 &= N \cos \omega_1 t \\ N_3 &= N \sin \omega_1 t \end{aligned} \quad (3.41)$$

Planteando ahora las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 \dot{\omega}_1 \\ N \cos \omega_1 t &= I_2 \dot{\omega}_2 - (I_2 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ N \sin \omega_1 t &= I_2 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desde donde fácilmente llegamos a plantear:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = 0 &\rightarrow \omega_1 = Cte \\ I_2 (\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3) + \underbrace{(I_2 - I_1) \omega_1}_{Cte} (\omega_2 - \omega_3) &= N (\sin \omega_1 t + \cos \omega_1 t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.5. Dificultades en el estudio del sólido rígido en el espacio

1. Tenemos un momento lineal y un momento angular que derivan de sendas velocidades lineal y angular. La velocidad lineal es paralela al momento lineal, pero *el momento angular no es paralelo a la velocidad angular*.

$$\begin{cases} \vec{p}(\vec{v}) & \vec{p} \parallel \vec{v} \\ \vec{L}(\vec{\omega}) & \vec{L} \not\parallel \vec{\omega} \end{cases}$$

2. Los ángulos de Euler son complicados de manejar y *no conmutativos*:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\varphi} \operatorname{sen}(\vartheta) \operatorname{sen}(\psi) + \dot{\vartheta} \cos(\psi) \\ \omega_y = \dot{\varphi} \operatorname{sen}(\vartheta) \cos(\psi) - \dot{\vartheta} \operatorname{sen}(\psi) \\ \omega_z = \dot{\varphi} \cos(\vartheta) + \dot{\psi} \end{cases}$$

3. Aparentemente, necesitaremos conocer $\vec{\omega}$ para aplicar $\vec{L} = \tilde{I} \vec{\omega}$ (que, en el fondo, es el resultado que buscamos).
4. Las componentes de $\vec{\omega}$ no derivan directamente de ninguna coordenada.

4. Indagar más en el Sólido Rígido

4.1. Modos de interpretar el movimiento bidimensional del sólido rígido

En general, vamos a poder interpretar el movimiento desde dos perspectivas diferentes:

- Podemos "montarnos" sobre un punto cualquiera O que se mueva con una velocidad v_0 y observar que el sólido gira con una cierta velocidad angular alrededor de dicho punto. Normalmente es sensato utilizar como punto de referencia el centro de masas del sólido rígido, por eso es el punto que hemos elegido por norma general en nuestros desarrollos.
- Podemos elegir, no un punto arbitrario O sino uno concreto, por el que pasa el eje instantáneo de rotación. En este caso, el sólido solamente gira en torno a dicho punto. Es decir, al elegir el centro instantáneo de rotación como punto de referencia, no existirá una velocidad v_0 de dicho punto por definición de la localización del centro instantáneo de rotación. Veamos qué tiene este punto de peculiar y cómo localizarlo.

4.2. Elección sistemática de un sistema de referencia privilegiado

Los conceptos que vamos a ver a continuación pueden ser algo complejos y confusos aunque la matemática que hay tras ellos sea relativamente sencilla. Nos permitirán elegir sistemáticamente un sistema de referencia adecuado que simplifique los cálculos en muchos casos, aunque quizá en muchos otros el precio que hay que pagar sea demasiado elevado para una simplificación no tan potente del problema.

4.2.1. Eje o centro instantáneo de rotación

Vamos a definir el centro o **eje instantáneo de rotación** como el punto del espacio que en un momento determinado poseería velocidad cero. El punto puede estar dentro o fuera del sólido rígido, y puede variar en cada instante de tiempo.

Su localización matemática es muy sencilla, basta igualar la velocidad de un punto a cero:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \end{pmatrix} = 0$$

eje instantáneo de rotación

4. Indagar más en el Sólido Rígido

$$\begin{pmatrix} +y\omega \\ -x\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \end{pmatrix} \Rightarrow P \left(\frac{-v_{CMy}}{\omega}, \frac{v_{CMx}}{\omega} \right)$$

4.3. En el plano: conceptos de base y ruleta

Una vez encontrado el centro instantáneo de rotación, definiremos dos elementos que coincidirán necesariamente en éste lugar geométrico: La ruleta y la base.

Base

- **Base** o Polar fija. Es el lugar geométrico descrito por el recorrido del centro instantáneo de rotación respecto a un sistema de referencia inercial externo al sólido.

Ruleta

- **Ruleta** o polar móvil. Es el lugar geométrico descrito por el recorrido del centro instantáneo de rotación respecto a un sistema de referencia ligado al sólido.

Comprendamos estos conceptos con tres ejemplos sencillos:

1. Cilindro sobre un plano inclinado



Figura 4.1.: Cilindro sobre un plano inclinado

En este primer caso, el Centro Instantáneo de Rotación coincide con el punto de contacto entre el plano y el cilindro. La base coincide con el plano inclinado y la ruleta con la superficie del cilindro.

2. Sistema Tierra-Sol

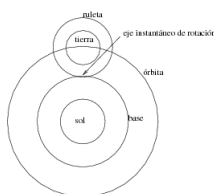


Figura 4.2.: Sistema Tierra-Sol

En éste, el centro instantáneo de rotación se moverá junto con la Tierra a unos 400 Km en dirección al Sol. La base será una circunferencia (no estamos considerando que en realidad la órbita terrestre sea elíptica) con centro en el Sol y radio hasta el CIR, mientras que la ruleta será otra circunferencia con centro en la Tierra y radio hasta el CIR.

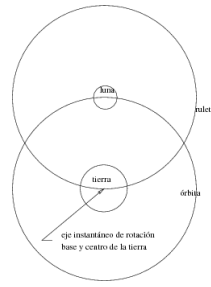


Figura 4.3.: Sistema Tierra-Luna

3. Sistema Tierra-Luna

Por último, en el caso de la Luna orbitando y rotando alrededor de la Tierra, el centro instantáneo de rotación coincide con el centro de la tierra. Esto significa que la base será una circunferencia de radio cero (un punto) coincidente también con el centro de la tierra, y que la ruleta será una circunferencia con centro en la Luna y radio hasta el centro de la tierra. Es fácil entender de este modo porqué la Luna muestra siempre la misma cara a la Tierra.

4.3.1. En el espacio: conos polhodio y herpolhodio

Cuando nos encontramos en el espacio, necesitaremos más datos para determinar unívocamente la posición y estado de movimiento del sólido rígido:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Tendremos tres coordenadas en lugar de dos para los vectores de posición. Además, la velocidad angular no tendrá una dirección fija.

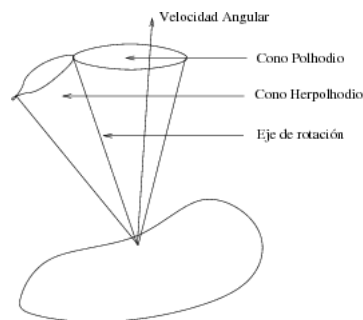


Figura 4.4.: Conos polhodio y herpolhodio

Ésta se moverá describiendo un cono al que llamaremos *cono polhodio* que juega un papel simétrico al que jugaba la ruleta en el caso bidimensional. Asimismo, igual que en

4. Indagar más en el Sólido Rígido

el caso bidimensional teníamos una base sobre la que rodaba la ruleta, tendremos en el espacio otro cono al que denominaremos *Herpolhodio*. El eje sobre el que se apoyan ambos conos que recibió el nombre de eje instantáneo de rotación en el caso plano, será ahora un *eje de rotación sobre el que las partículas sólo presentan movimiento de traslación*, que podremos localizar del siguiente modo:

$$\vec{r} = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \mu \vec{\omega}$$

4.4. El trompo de Kovalevskaya

Kovalevskaya



Sofía **Kovalevskaya** (1850-1891) fue una brillante matemática rusa, nihilista, poetisa y la primera mujer profesora en una facultad de ciencias. Su vida es sin duda digna de la más apasionante de las novelas. Se casó en 1868 por conveniencia (práctica común entre los nihilistas) para huir de Rusia y poder estudiar en Heidelberg donde sólo la admitieron como oyente.

En 1870 viaja a Berlín donde pide a Weierstrass clases particulares. Trabaja con él y en 1874 se doctoró “cum laude”. Vuelve a Rusia durante un tiempo donde sigue sin poder dar clases dedicándose a la literatura durante un tiempo.

En 1880 vuelve al mundo de las matemáticas y viaja a París donde conoce a Hermite, Poincaré y Picard y es elegida miembro de la Sociedad matemática. Tres años después es propuesta como profesora en la universidad de Estocolmo, convirtiéndose en la primera mujer profesora en una universidad de ciencias.

En 1886 decide ocuparse del problema matemático propuesto para el Premio Bordin de la Academia de las Ciencias de París sobre la rotación de un cuerpo en torno a un punto fijo. No sólo lo ganó, sino que se decidió que su solución era tan elegante que aumentaron en 2000 libras la cuantía del premio.

Muere tras una enfermedad en 1891.

4.4.1. Trompos que pueden estudiarse

Llamando $\vec{\gamma}$ al vector unitario en la vertical inercial expresado en coordenadas del sistema no inercial, las ecuaciones de Euler toman la forma[GN99]:

$$\begin{aligned} \hat{I} \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\hat{I} \vec{\omega}) &= \vec{r}_{CM} \times \vec{\gamma} \\ \dot{\vec{\gamma}} + \vec{\omega} \times \vec{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para el caso más general, las ecuaciones admiten tres integrales primeras:

$$\begin{aligned} \text{vector unitario vertical } C_1 &= \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} = 1 \\ \text{energía } C_2 &= \frac{1}{2} (\hat{I} \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} + \vec{r}_{CM} \cdot \vec{\gamma} \\ \text{componente vertical del momento angular } C_3 &= (\hat{I} \vec{\omega}) \cdot \vec{\gamma} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se puede encontrar una cuarta integral primera en los siguientes casos:

1. Trompo esférico: $I_1 = I_2 = I_3$

Es inmediato ver que se conserva la componente de la velocidad angular que pasa por el centro de masas.

$$C_4 = \vec{\omega} \vec{r}_{CM} \quad (4.3)$$

2. Caso de Euler-Poinsot: $\vec{r}_{CM} = 0$

Cuando el punto fijo coincide con el centro de masas.

$$C_4 = \left(\hat{I} \vec{\omega} \right) \cdot \left(\hat{I} \vec{\omega} \right) \quad (4.4)$$

3. Caso de Lagrange-Poisson: $I_1 = I_2$ y $\vec{r}_{CM} = (0, 0, z)$

Si tenemos un trompo simétrico con el centro de gravedad a lo largo del eje vertical, se mantendrá constante la componente vertical de la velocidad angular.

$$C_4 = \omega_3 \quad (4.5)$$

4. Trompo de Kovalevskaya: $I_1 = I_2 = 2I_3$ y $\vec{r}_{CM} = (x, 0, 0)$

Se trata de un trompo simétrico respecto al eje Z con unas proporciones determinadas y cuyo centro de masas se encuentra sobre el eje X del sistema de referencia no inercial.

Se puede llegar a encontrar¹ una cuarta integral primera de la forma:

$$C_4 = \left((\omega_1 + i\omega_2)^2 + r_1 (\gamma_1 + i\gamma_2) \right) \left((\omega_1 - i\omega_2)^2 + r_1 (\gamma_1 - i\gamma_2) \right) \quad (4.6)$$

¹En [PG05] se puede ver un desarrollo bastante detallado y más o menos asequible.

5. Resolución de problemas de sólido rígido

5.1. Paralelepípedo libre de momentos con punto fijo

Un paralelepípedo homogéneo de masa m , recto, de base cuadrada de lado a y de altura h se mueve en ausencia de fuerzas externas y de modo que el centro O de una de sus caras cuadradas es fijo. Sean $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tres vectores ortonormales solidarios con el sólido y dirigidos según sus aristas, con origen en O , de forma que dicha base está en el plano que forman \vec{i} y \vec{j} . Los momentos principales de inercia son $I_x = I_y = \frac{m}{12}(a^2 + 4h^2)$ y $I_z = \frac{m}{6}a^2$ y los productos de inercia son todos nulos. En dicho sistema de referencia, la velocidad angular inicial es $\vec{\omega}_0 = (1, 0, 1)$. Sabiendo que $a = 2\sqrt{3}h$, calcular la velocidad angular en un instante t tal que $\omega_0 t = \pi$.

.....
 Nuestro sólido es lo que hemos llamado un trompo simétrico, es decir, que tiene dos autovalores de la matriz de inercia iguales (I_x, I_y) y uno diferente (I_z).

Planteamos las ecuaciones del movimiento de Euler:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= N_x \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= N_y \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x &= N_z \end{aligned}$$

Aplicando a las ecuaciones de Euler las condiciones de simetría del trompo y las de ausencia de momentos, obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = I_y \\ N_i \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z = 0 \\ I_x \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0 \\ I_z \underbrace{\dot{\omega}_z}_{\omega_z \equiv Cte} = 0 \end{array} \right.$$

Hemos podido utilizar las simetrías en nuestro favor y librarnos de una de las coordenadas de la velocidad angular.

Nos queda un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Atacaremos derivando

5. Resolución de problemas de sólido rígido

una de ellas respecto del tiempo:

$$\frac{d}{dt} (I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_x) \omega_y \omega_z) = 0$$

$$I_x \ddot{\omega}_x + (I_z - I_x) \dot{\omega}_y \omega_z$$

Tomando de (8.24): $\dot{\omega}_y = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_x \omega_z$

Substituyendo: $I_x \ddot{\omega}_x + \frac{(I_z - I_x)^2}{I_x} \omega_x^2 \omega_z = 0$

Llegamos a una ecuación diferencial ordinaria con soluciones conocidas. Llamando $\Omega = \frac{I_z - I_x}{I_x} \omega_z$:

$$\omega_x = D \cos(\Omega t + \delta)$$

$$\omega_y = D \sin(\Omega t + \delta)$$

Apliquemos las condiciones iniciales para concretar las constantes D y δ :

$$\omega_x|_{t=0} = \omega_0 \rightarrow D = \omega_0$$

$$\omega_y|_{t=0} = 0 \rightarrow \delta = 0$$

Finalmente, la velocidad angular en un instante cualquiera t toma la forma:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 \cos(\Omega t) \\ \omega_0 \sin(\Omega t) \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

5.2. Energía cinética de una barra respecto a sus extremos ..

Probar que la Energía cinética de una barra homogénea de masa m es $T = (\frac{m}{6})(\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2)$ donde \vec{u} y \vec{v} son las velocidades de los extremos.

.....

Centraremos nuestro sistema de referencia en el centro de la barra, situando ésta a lo largo del eje Z . Así, las coordenadas de los extremos A y B serán respectivamente $(0, 0, l/2)$ y $(0, 0, -l/2)$ (siendo l la longitud de la barra).

La barra posee simetría axial respecto al eje z , por lo que dicho eje será un eje principal. Los otros dos ejes X e Y serán equivalentes.

Los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y serán iguales tendrán la forma: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12} m l^2$

En cuanto al momento de inercia respecto al eje Z , lo despreciaremos, ya que si hemos despreciado el grosor de la barra, significa que toda la densidad de masa está concentrada en el mismo eje: $I_3 = 0$

5.3. Cilindro, muelle y plano inclinado

Así, la matriz de inercia toma la forma:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión de la energía cinética toma la forma:

$$T = \begin{cases} T_t = \frac{1}{2}m\bar{v}_c^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)^2 \\ + \\ T_r = \frac{1}{2}\omega I \omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{cases}$$

Para que la barra sea inextensible:

$$\vec{u} - \vec{v} = \omega \times (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \rightarrow \begin{cases} \omega_y z - \omega_z y = u_1 - v_1 \rightarrow \omega_z = \frac{\omega_y z - (u_1 - v_1)}{y} \\ \omega_z x - \omega_x z = u_2 - v_2 \rightarrow \omega_z = \frac{\omega_x z + (u_2 - v_2)}{x} \\ \omega_x y - \omega_y x = u_3 - v_3 \end{cases}$$

$$\frac{\omega_x z + (u_2 - v_2)}{x} = \frac{\omega_y z - (u_1 - v_1)}{y} \rightarrow \omega_x y = -\frac{(u_2 - v_2)y}{z} - \frac{(u_1 - v_1)x}{z} + \omega_y x$$

$$(u_1 - v_1)x + (u_2 - v_2)y + (u_3 - v_3)z = 0$$

Ya que no interviene en la expresión de la energía cinética una vez despreciado el grosor de la barra, demos el valor cero a la componente Z de la velocidad angular ω_z :

$$T_r = \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2(\omega_x^2 + \omega_y^2) = \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2 \left(\left(\frac{(-u_2 + v_2)}{z} \right)^2 + \left(\frac{(u_1 - v_1)}{z} \right)^2 \right)$$

$$T = T_t + T_r = \frac{1}{8}m((u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2) + \frac{1}{24}m(((u_1 - v_1))^2 + ((-u_2 + v_2))^2) =$$

$$\boxed{T = \frac{m}{6}(u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2 + u_2^2 + u_2 v_2 + v_2^2)}$$

5.3. Cilindro, muelle y plano inclinado

Pongamos un cilindro sobre un plano inclinado sobre el que rodará sin deslizar[Ant94]. Hagámoslo pender de un muelle por la parte superior del modo en que se muestra en el esquema:

.....
 Analicemos en primer lugar los grados de libertad del sistema para elegir unas coordenadas generalizadas. El cilindro tendría tres grados de libertad en principio que corresponderían con las coordenadas x y y de traslación y la coordenada φ de rotación del

5. Resolución de problemas de sólido rígido

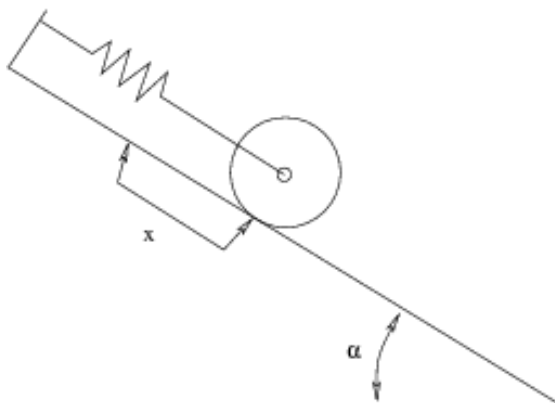


Figura 5.1.: Caso práctico para movimiento bidimensional

sólido. El plano inclinado es la primera ligadura que nos elimina una de las coordenadas de traslación con sólo tomar apropiadamente el sistema de referencia con un eje paralelo al plano. Digamos que nos quedamos con la coordenada x

Otra ligadura nos la da la condición de no deslizamiento, que auna la coordenada de rotación con la de traslación: $x = R\varphi$, donde R es el radio del cilindro.

Con todo nos hemos quedado con un sólo grado de libertad. Llamaremos x a la distancia desde el *centro de masas* del cilindro o el *centro instantáneo de rotación* hasta el punto de elongación nula del muelle.

Podemos utilizar como eje de referencia el centro de masas o el centro instantáneo de rotación. Según el eje elegido, encontraremos una diferencia formal que no debería afectar al resultado final.

Haremos de todas formas ambas variantes para ver cómo se desarrolla el problema paso a paso.

1. Respecto al CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN:

Si estamos "montados" sobre el eje instantáneo de rotación, la energía cinética tomará la forma de la expresión: $T = \frac{1}{2}I_0\omega^2$, en la que el momento de inercia de un cilindro respecto de un eje que pase por el centro de masas viene dado por la expresión: $I_c = \frac{1}{2}mR^2$, y aplicando el teorema de Steiner podemos calcular dicho momento respecto al eje instantáneo de rotación: $I_0 = I_c + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

Metiendo esto en la expresión de la energía cinética:

$$T = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

2. Respecto al CENTRO DE MASAS:

La expresión de la energía cinética respecto al eje que pasa por el centro de masas tomará una forma diferente: $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$. Ahora el momento de inercia responde a la expresión: $I_c = \frac{1}{2}mR^2$, con lo que, finalmente:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

5.3. Cilindro, muelle y plano inclinado

Llegamos, por tanto a la misma expresión por ambos caminos para la energía cinética. El resto del análisis se desarrollará idénticamente para ambos planteamientos:

En cuanto al potencial, tendremos que ponerle dos sumandos, el del potencial gravitatorio y el del potencial central del muelle:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mgx\text{sen}(\alpha)$$

(En la expresión del potencial van implícitas las ligaduras del plano inclinado.)

Ya tenemos la expresión del Lagrangiano, que meteremos en la ecuación de Lagrange y sacaremos en un momento las ecuaciones del movimiento (en éste caso una única ecuación para un único grado de libertad):

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - mgx\text{sen}(\alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} - kx - mg\text{sen}(\alpha) = 0}$$

Parte II.

Oscilaciones pequeñas

6. Fenomenología

6.1. Harmonices Mundi

El universo es indiscutiblemente armónico. Desde la inmensa sinfonía que disfrutaban escuchando los astrónomos hasta los caprichosos e impredecibles bailecillos cuánticos que se convierten en coreografías tremendamente ricas en los cristales. La óptica, el electromagnetismo e incluso la termología llegan antes o después a descubrir esa sutil armonía que lo rige todo.

Es como si el universo hubiese sido interpretado por un Paganini encaprichado en esconder tras complejísimos arpeggios una melodía sencilla y pegadiza.

La música es algo capaz de conmover a todo el mundo, hay algo metafísico escondido tras el movimiento armónico, las frecuencias y oscilaciones que hacen a la música ser la más universal de las artes. En ocasiones parece como si nuestros modos normales internos entrasen en resonancia de alguna manera con los modos compuestos por uno u otro músico.

Paul McCartney respondió en cierta ocasión a una periodista que le preguntaba cuál era el secreto del éxito de los Beatles diciendo que el ritmo básico con el que componían sus canciones era el ritmo de los latidos del corazón.

¿Es descabellado pensar que el acoplo entre la frecuencia de la batería de Ringo y los latidos de nuestro corazón pudiese producir algún tipo de resonancia que afecte a nuestros biorritmos? ¿Podría haber una explicación física a la sensación de alegría, melancolía e incluso éxtasis que la música puede transmitirnos?

6.2. ¿Y qué tiene de fascinante un péndulo?

Suele contarse que todo comenzó con un aburrido Galileo oyendo misa en la catedral de Pisa (una breve y divertida historia de los descubrimientos de Galileo más detallada en [Gam80]) Una lámpara que había sido empujada por un monaguillo al encenderla comenzó a describir unas oscilaciones que sin duda tenían más interés para **Galileo** que las palabras del sacerdote. Midió el período de las oscilaciones de la lámpara usando como reloj los latidos de su corazón y quedó fascinado al comprobar que aunque las oscilaciones descritas por la lámpara eran cada vez menores, dicho período se mantenía tozudamente constante.

Galileo

Al llegar a casa, amarró una piedra a una cuerda y la colgó del techo para observar su movimiento. Lo hizo con diferentes cuerdas y piedras y su sorpresa no pudo ser mayor al descubrir que tampoco importaba lo gorda que fuese la piedra, sino únicamente de la longitud de la cuerda.

6. Fenomenología

Pensemos en el problema e imaginemos el péndulo como una masa y una cuerda. ¿Cuál es el elemento más importante? Es gracioso que cuando dibujamos el péndulo lo que más se vea sea la masa y que incluso al plantear el problema en un formalismo Lagrangiano nos pongamos a escribir directamente la expresión de las energías cinética y potencial dejando implícitas las ecuaciones de ligadura.

¡Pero si la ligadura es lo único que importa! ¿Acaso Galileo supo verlo y nosotros, sabiéndolo de antemano, no somos capaces a darnos cuenta?

Antes de abandonar definitivamente su carrera como médico, Galileo dejó su legado en ese mundo con el “**pulsómetro**”, que no era más que usar el péndulo como regla de medida para tomar el pulso a los pacientes. Invirtió el proceso que comenzara en la catedral.

pulsómetro

El péndulo fue el sistema experimental que inspiró las leyes de caída de los cuerpos de Galileo, rompiendo por fin la idea aristotélica de que una bola de hierro caería más rápido que una de madera. Había nacido el nuevo paradigma, “la edad del péndulo”.

Naturalmente, luego llegarían los famosos (aunque supuestamente ficticios) experimentos de Galileo arrojando pesos desde la torre de Pisa, aunque eso fue sólo un segundo plato, quizá más adornado y aplaudido, pero nada interesante comparado con la magnificencia de un péndulo.

Observar lo que Galileo supuestamente mostró desde la torre de Pisa era muy complicado. Las cosas caían demasiado rápido por aquel entonces.

Las ligaduras (las del péndulo y las del plano inclinado) fueron las que permitieron a Galileo hacer caer los cuerpos lo suficientemente despacio como para tomar medidas con una “**clepsidra**”, estudiar su dinámica y predecir lo que sucedería al arrojarlos desde la torre de Pisa.

clepsidra

6.3. Oscilador armónico simple

Como empieza a vislumbrarse, la base de todo nuestro estudio es el oscilador armónico simple, es decir, una masa y un potencial tipo Hooke. Veamos un tratamiento matemático básico de este tipo de sistemas.

6.3.1. Oscilador armónico unidimensional

Una manera de definir un oscilador, un movimiento armónico, es decir que tendrá un tiempo característico al que llamaremos **período** (T) en el que el sistema vuelve al estado de movimiento inicial:

período

$$x(t + T) = x(t) \tag{6.1}$$

Aplicando Lagrange sobre dicho sistema, y considerando para simplificar que el origen de coordenadas coincide con el mínimo de potencial ($U(x = 0) = 0$):

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\
U(x) &= \frac{1}{2}kx^2 \\
\mathcal{L} &= T - U \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Obtenemos fácilmente la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{6.3}$$

Llamando $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a la frecuencia, que es un parámetro inversamente proporcional al período,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{6.4}$$

Las soluciones para este tipo de potencial son de tipo armónico, están bien estudiadas y son sencillas de tratar:

Oscilador unidimensional

$$\left. \begin{aligned} x &= A\sin(\omega t) \\ &\text{ó} \\ x &= A\cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \text{una c. lineal: } x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \tag{6.5}$$

6.3.2. Oscilador bidimensional anisótropo

Al añadir una segunda dimensión y no considerar isotropía (la constante recuperadora depende de la dirección), hemos de considerar una constante recuperadora diferente para cada dimensión, es decir, dos curvaturas diferentes en la geometría del potencial (ver ilustración 6.1):

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) \tag{6.6}$$

En este caso, al aplicar Lagrange con las coordenadas generalizadas x e y bien elegidas, obtendremos dos **soluciones desacopladas**:

soluciones desacopladas

Oscilador bidimensional

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= 0 \rightarrow x = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= 0 \rightarrow y = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} \right\} \vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

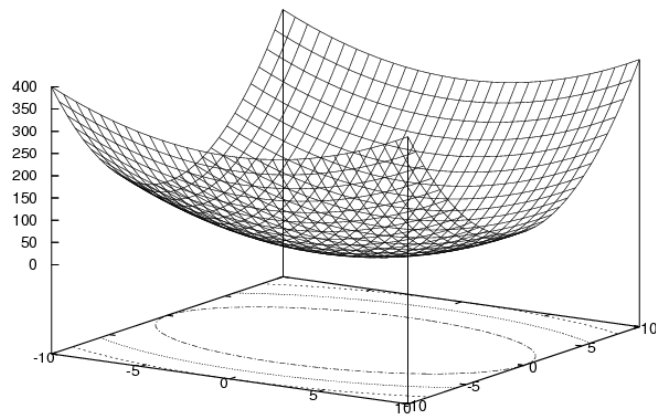


Figura 6.1.: Potencial bidimensional anisótropo

Al decir que las soluciones están desacopladas queremos expresar que el sistema se mueve como superposición de dos sistemas unidimensionales más simples. Esta será la base de casi todo nuestro trabajo posterior, donde trataremos de encontrar esas coordenadas que simplifican el problema separándolo en problemas más simples (divide y vencerás) con las que la naturaleza parece construir el universo.

7. Sintetización

En este bloque vamos a buscar un proceso sistemático que permita desmembrar a la propia naturaleza. El universo que vamos a construir no pretende ser en general un reflejo fiel de la realidad objetiva sino una serie de metáforas lo más sencillas y elegantes posible de un sistema que parece ser demasiado complejo para estudiarlo de un plumazo.

7.1. Muelles, masas y paredes

Contínuamente dibujaremos diagramas con muelles, masas y paredes. En general, no tenemos por qué estar hablando de muelles físicos sino de interacciones de tipo armónico entre partículas.

Un **muelle real** tiene masa y por ello adopta forma de catenaria¹ bajo la acción de la gravedad. Además posee unos ciertos límites a su elasticidad impuestos por su configuración para elongaciones demasiado pequeñas y por el límite elástico (entrada en el régimen plástico) para elongaciones demasiado grandes.

muelle real

Nuestros muelles idealizados actuarán en **régimen elástico** para toda la recta real de sus elongaciones.

régimen elástico

Como hemos comentado, hay muchos sistemas en la naturaleza que podemos sintetizar como si se tratase de paredes, masas y muelles con una cierta pérdida de precisión en algunos casos (en los que hablaremos de una primera aproximación de tipo armónico) o como un simple ejercicio de abstracción.

Vamos a construir universos absolutamente inexistentes cuya única conexión con la realidad objetiva pasa por las leyes matemáticas que rigen su movimiento. Es un proceso de abstracción bastante fuerte que en algunos casos resultará intuitivo pero en muchos otros no y que nos permitirá hacernos al menos con una idea en una primera aproximación de cómo va a reaccionar la naturaleza bajo determinadas circunstancias.

Habrà casos en que la matemática no sepa darnos una respuesta elegante al problema completo y tengamos que acudir a un modelo abstracto más sencillo que sí sea capaz de darnos respuestas parciales o aproximadas acerca del sistema objeto de estudio.

¹Se llama catenaria a la curva matemática descrita por un hilo pesado, homogéneo y de sección constante, suspendido por sus extremos y sometido a la acción de la gravedad:

$$y(x) = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$
$$c = \frac{T_a}{\lambda} = \frac{T_a}{Mg} L \rightarrow \lambda = \frac{Mg}{L} \quad (7.1)$$

7.2. Potenciales

Un muelle ideal en nuestras construcciones se corresponde con un **potencial armónico**, es decir, de la forma:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

potencial armónico

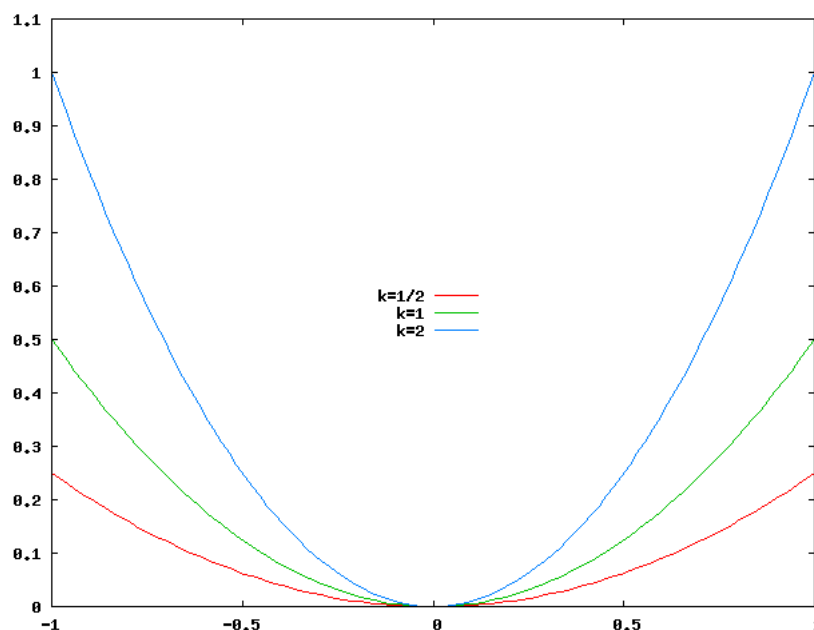


Figura 7.1.: Topología del potencial armónico con k

Donde x es la separación respecto a la posición de equilibrio y k , que típicamente se corresponde con la constante elástica del muelle, describe el grado de confinamiento por energía. A mayor k el potencial se hace más estrecho y pronunciado y las oscilaciones para una misma energía serán de menor amplitud.

Sin embargo, sabemos que hay potenciales exóticos en la naturaleza que no tienen por qué parecerse a un potencial armónico. En general vamos a poder aproximarlos por uno de este tipo a través de un desarrollo en serie de Taylor siempre y cuando las oscilaciones descritas (el rango de energías) sean suficientemente pequeñas.

Veamos como ejemplo un par de potenciales no armónicos:

1. $U(x) = x^4$

Este potencial es en realidad intrínsecamente anarmónico.

2. $U(x) = |x|$

En este caso, el potencial no es derivable en $x = 0$ por lo que no existe un desarrollo en serie de Taylor en torno a dicho punto.

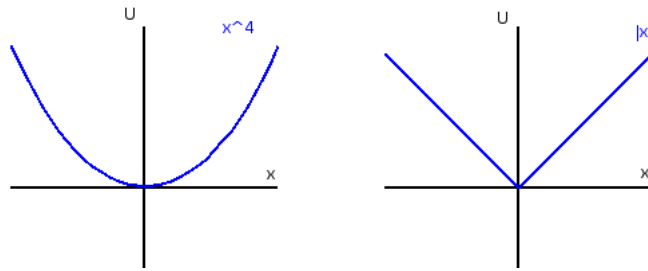


Figura 7.2.: Potenciales exóticos

7.2.1. Equilibrio

Cuando nos encontramos con un potencial arbitrario, lo más inmediato que se nos ocurre hacer para estudiarlo es buscar sus puntos críticos, de los que especialmente nos interesan los extremos porque constituirán los **puntos de equilibrio** en torno a los cuales se producirán las oscilaciones.

puntos de equilibrio

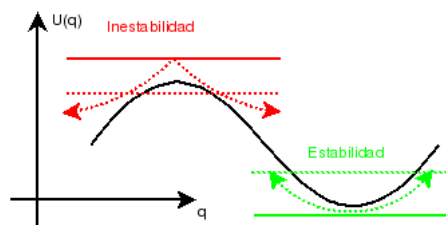


Figura 7.3.: Topología de un potencial

La forma de buscar estos puntos de equilibrio es bien conocida:

Puntos de equilibrio

$$U = U(x_i) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_i} \equiv 0 \rightarrow \vec{x}_0$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}_0} > 0; \forall i, j \rightarrow \text{mínimo} \rightarrow \text{equilibrio estable}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}_0} < 0; \forall i, j \rightarrow \text{máximo} \rightarrow \text{equilibrio inestable}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{x}_0} \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \rightarrow \text{punto de inflexión, silla...} \quad (7.2)$$

7.2.2. Aproximación por potencial armónico

Una vez hemos localizado los puntos de equilibrio estables, vamos a describir pequeñas oscilaciones en torno a los mismos. Hemos titulado el bloque como oscilaciones pequeñas. ¿Cómo de pequeñas deben ser, pues, esas oscilaciones? La respuesta está en el potencial que tengamos y cuánto se parezca a un potencial armónico.

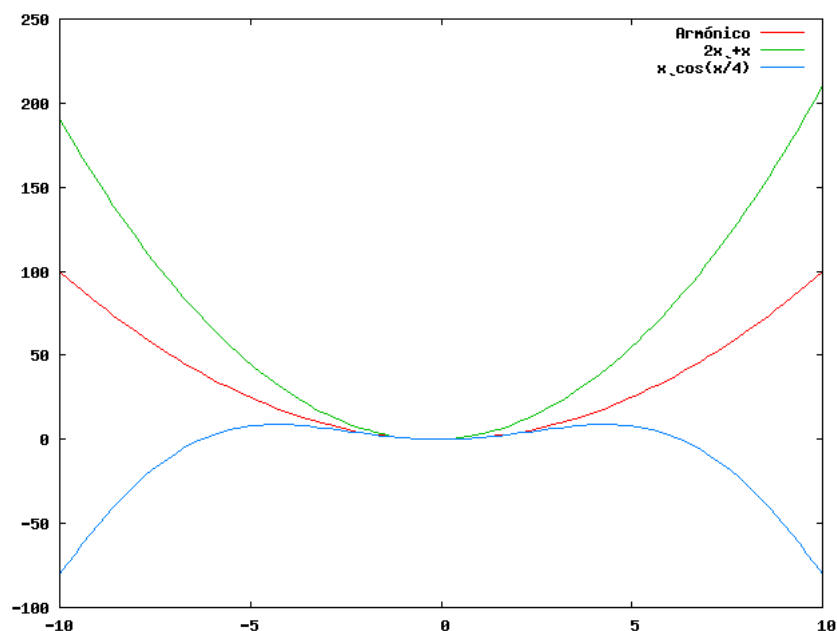


Figura 7.4.: Cerca del punto de equilibrio los potenciales se confunden

Como vemos en la figura 7.4 podemos tener potenciales que para oscilaciones suficientemente pequeñas se comporten perfectamente como armónicos mientras que para oscilaciones grandes ni siquiera se comporten de un modo oscilatorio.

8. Construcción del universo

8.1. Péndulos acoplados

Nuestro primer universo va a constar de dos masas iguales m unidas por tres muelles sin masa y de constante elástica k a dos paredes ($m = \infty$).

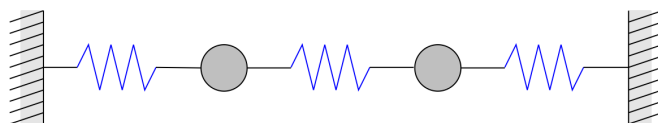


Figura 8.1.: Sistema de dos masas

En realidad, al plantear este sistema no queremos hablar de muelles sino de partículas que reaccionan armónicamente. Los muelles son sólo una metáfora para representar potenciales armónicos.

Veamos con un estudio Lagrangiano cómo se comporta el sistema ante pequeñas perturbaciones.

8.1.1. Coordenadas generalizadas

El sistema tendría tres grados de libertad por cada una de las masas puntuales que lo componen. Por el modo de activación limitamos al movimiento en una sólo dimensión quedándonos con un grado de libertad para cada partícula.

Parece razonable utilizar como coordenadas generalizadas las separaciones de estas masas de sus respectivos puntos de equilibrio (x_1 y x_2).

8.1.2. Energía potencial

La energía potencial será de tipo elástico. La plantearemos en tres términos (uno por cada muelle) de la siguiente manera:

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = k(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \quad (8.1)$$

8.1.3. Energía cinética

El término de energía cinética es si cabe más simple que el potencial.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (8.2)$$

Se trata sencillamente de las energías cinéticas correspondientes a cada partícula.

8.1.4. Lagrangiano y ecuaciones de movimiento

Con ambos términos podemos atacar al Lagrangiano y buscar las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = T - U &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= m\ddot{x}_i + k(2x_i - x_j) = 0 \\
 \text{Sumando } \rightarrow m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) \\
 u = x_1 + x_2 \rightarrow \ddot{u} &= \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \\
 m\ddot{u} + ku = 0 \rightarrow \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\
 \text{Restando } \rightarrow m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(3x_1 - 3x_2) \\
 v = x_1 - x_2 \rightarrow \ddot{v} &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \\
 m\ddot{v} + 3kv = 0 \rightarrow \omega_2^2 &= \frac{3k}{m} \tag{8.3}
 \end{aligned}$$

8.1.5. Coordenadas normales

De manera natural nos han aparecido dos ecuaciones diferenciales correspondientes a sendos osciladores armónicos pero referidas a unas coordenadas que no son las que nosotros habíamos propuesto en un principio. Hemos encontrado unas coordenadas generalizadas que no nos parecían en absoluto intuitivas en un principio pero que simplifican el problema hasta tal punto que parecen ser las coordenadas que la propia naturaleza maneja.

Las ecuaciones de transformación para estas coordenadas son:

$$x_1 = \frac{u+v}{2}; \quad x_2 = \frac{u-v}{2} \tag{8.4}$$

Veamos cómo funciona Lagrange con ellas:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m \left(\frac{1}{4}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{u}\dot{v}) + \frac{1}{4}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 - 2\dot{u}\dot{v}) \right) - \\
 &- k \left(\frac{1}{4}(u^2 + v^2 + 2uv) + \frac{1}{4}(u^2 + v^2 - 2uv) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m}{2}}_{m_a} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{k}{2}}_{k_a} (u^2 + 3v^2) = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}m_a \dot{u}^2 - \frac{1}{2}k_a u^2}_{m_a} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{m_b}{m_a} \dot{v}^2 - \frac{1}{2} \frac{k_b}{3k_a} v^2}_{m_b} \tag{8.5}
 \end{aligned}$$

Está claro que el sistema se desacopla en dos osciladores armónicos asociado cada uno a su respectiva coordenada u ó v .

A estos subsistemas en que se descompone el sistema inicial los denominaremos con el apellido “normales”, hablando por tanto de **coordenadas, frecuencias y modos normales de vibración**.

coordenadas, frecuencias y modos normales de vibración

$$\omega_a^2 = \frac{k_a}{m_a} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{m}{2}} = \omega_1^2; \quad \omega_b^2 = \frac{k_b}{m_b} = \frac{\frac{3k}{2}}{\frac{m}{2}} = \omega_2^2 \quad (8.6)$$

Una vez hemos descubierto que existen unas coordenadas capaces de desacoplar el sistema en una serie de subsistemas mucho más sencillos, es inmediato ponerse a buscar la lógica que rige la elección de esas coordenadas para sistemáticamente buscarlas y utilizarlas.

8.1.6. El álgebra de las masas y los muelles

Volvamos al resultado que obtuvimos en 8.3 y ordenémoslo de una forma inteligente:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + 0\ddot{y} + 2kx - ky &= 0 \\ 0\ddot{x} + m\ddot{y} - kx + 2ky &= 0 \\ \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Los términos cruzados de la ecuación son los que producen los términos no diagonales en la **matriz elástica** y los que producen el acoplamiento.

matriz elástica

En definitiva nos quedamos con una ecuación diferencial que en forma matricial es un perfecto oscilador armónico.

$$\hat{M}\vec{q} + \hat{K}\vec{q} = \vec{0} \quad (8.8)$$

donde $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Propongamos una solución armónica de tipo sinusoidal:

$$\vec{q} = \vec{A} \cos(\omega t + \phi) \quad (8.9)$$

Estamos proponiendo una solución bastante peculiar con un término armónico común a todos los subsistemas.

Introduciéndolo en la ecuación 8.8:

$$\begin{aligned} -\hat{M}\omega^2 \vec{A} \cos(\omega t + \phi) + \hat{K} \vec{A} \cos(\omega t + \phi) &= 0 \\ (\hat{K} - \hat{M}\omega^2) \vec{A} &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Esta ecuación tiene una solución para $\vec{A} = \vec{0}$ que corresponde con todo el sistema en equilibrio. Si esto no se cumple, estamos ante una ecuación de autovalores normalizada a través de \hat{M} :

$$\left| \hat{K} - \hat{M}\omega^2 \right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.11)$$

8. Construcción del universo

Los autovalores que obtenemos se corresponden con las frecuencias normales:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} ; \omega_2^2 = 3\frac{k}{m} \quad (8.12)$$

El álgebra nos dice que habrá tantas frecuencias como grados de libertad tenga el sistema (con posibilidad de degeneración)

Una misteriosa inercia algebraica nos pide que busquemos los autovectores del sistema:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \hat{K} - \hat{M}\omega^2 &= \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \beta \\ \vec{A}_1^t \hat{M} \vec{A}_1 &= 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \omega_2^2 = 3\frac{k}{m} \rightarrow \hat{K} - \hat{M}\omega^2 &= \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = -\beta \\ \vec{A}_2^t \hat{M} \vec{A}_2 &= 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{aligned} \quad (8.13)$$

Con todo, la matriz de autovalores se nos queda como:

$$\hat{A} = \pm \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Las posibles soluciones del sistema serán:

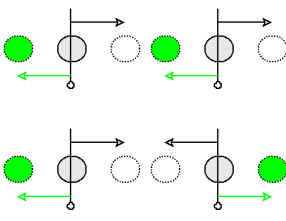
$$\vec{q}_i = \vec{A}_i \cos(\omega_i t + \phi) \quad (8.15)$$

8.1.7. Modos normales

Obtendremos una solución con una elongación del mismo signo (\vec{A}_1) para ambas masas y una frecuencia característica $\omega_1 = \frac{k}{m}$ que es el equivalente a que cada una de las masas oscilase sólo en su propio universo.

La otra solución impone elongaciones de signo opuesto (\vec{A}_2) a ambas masas y una frecuencia tres veces mayor ($\omega_2 = 3\frac{k}{m}$). En este caso las masas se desplazan en todo momento tendiendo a acercarse o a alejarse entre sí.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m}} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi)$$

(8.16)

Estos dos casos son los dos **modos normales de vibración** del sistema, y la solución más general del problema será una combinación lineal de ambos.

modos normales de vibración

8.2. Atacando al sistema más general

Veamos paso a paso cómo atacar mediante la aproximación de oscilaciones pequeñas a un sistema lo más general posible.

8.2.1. Energía potencial y cinética

Lo primero es estudiar la topología del potencial como vimos en la sección 7.2.1:

$$U = U(q_1, \dots, q_n) \rightarrow Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} \equiv 0 \rightarrow \text{Equilibrio en } q_j^0 \quad (8.17)$$

Desarrollando en serie de Taylor el término de potencial obtenemos:

$$U(q_1, \dots, q_n) \approx \begin{cases} U(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0) + \\ + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)^0 (q_i - q_i^0) + \\ + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)^0 (q_i - q_j)(q_j - q_i) + \\ + \dots \end{cases} \begin{cases} \equiv 0 \text{ Origen de potencial} \\ \equiv 0 \rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial q_j} \right)^0 = 0 \\ \rightarrow 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

Utilizando como coordenadas generalizadas los desplazamientos respecto al equilibrio:

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_i \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right) \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} (\eta_1, \dots, \eta_n) \begin{pmatrix} k_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\eta} \hat{K} \vec{\eta}^t \quad (8.19)$$

En cuanto a la energía cinética, consideraremos que tratamos sistemas naturales, es decir:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \equiv T_2 = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}} \hat{M} \dot{\vec{\eta}}^t \quad (8.20)$$

La **matriz de masas** la formamos como $\hat{M} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\eta}_i \partial \dot{\eta}_j} \right)^0$. Por la isotropía del espacio

matriz de masas

8. Construcción del universo

en nuestro universo, se cumple la **condición de Schwartz** $\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\eta}_i \partial \dot{\eta}_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\eta}_j \partial \dot{\eta}_i}$ que nos dice que la matriz de masas será simétrica y por tanto diagonalizable sin pérdida de generalidad.

condición de S

8.2.2. Lagrange

Atacando de este modo a Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^t \hat{M} \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^t \hat{K} \vec{\eta} \quad (8.21)$$

Como vimos en 8.1.6 para un caso con dos grados de libertad¹, las ecuaciones de Lagrange nos llevan a unas ecuaciones de movimiento bien elegantes de la forma:

$$\hat{M} \ddot{\vec{\eta}} + \hat{K} \vec{\eta} = 0 \quad (8.22)$$

Esta ecuación se parece bastante a la del oscilador armónico, pero se hace necesaria una linealización que hemos de hacer a través de un problema de **autovalores**:

autovalores

$$(\hat{K} - \hat{M}\omega^2) \vec{A} = \vec{0} \rightarrow \hat{M}^{-1} \hat{K} \vec{A}_k = \omega_k^2 \vec{A}_k \quad (8.23)$$

donde los autovalores serán los cuadrados de las **frecuencias normales** ω_k^2 y los autovectores \vec{A}_k se corresponderán con las coordenadas normales \vec{Q}_k asociadas a cada frecuencia normal una vez ortonormalizadas a través de la matriz de masas:

frecuencias normales

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & & A_{1n} \\ & \ddots & \\ A_{n1} & & A_{nn} \end{pmatrix} \\ \hat{A} \hat{K} \hat{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{pmatrix} \\ \hat{A} \hat{M} \hat{A}^{-1} &= \mathbb{I} \\ \vec{Q}_k &= \hat{A}^t \hat{M} \vec{q}_k \end{aligned} \quad (8.24)$$

8.3. Método sistemático de ataque

Con lo que hemos visto, podemos definir un método sistemático para atacar cualquier sistema:

1. Planteamiento del potencial y búsqueda de posiciones de equilibrio. Matriz elástica \hat{K} .

$$U = U(q_i) \rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2} \right)_{\vec{q}_0} > 0 \quad (8.25)$$

¹Estamos haciendo inducción para generalizar.

$$\hat{K} \rightarrow K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{\vec{q}_0} \quad (8.26)$$

2. Planteamiento de la energía cinética y el lagrangiano. Matriz de masas \hat{M} .

$$\hat{M} \rightarrow M_{ij} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right)_{\vec{q}_0} \quad (8.27)$$

3. Problema de autovalores: obtención de frecuencias normales.

$$\left| \hat{K} - \hat{M}\omega^2 \right| = 0 \rightarrow \omega_k \quad (8.28)$$

4. Obtención de autovectores \hat{A} : modos normales.

$$\begin{aligned} (\hat{K} - \hat{M}\omega^2) \vec{A}_k = \vec{0} \rightarrow \hat{A} \hat{M} \hat{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} \omega_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_N^2 \end{pmatrix} \\ A_i \hat{M} A_j^t &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (8.29)$$

5. Coordenadas normales \vec{Q} .

$$\vec{Q} = \hat{A}^t \hat{M} \vec{q} \quad (8.30)$$

9. Rumbo al continuo

Lo que hemos visto hasta ahora eran problemas que ya se habían estudiado aunque con menos profundidad. Podríamos haberlos estudiado sin necesidad de plantear estos formalismos.

Ahora vamos a atacar problemas más complejos que nos muestren una mayor riqueza física y fenomenológica y nos ayuden a adentrarnos en la intimidad armónica del universo.

9.1. El problema de los tres cuerpos

Siempre es divertido y enriquecedor estudiar un problema clásico muy complejo (incluso irresoluble) sometiéndolo a unas determinadas condiciones que nos permitan llegar a alguna conclusión a un precio razonable. En este caso vamos a hacer una aproximación al problema de los tres cuerpos considerando que se hallan situados sobre una circunferencia y se comunican entre sí mediante sencillos potenciales armónicos.

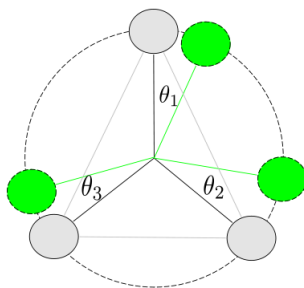


Figura 9.1.: Molécula triatómica

Puede parecer una aproximación muy burda para el problema clásico de los tres cuerpos vistos como esferas celestes, pero si pensamos en **moléculas triatómicas**, por ejemplo, puede que la aproximación no sea tan descabellada.

moléculas triatómicas

Tenemos, por tanto, tres masas (iguales por simplicidad) obligadas a moverse a lo largo de una circunferencia de radio R y acopladas entre sí a través de tres potenciales (también iguales). Parece sensato tomar como coordenadas generalizadas los desplazamientos respecto a las posiciones de equilibrio θ_1, θ_2 y θ_3 (la posición de equilibrio se dará cuando el triángulo formado por las tres masas sea equilátero).

9.1.1. Matrices de masas y potenciales

Planteamos las energías cinética y potencial para obtener desde ellas las matrices de masas y potencial.

9. Rumbo al continuo

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}mR^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \\
 U &= \frac{1}{2}kR^2 ((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_1)^2) \\
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}mR^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) - \frac{1}{2}kR^2 ((\theta_1 - \theta_2)^2 + (\theta_2 - \theta_3)^2 + (\theta_3 - \theta_1)^2) \\
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} &= mR^2 \dot{\theta}_j \\
 \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_j \partial \dot{\theta}_i} &= mR^2 \delta_{ij} \\
 \hat{M} &= mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R^2 \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \\
 \frac{\partial U}{\partial \theta_j} &= kR^2 (2\theta_j - \theta_{j-1} - \theta_{j+1}) \\
 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_j \partial \theta_i} &= \begin{cases} i = j \rightarrow 2kR^2 \\ i \neq j \rightarrow -kR^2 \end{cases} \\
 \hat{K} &= R^2 \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix} \tag{9.1}
 \end{aligned}$$

9.1.2. Frecuencias y modos normales

Planteando el problema de autovalores:

$$|\hat{K} - \hat{M}\omega^2| = 0 \rightarrow R^6 m \omega^2 (m\omega^2 - 3k)^2 = 0 \tag{9.2}$$

Obtenemos una primera frecuencia normal que es idénticamente cero $\omega_1 = 0$. Se trata de una solución un tanto insípida pero necesaria, que es que todas las masas se muevan con una misma velocidad en un mismo sentido manteniendo sus distancias relativas invariantes.

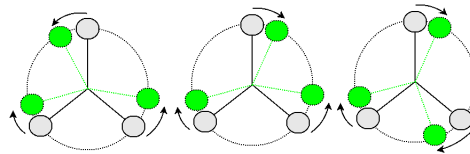


Figura 9.2.: Modos normales de la molécula triatómica

degeneradas

Las otras dos soluciones están **degeneradas** en una sola $\omega_2 = \omega_3 = 3\frac{k}{m}$, pues representa dos modos de oscilación con una perfecta simetría especular.

9.1.3. ¡Un grillón de cuerpos!

Es interesante ver cómo este formalismo nos permite atacar de un modo sencillo un problema a priori complejo. Sabemos que no somos capaces de estudiar un sistema de más de dos cuerpos sin algún tipo de aproximación. Acabamos de resolver este problema con tres cuerpos. ¿Seremos capaces de resolverlo para cuatro? ¿Y para diez? ¿Y para mil? ¿Y para un trillón? ¿Y para un grillón¹ de cuerpos?

La primera imagen que se nos puede venir a la cabeza es la de una matriz verdaderamente monstruosa y la sólo idea de tener que diagonalizarla a mano podría producirnos un paro cardíaco. Quizá un ordenador sería capaz de manejar algo grande, pero seguro que llegaría un límite en que ningún ordenador fuese capaz de resolverla a lo largo de toda la edad del universo.

Pero hay algo que los ordenadores no saben computar, y es que, como buenos magos, siempre tenemos una sorpresa escondida en la chistera.

Quizá ya nos hemos percatado de la simetría que apareció en el caso de tres cuerpos cuando dos autofrecuencias se degeneraron. ¿Habría muchas autofrecuencias degeneradas en un problema con mil cuerpos? ¿Podremos encontrar un orden, una serie de simetrías, en ese aparente maremágnum que nos ayude a atacarlo?

9.1.4. En busca del orden

Planteemos qué aspecto tendría el lagrangiano para un grillón de cuerpos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}_1^2 + \dots + \frac{1}{2}mR\dot{\theta}_n^2 - \frac{1}{2}kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2 - \dots - \frac{1}{2}kR^2(\theta_n - \theta_{n+1})^2 \quad (9.3)$$

Al plantear las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = 0 \rightarrow mR^2\ddot{\theta}_n + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} R^2(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0 \quad (9.4)$$

Obtenemos, por tanto, la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta}_n + \omega_0^2(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0 \quad (9.5)$$

donde ha desaparecido el radio de nuestras ecuaciones (existe una invariancia de escala).

Aunque no es exactamente la ecuación de un oscilador se parece mucho, así que parece bastante razonable plantear soluciones del tipo $\theta_n(t) = -A_n \cos(\omega t + \phi)$:

$$\omega^2 A_n \cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 (-2A_n \cos(\omega t + \phi) + A_{n-1} \cos(\omega t + \phi) + A_{n+1} \cos(\omega t + \phi)) = 0 \quad (9.6)$$

Simplificando cosenos:

¹Un grillón no es una cantidad, sólo una forma divertida de decir N .

$$\omega^2 A_n + \omega_0^2 (-2A_n + A_{n-1} + A_{n+1}) = 0 \rightarrow A_n \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 \right) + A_{n+1} + A_{n-1} = 0 \quad (9.7)$$

Introduciendo un nuevo orden de armonía en las amplitudes:

$$A_n = A \sin n\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (9.8)$$

Llegamos a:

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + 2 \cos \alpha \right) \sin(n\alpha) = 0 \quad (9.9)$$

Aquí encontramos una primera solución cuando $\sin(n\alpha) = 0$. Eso implicaría $A_n = 0$, es decir, que todas las partículas estuviesen en todo momento en el punto de equilibrio. Es de nuevo una de esas soluciones que nos pueden parecer un tanto obvias pero que son muy necesarias para comprobar que vamos por el buen camino.

Buscándole las cosquillas al otro término llegamos a encontrar la otra condición para que haya soluciones:

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (9.10)$$

Lo más sorprendente y que en seguida salta a la vista es que no hay n , es decir, que parece dar igual que estemos hablando de la primera o de la grillonésimoprimeras partícula.

Así a lo tonto, se nos ocurre pensar... No, no hay una partícula grillonésimoprimeras, sólo teníamos un grillón de partículas. La partícula grillonésimoprimeras es, en realidad de nuevo la primera de nuestra cuenta, porque el sistema se cerraba en una circunferencia.

Pongamos eso como condición de contorno para sacar α :

$$\begin{aligned} A_{N+1} \cos(\omega t + \phi) &= A_1 \cos(\omega t + \phi) \\ A \sin((N+1)\alpha) &= A \sin \alpha \\ \sin N\alpha \cos \alpha + \cos N\alpha \sin \alpha &= \sin \alpha \\ \sin N\alpha &= 0 \rightarrow N\alpha = 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z} \\ \alpha &= \frac{2p\pi}{N} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Con esto ya podemos conocer la relación entre las frecuencias ω_0 y ω (que como ahora vemos que dependerá de este parámetro p lo llamaremos ω_p) y sacar con ello una solución general definitiva.

Solución para N cuerpos

$$\omega_p^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{2p\pi}{N} \right) \quad (9.12)$$

$$\theta_p(t) = A \sin \left(\frac{2p\pi n}{N} \right) \cos(\omega_p t + \phi) \quad (9.13)$$

Cuando $p = 0$ tenemos la solución de que ya hablamos con todos los cuerpos en equilibrio. Todas las N soluciones que deberíamos encontrar, las encontraremos para valores de $p = 0, \dots, N - 1$.

9.2. Cuerda vibrante de partículas discretas

Consideremos un sistema consistente en una cuerda amásica sobre la que situamos n masas iguales y equidistantes.

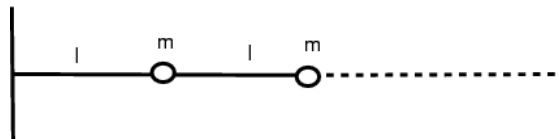


Figura 9.3.: Cuerda amásica con n partículas iguales equidistantes

Deformaremos la cuerda perpendicularmente tomando las siguientes referencias para medir la deformación:

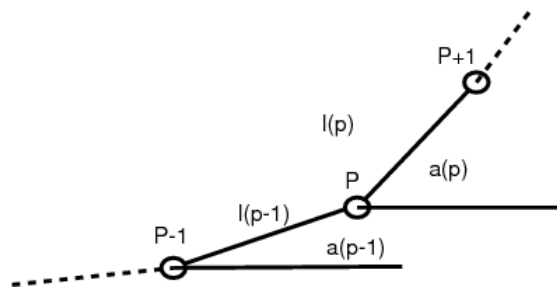


Figura 9.4.: Deformación de la cuerda vibrante

Basándonos en los parámetros indicados en la figura 9.4 tomaremos las siguientes coordenadas, donde l'_i será la longitud del tramo de cuerda una vez deformada, y α_i el ángulo que se deforma:

$$\begin{aligned} l'_p &= \frac{l_p}{\cos(\alpha_p)} \\ l'_{p-1} &= \frac{l_{p-1}}{\cos(\alpha_{p-1})} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Para ángulos pequeños, las aproximaciones trigonométricas que tomaremos serán:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\alpha_p) &\approx \alpha_p + \dots \\ \cos(\alpha_p) &\approx 1 - \frac{1}{2}\alpha_p^2 + \dots \\ \frac{1}{\cos(\alpha_p)} &\approx 1 + \frac{1}{2}\alpha_p^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.15)$$

Así, el incremento de la distancia entre dos partículas:

$$\Delta l = l' - l = l \frac{\alpha_p^2}{2} \quad (9.16)$$

Las fuerzas que actúan en el sistema dependerán de la tensión T a que esté sometida la cuerda:

$$\begin{aligned} \text{Longitudinal: } F_x &= T \cos(\alpha_p) - T \cos(\alpha_{p-1}) = \frac{1}{2}T(\alpha_p^2 - \alpha_{p-1}^2) \approx 0 \\ \text{Transversal: } F_y &= T \sin(\alpha_p) - T \sin(\alpha_{p-1}) \approx T \text{tg}(\alpha_p) - T \text{tg}(\alpha_{p-1}) = F_p \end{aligned} \quad (9.17)$$

Aplicando a F_p las aproximaciones trigonométricas de que hemos hablado:

$$F_p = \frac{T}{l}(y_{p+1} - y_p) - \frac{T}{l}(y_p - y_{p-1}) \quad (9.18)$$

Aplicando Newton sobre dichas fuerzas, obtendremos la ecuación de movimiento para una partícula genérica p :

$$m \frac{d^2 y_p}{dt^2} \ddot{y}_p + 2 \frac{T}{ml} y_p - \underbrace{\frac{T}{ml}}_{\equiv \omega_0^2} (y_{p+1} + y_{p-1}) = 0 \quad (9.19)$$

En esta última expresión podemos identificar el término $\frac{T}{ml}$ como una frecuencia característica ω_0^2 , con lo que nos queda la ecuación diferencial:

$$\ddot{y}_p + 2\omega_0^2 y_p - \omega_0^2 (y_{p+1} + y_{p-1}) = 0 \quad (9.20)$$

9.2.1. Caso de una sola partícula

Las condiciones de contorno a aplicar en este caso sobre 9.20 son:

$$y_{p-1} = y_{p+1} = 0 \quad (9.21)$$

Aplicándolas:

$$\ddot{y}_1 = -2\omega_0^2 y_1 \quad (9.22)$$

Encontramos un sólo modo normal de oscilación, correspondiente a $\omega = \sqrt{\frac{2T}{ml}} = \sqrt{2}\omega_0$.

9.2.2. Caso de dos partículas

Las condiciones de contorno a aplicar en este caso sobre 9.20 son:

$$y_0 = y_3 = 0 \quad (9.23)$$

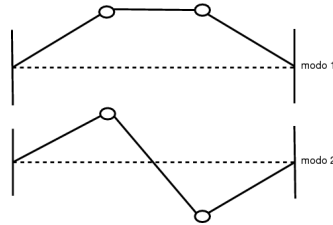


Figura 9.5.: Cuerda vibrante con 2 partículas

Aplicándolas, obtenemos 2 ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 - \omega_0^2 y_2 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + 2\omega_0^2 y_2 - \omega_0^2 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.24)$$

Encontramos en este caso dos modos normales de oscilación, correspondientes a

$$\omega_1 = \omega_0 ; \omega_2 = \sqrt{3}\omega_0 \quad (9.25)$$

9.2.3. La cuerda del grillón de partículas

Para atacar al caso de un número arbitrario de partículas, vamos a comenzar considerando que las soluciones que obtengamos tendrán la forma $y_p = A_p \cos(\omega t)$.

De este modo, introduciremos dichas soluciones genéricas en la ecuación de movimiento y veamos qué obtenemos:

$$\begin{array}{l} \dot{y}_p = -\omega A_p \sin(\omega t) \qquad \dot{y}_p = -\omega^2 A_p \cos(\omega t) \\ \hline \left. \begin{array}{l} (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_1 - \omega_0^2(A_2 + A_0) = 0 \\ \vdots \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_p - \omega_0^2(A_{p+1} + A_{p-1}) = 0 \\ \vdots \\ (-\omega^2 + 2\omega_0^2)A_N - \omega_0^2(A_{N+1} + A_{N-1}) = 0 \end{array} \right\} \frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \end{array} \quad (9.26)$$

Ahora hagamos otra hipótesis: $A_p = A \sin(p\alpha)$. Con ello, y metiendo las condiciones frontera $A_0 = A_{N+1} = 0$, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \frac{A_{p+1} + A_{p-1}}{A_p} &= 2\cos(\alpha) \\ \alpha &= \frac{p\pi}{N+1} \end{aligned} \quad (9.27)$$

9. Rumbo al continuo

Así, hemos llegado a las expresiones genéricas para la amplitud (por partícula) y las frecuencias de los modos normales:

Cuerda vibrante de N partículas

$$y_p = A_p \cos(\omega_p t + \phi) = A \sin\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) \cos(\omega_p t + \phi) \quad (9.28)$$

9.3. Generalización a sistemas de N cuerpos

Acabamos de ver dos ejemplos de sistemas que generalizamos hasta llegar al caso de N cuerpos con una clara intención de llegar en algún momento a acercarnos al continuo.

Comparemos ambos resultados en busca de alguna conclusión interesante:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_n + \frac{k}{m}(2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) = 0 &\Leftrightarrow \ddot{y}_n + \frac{T}{ml}(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} &\Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{T}{ml} \end{aligned} \quad (9.29)$$

Nos aparecen dos ecuaciones completamente simétricas salvo por los factores que hemos identificado como unas ciertas frecuencias ω_0 .

El desarrollo continúa aún más paralelo en la búsqueda de los modos normales:

$$\left. \begin{matrix} \theta_n \\ y_n \end{matrix} \right\} A_n \cos(\omega_p t + \phi) \rightarrow \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right) A_n + A_{n+1} + A_{n-1}}_{\text{recurrencia común}} = 0 \quad (9.30)$$

Hemos llegado a una relación de recurrencia común a ambos problemas y hasta ahora tan sólo hemos encontrado una pequeña diferencia cuantitativa en la expresión que toma la frecuencia característica ω_0 .

Ahora viene el paso trascendente a la hora de diferenciar sendos problemas, las condiciones de contorno:

Condiciones de contorno en el problema de N cuerpos

$$\left. \begin{matrix} \theta_{N+1} = \theta_1 \\ \omega_p^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{p\pi}{N} \\ p = 0, 1, \dots, N-1 \\ \theta_p = A \sin \frac{2np\pi}{N} \cos(\omega_p t + \phi) \end{matrix} \right| \begin{matrix} y_0 = 0, y_{N+1} = 0 \\ \omega_p^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{p\pi}{2(N+1)} \\ p = 1, 2, \dots, N \\ y_p = A \sin \frac{np\pi}{N+1} \cos(\omega_p t + \phi) \end{matrix} \quad (9.31)$$

Parte III.

Ondas

10. Sintetización

10.1. ¿Qué es una onda?

Es muy difícil dar una definición concisa e inequívoca de lo que es una onda. Quizá la primera imagen que se nos venga a la mente sea la de las olas del mar y quisiésemos imaginar la onda como un conjunto de partículas que viajan en grupo bajo determinadas condiciones. Si pensamos en una cuerda de guitarra nos damos cuenta de que las únicas traslaciones que se observan son oscilaciones y podríamos plantear la onda como una generalización del movimiento ondulatorio que acabamos de estudiar.

En un campo de trigo peinado por el viento podemos observar cómo unos seres invisibles parecen acariciar las espigas sometiéndolas a su paso. Las espigas permanecen describiendo oscilaciones pequeñas en torno a sus posiciones de equilibrio mientras esas ondas fantasmagóricas avanzan a lo largo y ancho del campo con una cierta frecuencia. ¿Son las ondas el resultado de la coreografía de los movimientos armónicos de cada una de las espigas o acaso unos entes misteriosos que verdaderamente se mueven por el trigo?

Cuando nos acercamos a la óptica, al electromagnetismo y a la física cuántica la línea entre el mundo físico material y el matemático fantasmal parece difuminarse aún más.

10.2. La cuerda vibrante y los padres de la mecánica

La discusión en torno a la cuerda vibrante [GW87] enfrentó a algunos de los más grandes físicos y matemáticos de todos los tiempos. Fue el camino hacia la descripción matemática de los fenómenos ondulatorios que serían llevados a todas las ramas de la física y que conducirían a importantes avances en las ecuaciones diferenciales y el análisis matemático.

10.2.1. D’Alambert, el matemático

D’Alambert parte de atacar a una ecuación diferencial aparentemente sencilla:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (10.1)$$

No se preocupa por las posibles interpretaciones o conclusiones físicas de su trabajo, simplemente llega a encontrar soluciones de la forma:

$$y(x, t) = f(x + t) + g(x - t) \quad (10.2)$$

Y aplicando las condiciones de contorno $y(0, t) = y(L, t)$ concreta estas soluciones como:

$$y(x, t) = f(x + t) + f(x - t) \quad (10.3)$$

Lo que hoy nos recuerda, desde el contexto de las ecuaciones diferenciales, al método de propagación de las ondas.

D'Alambert exige a sus funciones f que sean periódicas y diferenciables en todo \mathbb{R} .

10.2.2. Euler, el físico matemático

En esta historia, le tocaría a Euler dar un pasito hacia la realidad y acercar la matemática pura de D'Alambert a la cuerda real.

Plantea una ecuación diferencial más general:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (10.4)$$

Encuentra soluciones del tipo:

$$y(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (10.5)$$

Y aplicando las condiciones de contorno para la cuerda $y(0, t) = y(L, t)$:

$$y(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct) \quad (10.6)$$

Llamando $Y(x)$ a la posición de la cuerda en el instante inicial y $V(x)$ a la velocidad de la misma en ese mismo instante, logra dar soluciones de la forma:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left(Y(x + ct) + Y(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} V(s) ds \right) \quad (10.7)$$

Además, Euler dice que absolutamente cualquier curva definida a mano alzada en el intervalo $0 \leq x \leq L$ y periódica en \mathbb{R} serviría tanto para Y como para V . Esta libertad en la elección de la función molestó a D'Alambert, que trató en varias ocasiones de plantear funciones que negasen la argumentación de Euler.

10.2.3. Bernoulli escucha a la cuerda

Bernoulli pide a sus lectores que escuchen a la cuerda y ataca al problema al más pulo estilo pitagórico, proponiendo como solución general una suma de los infinitos armónicos.

Partiendo de la observación (posiblemente basada en trabajos de Brook Taylor) de un primer armónico que toma la forma:

$$y(x) = A \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (10.8)$$

propone una solución general como suma de los armónicos sucesivos:

$$y(x, t) = \sum_i A_i \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{i\pi ct}{L} \quad (10.9)$$

Recordemos que en aquel momento aún no se había enunciado el principio de superposición y a Bernouilli le costó sudor y mucha tinta justificar esta suma.

Apoyó sus argumentos con observaciones experimentales de sistemas de varias partículas pero no pudo llegar a una argumentación matemática. Además no supo encontrar un modo de dar valor a los coeficientes A_i .

10.2.4. Luigi de la Grange Tournier

Lagrange para los amigos, hace el paso al continuo sucesivamente desde el sistema de partículas discretas, del mismo modo que nosotros nos acercamos al problema en este curso.

Lagrange llega a plantear un sistema de ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2 (y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) \quad (10.10)$$

Y encuentra como solución general:

$$Y(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^L Y(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \quad (10.11)$$

El resultado de Lagrange es compatible con las suposiciones de Bernouilli y con los resultados de Euler y D'Alambert. Lagrange tenía en sus manos una **serie par de Fourier** y no supo ver lo que había detrás, quizá por falta de desarrollo matemático o sencillamente porque le preocupaban otras cosas.

serie par de Fourier

Fourier no encontraría las series que llevan su nombre hasta 50 años después, pero faltó verdaderamente poco para que esas series las conociésemos hoy como series de Lagrange.

10.3. El paso al continuo

El camino tomado por Lagrange para llegar a la ecuación de ondas fue por inducción desde el caso discreto de N partículas.

La idea es hacer tender el número de partículas a infinito al mismo tiempo que disminuimos la distancia entre ellas hacia cero manteniendo la longitud total de la cuerda constante. Análogamente, la masa de las partículas disminuye para que la masa total de la cuerda se mantenga constante.

$$\left. \begin{array}{l} N \Rightarrow \infty \\ l \Rightarrow 0 \\ m \Rightarrow 0 \\ L \equiv (N + 1)l = Cte \\ M \equiv mN = Cte \end{array} \right\} \frac{M}{L} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N + 1} \frac{m}{l} = \mu \quad (10.12)$$

Donde la constante μ que hemos obtenido es la densidad constante de la cuerda.

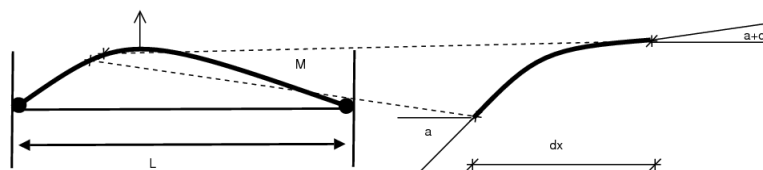


Figura 10.1.: Cuerda continua

Llevando 10.12 a 9.28:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \sin\left(\frac{np\pi l}{(N+1)l}\right) \cos(\omega_p t + \phi) \\ &= A \sin\left(\frac{xp\pi}{l}\right) \cos(\omega_p t + \phi) \end{aligned} \quad (10.13)$$

Y aplicando las mismas consideraciones sobre la expresión de los modos normales:

$$\begin{aligned} \omega_p^2 &= 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{p\pi l}{2(N+1)l}\right) \\ &\rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \\ \omega_p^2 &= 4 \frac{T}{ml} \frac{p^2 \pi^2 l}{4L^2} = \frac{T}{\mu} \frac{p^2 \pi^2}{L^2} \end{aligned} \quad (10.14)$$

En resumidas cuentas, obtenemos una frecuencia básica fundamental y una serie de múltiplos enteros de ella. Son los **armónicos** que ya supieron ver los pitagóricos y que Bernoulli propuso.

armónicos

Frecuencias normales armónicas de una cuerda

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \\ \omega_p &= p\omega_1 \end{aligned} \quad (10.15)$$

Aunque ya hemos pasado de los casos discretos a considerar la cuerda continua es curioso que sigamos teniendo una serie discreta (aunque infinita) de soluciones.

10.4. Planteamiento continuo

De forma paralela, D'Alambert y Euler comenzaron directamente con un planteamiento continuo para atacar el mismo problema de las vibraciones en una cuerda continua:

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dx \quad (10.16)$$

Aplicando Newton:

$$\begin{aligned}
 dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \\
 \rho \pi r^2 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \\
 y_{xx} &= \frac{\rho \pi r^2}{T} y_{tt}
 \end{aligned} \tag{10.17}$$

Donde $\frac{\rho \pi r^2}{T}$ tiene dimensiones de $(\frac{L}{T})^{-2}$, es decir, de inversa de velocidad.

Ecuación de ondas

$$y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt} \tag{10.18}$$

10.5. Soluciones

Lagrange llega por paso al continuo a proponer como soluciones para el problema de las vibraciones en la cuerda continua:

$$\ddot{y} + \omega^2 (2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}) = 0 \rightarrow y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \phi) \tag{10.19}$$

Y las propone como soluciones para la ecuación diferencial obtenida por Euler y D'Alambert 10.18. ¿Ecuaciones diferenciales diferentes podían tener las mismas soluciones?

$$\left. \begin{aligned}
 y_{tt} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \\
 y_{xx} &= A'' \cos(\omega t + \phi)
 \end{aligned} \right\} A'' \cos(\omega t + \phi) = -\frac{\omega^2}{c^2} A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A'' + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \tag{10.20}$$

El factor $(\frac{\omega}{c})^2$ tiene unidades de longitud inversa L^{-1} lo que parece indicar que podría tener algo que ver con la extraña forma de pensar de los físicos de materiales en términos de la red recíproca.

En realidad, cualquier función que cumpliera una sencilla relación armónica entre el espacio y el tiempo podría ser solución de la ecuación de ondas:

Sencilla armonía entre el espacio y el tiempo

$$y(x, t) = f(x \pm ct) \tag{10.21}$$

10.5.1. Periodicidad en el tiempo: Frecuencia

Acabamos de ver que la única imposición necesaria para que una función cumpla la ecuación de ondas es una sencilla armonía dada como una cierta periodicidad. Esta periodicidad en el tiempo vendrá descrita por un tiempo característico T que llamaremos período. Dado el estado del sistema a un tiempo t , pasado ese intervalo de tiempo característico $t' = t + T$ el sistema habrá vuelto a su estado original. Es decir:

$$f(t) = f(t + T) \quad (10.22)$$

Atendiendo a Bernoulli y a lo que sabemos por Fourier, podemos representar una función cualquiera como una suma infinita de funciones armónicas:

$$f(t) = \sum_n f_n \cos(\omega_n t) \quad (10.23)$$

Pasado ese tiempo característico:

$$f(t + T) = f(t) = \sum_n f_n \cos(\omega_n (t + T)) = \sum_n f_n \cos(\omega_n t) \quad (10.24)$$

Con lo que es inmediato deducir que:

$$\omega_n t = \omega_n (t + T) + 2n\pi \quad (10.25)$$

Por último, con lo que ya sabían los pitagóricos $\omega_n = n\omega_0$

E inmediatamente:

Armonía en el tiempo: Frecuencia

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (10.26)$$

10.5.2. Periodicidad en el espacio: La red recíproca

Imaginemos ahora una estructura que se repite una y otra vez en el espacio como una estructura cristalina con un cierto parámetro de red R . La periodicidad espacial podemos expresarla análogamente al caso temporal como:

$$f(r) = f(r + R) \quad (10.27)$$

Continuando con un desarrollo paralelo al anterior pero sustituyendo por un cierto parámetro g_n a la frecuencia:

$$f(r) = \sum_n f_n \cos(g_n r) \quad (10.28)$$

La estructura se repetirá a cada intervalo R :

$$f(r + R) = f(r) = \sum_n f_n \cos(g_n(r + R)) = \sum_n f_n \cos(g_n r) \quad (10.29)$$

Con lo que es inmediato deducir que:

$$g_n r = g_n(r + R) + 2n\pi \quad (10.30)$$

Considerando g_n como un vector cualquiera de la red recíproca, podemos reducirlo de forma general a un múltiplo entero del menor vector posible de la red recíproca en esa dirección de modo que $g_n = ng$ con lo que:

Armonía en el espacio: Red Recíproca

$$g = \frac{2\pi}{R} \quad (10.31)$$

La red recíproca es una construcción matemática que permite a los físicos de materiales sacar gran cantidad de información sobre las simetrías subyacentes a la red cristalina que repercutirán en las propiedades del material.

11. Construcción del universo

Como hemos visto, para definir una onda podemos usar, como decía Euler, cualquier función dibujada a mano en un cierto intervalo y hacerla periódica. A través de Fourier, hoy sabemos que esa función cualquiera podemos expresarla en términos de series de senos o cosenos a la Bernoulli.

Sabiendo eso, vamos a estudiar ondas sinusoidales de la forma

$$y(x, t) = \sin(kx - \omega t) \quad (11.1)$$

En un intervalo pequeño Δt la onda que avanza a una velocidad c se moverá un intervalo Δx según:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = c \quad (11.2)$$

11.1. Principio de superposición

El *principio de superposición* dice que si en un medio se propagan al mismo tiempo n ondas diferentes, la suma de todas ellas será la onda resultante. En otras palabras, *cada onda se propaga por el medio independientemente de las demás*, como si no existieran. La velocidad, el desplazamiento y la aceleración resultante para cada partícula del medio son equivalentes a la suma vectorial de la contribución de cada onda por separado.

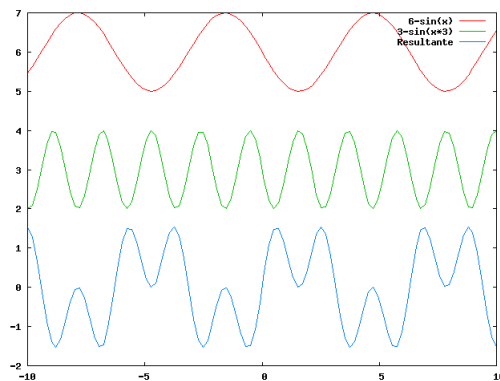


Figura 11.1.: Principio de superposición

No olvidemos que este principio es válido en medios lineales, subordinados a la ley de Hooke y en el límite donde las velocidades de propagación dependen sólo del medio y no de la intensidad de la onda.

11.2. Medios dispersivos

Pongamos dos ondas unidimensionales exactamente iguales en amplitud y frecuencia (igual velocidad de fase $v = v_f = \frac{\omega}{k}$) que se propagan en sentidos opuestos:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) + y_2(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = \\ &= A \sin(kx) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (11.3)$$

El resultado se desacopla en una onda estacionaria.

Si, sin embargo, tomamos dos ondas con frecuencias y números de onda diferentes:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) + y_2(x, t) &= A \sin(k_1 x - \omega_1 t) + A \sin(k_2 x + \omega_2 t) = \\ &= A \sin(\bar{k} x - \bar{\omega} t) \cos(dk x - d\omega t) \end{aligned} \quad (11.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{k_1 + k_2}{2} & dk &= \frac{k_1 - k_2}{2} \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} & d\omega &= \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \end{aligned}$$

El resultado es una onda que se propaga con una cierta velocidad de grupo $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

La relación entre la frecuencia y el número de onda viene dada por la **relación de dispersión**, que es característica del medio.

Esta relación será la que determine asimismo la velocidad de grupo en función de la velocidad de fase:

Relación de dispersión

$$\left. \begin{aligned} v_f &= \frac{\omega}{k} \\ v_g &= \frac{d\omega}{dk} \end{aligned} \right\} \omega = \omega(k) \quad (11.5)$$

11.2.1. Efectos dispersivos

Sobre las fuerzas generalizadas que intervienen en el sistema queremos añadir efectos disipativos. Consideraremos estos efectos producidos por los momentos que doblan la cuerda τ_r , proporcionales a la curvatura:

$$\tau_r = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (11.6)$$

Al introducir este nuevo término en la ecuación de movimiento, nos queda un término de cuarto orden:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right] \quad (11.7)$$

La relación de dispersión: $\omega = \pm ck \sqrt{1 + \alpha k^2}$

- Cuando $\alpha = 0$ se va el término dispersivo, la cuerda es perfectamente flexible: $\omega = \pm ck \rightarrow v = \pm c$.

Y la velocidad de fase $|v_\psi| = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \alpha k^2}$

- Si consideramos que αk^2 es suficientemente pequeño, podemos hacer la aproximación $\omega = \pm ck\sqrt{1 + \alpha k^2} \approx ck(1 + \frac{1}{2}\alpha k^2)$, donde, llamando $d = \frac{-c\alpha}{2}$ tenemos $\omega = ck - dk^3$, que nos conduce a la **ecuación de onda de primer orden con efectos dispersivos** (válida para efectos dispersivos pequeños):

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} + d \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad (11.8)$$

ecuación de onda de primer orden con efectos dispersivos

Y añadiendo efectos no lineales, obtenemos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c_0 \frac{\partial y}{\partial x} + by \frac{\partial y}{\partial x} + d \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad (11.9)$$

11.2.2. Ondas de gravedad (ejemplo de ondas dispersivas)

Las ondas de gravedad son, por ejemplo, las olas producidas en la superficie de un lago. Serán ondas sobre la superficie de un líquido de densidad ρ y profundidad H con una tensión superficial σ .

La relación de dispersión toma la forma:

$$\omega = \sqrt{k \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho} \right) \tanh(kH)} \quad (11.10)$$

Y la velocidad de fase:

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho} \right) \tanh(kH)} \quad (11.11)$$

Haremos dos aproximaciones en función de la profundidad que tenga el medio:

Régimen	Aproximación	Desprec. vis.
A. profundas	$H \gg \lambda \rightarrow kH \gg 1 \rightarrow \tanh(kH) \approx 1$	$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$
A. someras	$H \ll \lambda \rightarrow kH \ll 1 \rightarrow \tanh(kH) \approx kH$	$c = \sqrt{gH}$

Para determinar cuándo es aceptable despreciar los efectos de viscosidad frente a los gravitatorios, compararemos:

$$\frac{g\lambda}{2\pi} \text{ frente a } \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} \quad (11.13)$$

Con lo que nos quedaremos sólo con los efectos gravitatorios cuando:

$$\lambda \gg 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (11.14)$$

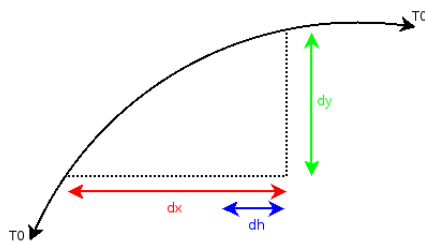


Figura 11.2.: Deformación de la cuerda

11.3. Energía mecánica asociada a una onda

Pongamos una cuerda de densidad lineal $\mu = \frac{dm}{dx}$ sometida a una tensión T_0 .
Un vector de la cuerda:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx + dh) \vec{i} + dy \vec{j} = \\ &= \left(1 + \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x} dx \vec{j} \\ &\rightarrow dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx \\ &\rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (11.15)$$

11.3.1. Energía cinética

Podemos escribir una expresión del elemento diferencial de energía cinética:

$$dT = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (11.16)$$

Reordenando un poco, podemos obtener una expresión para la densidad de energía cinética a lo largo del elemento de longitud:

Densidad de energía cinética

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (11.17)$$

11.3.2. Energía potencial

Podemos expresar la energía potencial en función de las tensiones de la cuerda y de los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio:

$$dU = -T_0 dx + T_0 dr = T_0 \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx - dx \right] \quad (11.18)$$

Podemos considerar $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$, con lo que

$$dU = T_0 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx - dx \right) \quad (11.19)$$

Ahora, considerando que $\frac{\partial y}{\partial x}$ es pequeño, lo desarrollamos en serie de Taylor:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + (\dots) \quad (11.20)$$

Tras estas aproximaciones obtenemos una expresión sencilla para la energía potencial:

Densidad de energía potencial

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (11.21)$$

11.3.3. Densidad de energía

Sumando ambas densidades de energía (cinética y potencial) podemos obtener una expresión para la densidad de energía total:

Densidad de energía

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \left(T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (11.22)$$

Asimismo podemos obtener una forma sencilla para la potencia como variación de la energía con el tiempo:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_f} = \frac{v}{2} \left(T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (11.23)$$

11.3.4. Transporte de energía

Vamos a provocar una onda transversal en una cuerda uniforme sometida a una tensión T_0 . Para ello, aplicaremos sobre el punto $x = 0$ la función $Y_0 = A \sin(2\pi\omega t)$.

La fuerza transversal que hemos introducido:

$$F_y = -T_0 \sin(\vartheta) \approx -T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (11.24)$$

11. Construcción del universo

Sobre la cuerda, que responderá como $y(x, t) = A \sin(2\pi\omega(\frac{x}{v} - t))$, obtendremos:

$$F_y = \frac{2\pi\omega AT_0}{v} \cos(2\pi\omega t) \quad (11.25)$$

Si observamos durante un tiempo t , esta fuerza habrá realizado un trabajo:

$$\begin{aligned} W &= \int F_y dy = \frac{2\pi\omega AT_0}{v} \int_0^t \cos(2\pi\omega t) d(A \sin(2\pi\omega t)) \\ &= \frac{(2\pi\omega A)^2 T_0}{v} \int_0^t \cos^2(2\pi\omega t) dt \end{aligned} \quad (11.26)$$

Si concretamos dicho tiempo en un período completo (un ciclo), es decir, integramos entre 0 y la inversa de la frecuencia $\frac{1}{\omega}$, la expresión que obtenemos coincide con la energía total asociada a una longitud de onda o a un período completo:

Energía asociada a una longitud de onda

$$W_{\text{período}} = \frac{u_0^2 T}{2\omega} \equiv E_T = \frac{1}{2} \mu \lambda \omega^2 y_0^2 \quad (11.27)$$

11.4. Transmisión y reflexión de una onda

Consideremos una frontera entre dos medios. Concretamente, imaginemos una cuerda con una tensión constante T_0 que en el punto $x = 0$ cambia de características, pasando de tener una densidad lineal μ_1 a otra μ_2 . Así, la velocidad de propagación de una onda sobre esta cuerda en sus dos mitades será diferente:

$$v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}} \quad (11.28)$$

Comenzemos provocando una onda progresiva que avance desde el lado negativo del eje x (desde la zona de la cuerda μ_1) que será de la forma $f_1(x - v_1 t)$. Al llegar a la intersección se producirán dos ondas más, una reflejada $g_1(x + v_1 t)$ y otra transmitida hacia el lado positivo del eje x de la forma $f_2(x - v_2 t)$.

La onda reflejada g_1 interferirá en virtud al principio de superposición con la onda incidente f_1 originando soluciones en el lado negativo del eje x $y_1 = f_1(x - v_1 t) + g_1(x + v_1 t)$. Al otro lado de la discontinuidad sólo encontraremos la onnda transmitida $y_2 = f_2(x - v_2 t)$.

Con estas dos soluciones y_1 e y_2 haciendo que sobre el punto $x = 0$ tanto sus pendientes como sus elongaciones sean iguales, tenemos el siguiente problema de condiciones frontera:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(x - v_1 t) + g_1(x + v_1 t) \\ y_2 &= f_2(x - v_2 t) \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones solución} \quad (11.29)$$

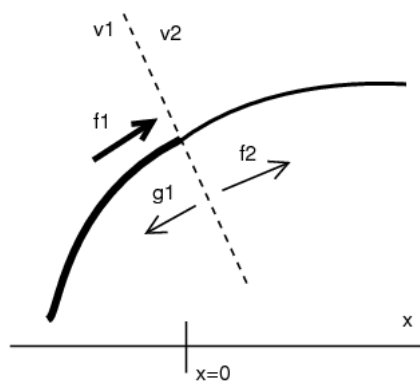


Figura 11.3.: Frontera entre dos medios

$$\left. \begin{aligned} y_1(0, t) &= y_2(0, t) \\ \frac{\partial y_1(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial y_2(0, t)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{Condiciones frontera} \quad (11.30)$$

Fácilmente obtenemos las soluciones para f_2 y g_1 en función de las velocidades en cada medio como parámetros iniciales de la cuerda y de la onda incidente f_1 :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1 = Cte \cdot f_1 \\ f_2 &= \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1 = Cte' \cdot f_1 \end{aligned} \quad (11.31)$$

11.4.1. Reflexión

La onda reflejada disminuye su amplitud en un factor $\frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}$, como se infiere del resultado anterior:

$$g_1(x + v_1 t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f_1(x - v_1 t)$$

- Si $v_2 < v_1$ el factor es negativo, por lo que la onda cambia de signo, es decir, que existe un cambio de fase, que se invierte la polaridad.
- Si $v_2 = 0$ lo que significa que pasamos a un "medio de densidad de masa infinita" (un punto fijo), el coeficiente se hace -1 , es decir que se produce una reflexión total con un cambio de fase: $g_1 = -f_1$
- Si $v_2 \rightarrow \infty$ significa que el segundo medio es amásico, es decir que tenemos un extremo de la cuerda libre, la reflexión es también total pero se produce sin cambio de fase: $g_1 = f_1$

11.4.2. Transmisión

En cuanto a la transmisión, el coeficiente que determina el cambio de amplitud de la onda $f_2 = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f_1$ no puede hacerse negativo, por lo que no se producirán cambios de polarización.

La amplitud aumentará si $v_2 > v_1$ y disminuirá si $v_2 < v_1$.

11.4.3. Parámetros característicos de la cuerda: Impedancia Característica

En todo este estudio hemos utilizado la velocidad de propagación de una onda como parámetro característico del medio. En realidad, implícitamente lo que hemos estado utilizando ha sido la densidad lineal de masa de la misma, teniendo en cuenta que $v_i = \sqrt{\frac{T}{\mu_i}}$, por lo que podríamos haber expresado los factores anteriores para la reflexión y la transmisión en función de μ_1 y μ_2 como:

$$\frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \quad (11.32)$$

Y

$$\frac{2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \quad (11.33)$$

Por analogía con las ondas electromagnéticas, podríamos definir impedancias características para cada medio como cociente entre la tensión y la velocidad:

$$Z_i = \frac{T}{v_i} = \sqrt{T\mu_i} \quad (11.34)$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} f_1 \\ f_2 &= \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} f_1 \end{aligned} \quad (11.35)$$

Parte IV.

Fluidos

12. Sintetización

Si atendemos a lo que dice la *Real Academia Española* de un fluido, la descripción no puede ser menos aclaratoria:

Se dice de las sustancias en estado líquido o gaseoso.

Mientras que de la palabra líquido podemos leer:

Dicho de un cuerpo de volumen constante: Cuyas moléculas tienen tan poca cohesión que se adaptan a la forma de la cavidad que las contiene, y tienden siempre a ponerse a nivel.

Y en cuanto a los gases:

Fluido que tiende a expandirse indefinidamente y que se caracteriza por su pequeña densidad, como el aire.

En contraposición, la definición de sólido reza:

Dicho de un cuerpo: Que, debido a la gran cohesión de sus moléculas, mantiene forma y volumen constantes.

Si tratamos de unir estas definiciones, para hacer un ejercicio de sintetización y distinción, el paso de los sólidos a los fluidos debemos enfocarlo desde la cohesión entre las moléculas que lo forman.

En los sólidos se dan fuertes cohesiones entre las moléculas que los hacen mantener constantes su volumen y su forma.

Estas fuerzas son menos importantes en los líquidos, lo que les permite variar de forma pero manteniendo constante su volumen mientras que en los gases se hacen prácticamente inexistentes permitiéndoles variar su forma y su volumen.

12.1. Elasticidad y plasticidad

Para mantener nuestras históricas disputas con los hombres de letras nos lanzamos a buscarle las cosquillas a la *RAE* y sugerimos que un sólido muy sólido, una barra de hierro por ejemplo, puede variar de forma, y de echo lo hace constantemente, ante la acción de una determinada fuerza. Da igual lo sólido que sea un cuerpo, siempre podremos aplicarle una fuerza suficientemente grande para provocarle una cierta deformación.

En este caso deberíamos puntualizar qué es lo que sucede al dejar de aplicar dicha fuerza. Para deformaciones suficientemente pequeñas, el sólido volverá a su forma original

cuando la fuerza cese. Sin embargo, la experiencia nos dice que determinados cuerpos no regresan exactamente a su forma original sino que pueden quedarse deformados.

Desde una perspectiva más física, podemos decir que un cuerpo se mantiene dentro del régimen elástico mientras la relación tensión-deformación se comporta linealmente según una ley de Hooke.

Sin embargo existe un límite en la tensión aplicada en el que se rompe esa linealidad entrando en el régimen plástico y produciéndose deformaciones permanentes en el material.

Desde dentro, las deformaciones elásticas son pequeñas deformaciones de la red cristalina, los enlaces entre las moléculas que forman el material no se rompen ni cambian su configuración. Sin embargo al llegar el régimen plástico sí que se rompen esos enlaces y se producen defectos en la red cristalina principalmente en forma de dislocaciones.

En las sustancias fluidas, las fuerzas intermoleculares son tan débiles que no son capaces de ordenarse formando redes cristalinas, cuantitativamente podríamos decir que nos encontramos ante un fluido cuando el límite elástico tiende a cero, es decir, cuando se comporta plásticamente ante cualquier fuerza.

12.2. Fluidos ideales

Hablaremos de **fluidos ideales** cuando se cumplan las siguientes propiedades:

- Un fluido ideal no responde a fuerzas tangenciales, aunque sí a fuerzas normales.
- Consideraremos los fluidos como medios continuos constituidos por partículas infinitesimales. De ese modo, la densidad $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ podemos definirla de forma diferencial $\rho = \frac{dm}{dV}$. Y finalmente, podemos definirla como función de punto $\rho(\vec{r})$.

La primera propiedad que acabamos de dar a los fluidos ideales, tendremos que corregirla pronto en términos de la *viscosidad* (ver 12.3).

En cuanto a la segunda, la densidad como función de punto podremos utilizarla con un cierto criterio que vendrá dado por un volumen crítico, dependiente del tamaño real de las partículas mínimas que constituyen el líquido, ya que si nos acercamos a dicho orden de magnitud en una región del espacio la densidad medida podría variar sensiblemente de forma aleatoria. Como ejemplo, el volumen crítico para el aire es del orden de $10^{-9}mm^3$ donde encontramos aproximadamente $3 \cdot 10^7$ moléculas. Por encima de dicha frontera podemos tomar la densidad como función de punto, definirla de forma diferencial y considerar al fluido como un continuo sin problemas.

12.3. Resistencia al flujo: Viscosidad

Con lo que acabamos de ver, podríamos enunciar que una sustancia es un fluido cuando se deforma constantemente ante cualquier fuerza.

Sin embargo, que se deforme constantemente no significa que lo haga de forma gratuita. Newton en sus principios enuncia:

La resistencia al flujo es proporcional a la velocidad con que se separan unas partes del fluido de otras.

Dicha fuerza la encontraremos como una fuerza tangencial que denominaremos **tensión viscosa** $\vec{\tau}$.

tensión viscosa

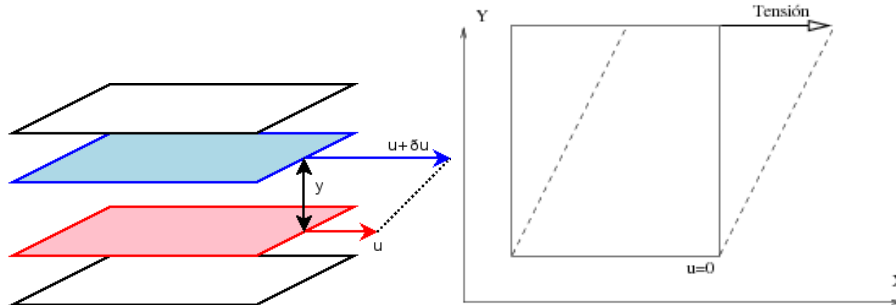


Figura 12.1.: Viscosidad

En aproximación newtoniana, la **tensión viscosa** vendrá determinada por la variación de la velocidad a lo largo de la dirección perpendicular a la misma multiplicada por un coeficiente de viscosidad μ dependiente de las propiedades físicas del fluido problema y de la temperatura:

tensión viscosa

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (12.1)$$

El **coeficiente de viscosidad** vendrá en unidades de: $[\mu] = \frac{FT}{L^2} = \frac{M}{LT} \rightarrow \frac{Kg}{m \cdot s}$

coeficiente de viscosidad

Podemos definir también una **viscosidad cinemática** como $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ que vendrá dada en $[\nu] = \frac{L^2}{T} \rightarrow \frac{m^2}{s}$.

viscosidad cinemática

Cuando existen tensiones viscosas, se produce un fenómeno de homogeneización de las velocidades de las diferentes capas del líquido con el tiempo. Físicamente, este fenómeno lo interpretamos como un flujo de momento lineal perpendicular a las tensiones viscosas: $\tau = \mu \nabla u$

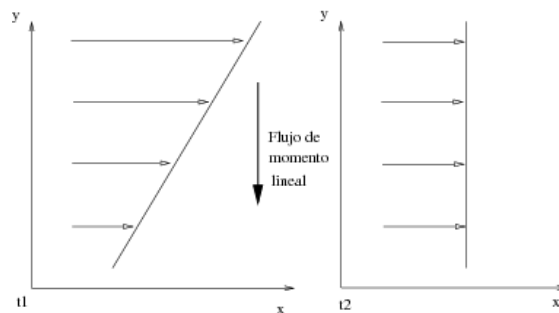


Figura 12.2.: Flujo del momento lineal

El **fluido Newtoniano** será, pues, un fluido que presenta tensión viscosa según la hemos definido en 12.1

fluido Newtoniano

12.4. Viscosímetro de Stokes

Se dice del viscosímetro de Stokes que es el átomo de hidrógeno de la mecánica de fluidos[VG07].

Consiste en un cuerpo cayendo a velocidad constante en el seno de un fluido.

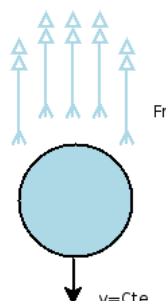


Figura 12.3.: Viscosímetro de Stokes

La fuerza de rozamiento que el objeto siente en el viscosímetro de Stokes viene dada por la fórmula de la viscosidad de Stokes:

$$F_r = 6\pi r \mu v \left(1 + \frac{3}{16} R \right) \quad (12.2)$$

donde R es el llamado número de Reynolds $R = \frac{L\rho v}{\mu}$ que está asociado a las proporciones entre las fuerzas inerciales y viscosas.

Si $\frac{3}{16}R \ll 1$ podemos aproximar $\mu = \frac{2(\rho_s - \rho_l)gr^2}{9V_l}$.

El número de Reynolds para el viscosímetro de gotas es del orden de 10^{-5} mientras que para una bola es del orden de 10^{-2} .

12.5. Tensión superficial

Las partículas que integran un fluido interactúan entre sí con unas fuerzas de atracción que son las que hacen que exista una unidad llamada cuerpo fluido. Son las fuerzas de cohesión.

Estas fuerzas se harán notar en las fronteras entre medios, es decir, en los límites del cuerpo fluido.

Si delimitamos físicamente (no mediante un contorno matemático como los usados en el teorema de Gauss, por ejemplo, sino con un cuerpo real) una región de superficie libre y medimos la fuerza generada por tensión superficial en las fronteras de dicha región por unidad de longitud, obtenemos el coeficiente de tensión superficial.

En general, el coeficiente de tensión superficial lo vamos a poder obtener en función de la geometría que adquiere la frontera entre los medios y la diferencia de presiones a ambos lados de la frontera:

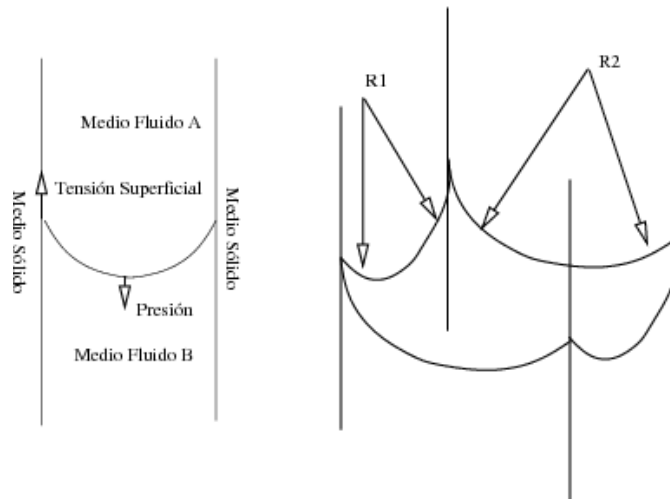


Figura 12.4.: Frontera entre medios fluidos

En general, la diferencia de presiones entre los dos medios fluidos vendrá dada por el producto del coeficiente de tensión superficial con la suma de la inversa de los radios de curvatura de la superficie frontera (para una superficie alabeada como caso más general):

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (12.3)$$

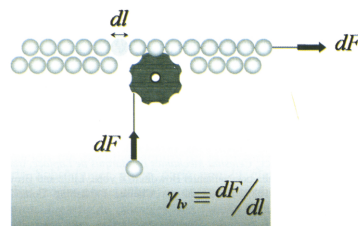


Figura 12.5.: interpretación mecánica de la tensión superficial[MM87]

12.5.1. Capilaridad: Ley de Jurin

En la frontera entre medios hay dos tipos de fuerzas: Fuerzas de cohesión y fuerzas de adhesión. El balance entre dichas fuerzas determinará qué medio fluido se “pega” a las paredes del recipiente (se suele decir que “moja”).

Cuando el recipiente es suficientemente estrecho (las paredes están suficientemente juntas) es cuando este fenómeno se hace notar en forma de capilaridad. No sólo se modifica el perfil de la superficie de contacto sino que el menisco se “eleva” o “desciende”. Para ser un poco más específicos, digamos que el fluido que “moja” gana terreno en el seno del otro fluido dentro de las fronteras donde se produce la capilaridad.

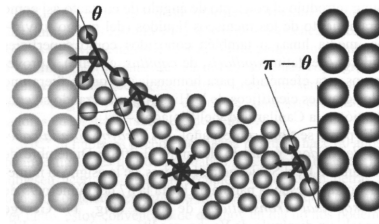


Figura 12.6.: Interpretación molecular de la tensión superficial [MM87]

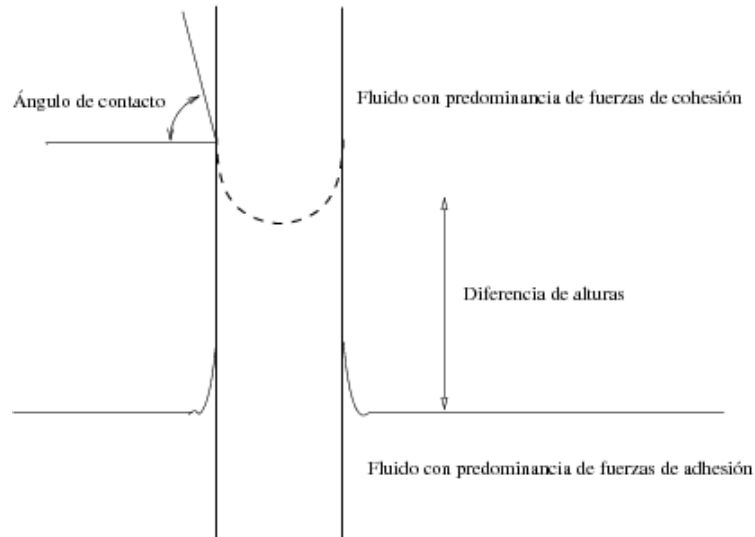


Figura 12.7.: Capilaridad

Haciendo un balance de fuerzas y teniendo en cuenta que el ángulo de contacto θ sólo depende de las fuerzas de cohesión y adhesión, podemos llegar a formular una ley que nos dé la diferencia de alturas:

$$\begin{cases} F_A = \tau \sin(\theta) \int_L dl \\ F_C = h \rho g \int_S dS \end{cases} \quad (12.4)$$

Donde L y S son respectivamente la línea de contacto entre los tres medios y la superficie de contacto entre los dos medios fluidos.

Restringiendo a un cilindro capilar, de modo que la línea sea una circunferencia y la superficie un círculo, obtenemos la LEY DE JURIN:

Ley de Jurin

$$\left. \begin{aligned} F_A &= \tau \sin \theta 2\pi R \\ F_C &= h \rho g \pi R^2 \end{aligned} \right\} h = \frac{2\tau \sin(\theta)}{\rho g R} \quad (12.5)$$

13. Fenomenología

13.1. Estática de fluidos

13.1.1. Tipos de fuerzas

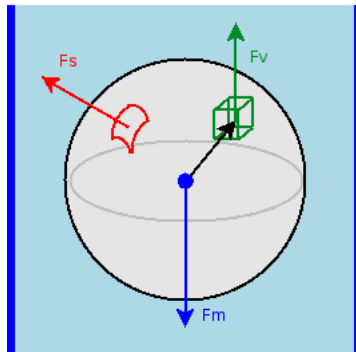


Figura 13.1.: Tipos de fuerzas

En la estática de fluidos distinguiremos entre tres tipos de fuerzas diferentes:

Fuerzas volumétricas Están asociadas a un volumen (empuje).

$$\vec{F}_V = \int_V \vec{f}_V(\vec{r}, t) dV \quad (13.1)$$

donde el término \vec{f}_V es una suerte de densidad de fuerza ($\frac{N}{m^3}$)

Fuerzas másicas Asociadas a una cierta masa (gravedad).

$$\vec{F}_m = \int_V \vec{f}_m(\vec{r}, t) dm = \int_V \vec{f}_m(\vec{r}, t) \rho dV \quad (13.2)$$

donde el término \vec{f}_m está asociado a aceleraciones que generalmente suelen ser de tipo gravitacional o inercial:

$$\vec{f}_m \rightarrow \begin{cases} \vec{g} \\ \vec{a}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} \end{cases} \quad (13.3)$$

Fuerzas superficiales Asociadas a una superficie (presión, tensión superficial).

$$\vec{F}_s = \oint_s \vec{f}_s(\vec{r}, t, \hat{n}) d\vec{s} \quad (13.4)$$

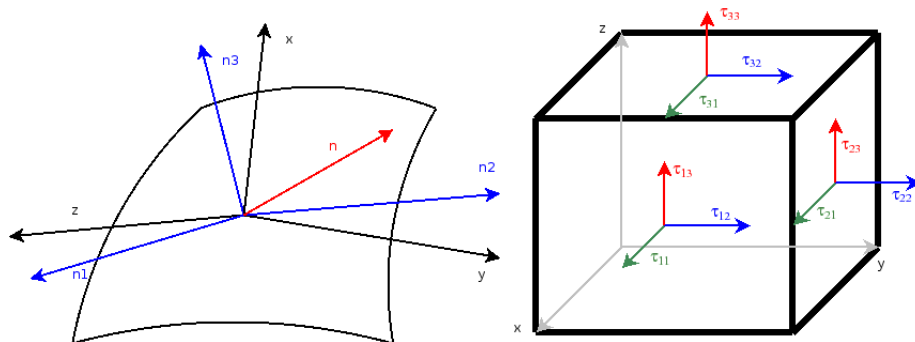
donde $d\vec{s} = \hat{n} ds$

13.1.2. Tensiones en el fluido

El tensor de esfuerzos

Si imaginamos una región en el seno del fluido en forma de paralelepípedo de lado diferencial, podemos pensar en las fuerzas que aparecen en cada una de las superficies del paralelepípedo y en cada una de las direcciones principales n_1, n_2, n_3 las fuerzas de superficie pueden descomponerse según:

$$\vec{f}_s = \begin{cases} f_1 = \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ f_2 = \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ f_3 = \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{cases} \quad (13.5)$$



Resulta bastante inmediato ver la estructura tensorial de esta expresión, con lo que definimos el concepto de tensor de esfuerzos o tensor de tensiones.

Tensor de esfuerzos

$$\vec{f}_s = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \hat{\tau}_0 \hat{n} \quad (13.6)$$

Los términos de la diagonal τ_{ii} son los términos asociados a deformaciones longitudinales (variación de volumen) mientras que los términos no diagonales $\tau_{ij}, i \neq j$ son los términos transversales que pueden estar asociados a rotaciones o cizallas.

Veamos cómo serán los momentos asociados:

$$M^e = (\tau_{32}dx dz) dy - (\tau_{23}dx dy) dz + (\tau_{21}dz dy) dx - (\tau_{12}dz dx) dy + (\tau_{13}dy dx) dz - (\tau_{31}dy dz) dx \quad (13.7)$$

La condición de equilibrio pasa por que la suma de todos los momentos se anule, lo que implica, dada la simetría de estos términos:

$$\tau_{ij} \equiv \tau_{ji} \quad (13.8)$$

Es decir, que la condición de equilibrio implica un tensor de esfuerzos simétrico.

Que el tensor de esfuerzos sea simétrico implica que es diagonalizable y que en cualquier sistema estático podremos fijar un sistema de coordenadas en el que el tensor de esfuerzos sea diagonal y tenga únicamente tres términos.

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} \quad (13.9)$$

Además, por isotropía $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = -P$, con lo que:

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (13.10)$$

Principio de Pascal

La presión es una magnitud escalar definida como la fuerza por unidad de superficie: $\vec{F} = P\vec{S} \rightarrow P = \frac{F}{S}$. En el Sistema Internacional, la Presión se mide en Pascales ($1Pa = 1Nm^{-2} \approx 10^{-5}atm$)

No es característica del fluido como sí lo son la viscosidad y la tensión superficial aunque será invariante con la orientación de la superficie donde actúa en el seno de un líquido (será función de la posición).

En el seno del campo gravitacional terrestre estudiaremos la distribución espacial de la presión mediante la **Ley de Pascal**:

Ley de Pascal

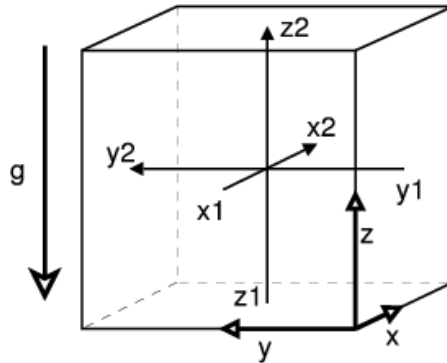


Figura 13.2.: Distribución espacial de la presión

En las direcciones X e Y perpendiculares a la aceleración del campo gravitatorio, tenemos:

$$P_{x1}dy dz = P_{x2}dy dz = \left(P_{x1} + \frac{\partial P}{\partial x}dx \right) dydz \implies \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (13.11)$$

$$P_{y1}dx dz = P_{y2}dx dz = \left(P_{y1} + \frac{\partial P}{\partial y}dy \right) dx dz \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (13.12)$$

13. Fenomenología

En cuanto a la dirección Z paralela a \vec{g} :

$$P_{z2}dydx = \left(P_{z1} + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dydx \implies \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (13.13)$$

Ya que la presión solamente varía con la dirección Z podemos poner las derivadas parciales en términos de derivadas totales y expresarlo con variaciones finitas:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \longrightarrow \Delta P = -\rho g \Delta z \quad (13.14)$$

Escribiremos la ecuación del movimiento de Newton como:

$$\vec{a} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \vec{F}_{ext} \quad (13.15)$$

En equilibrio estático $a = 0$:

$$\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} = \vec{F}_{ext} \quad (13.16)$$

La Paradoja Hidrostática Imaginemos dos recipientes ([Lan78]) con forma de conos truncados exactamente iguales pero invertidos el uno respecto del otro.

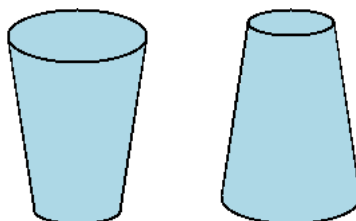
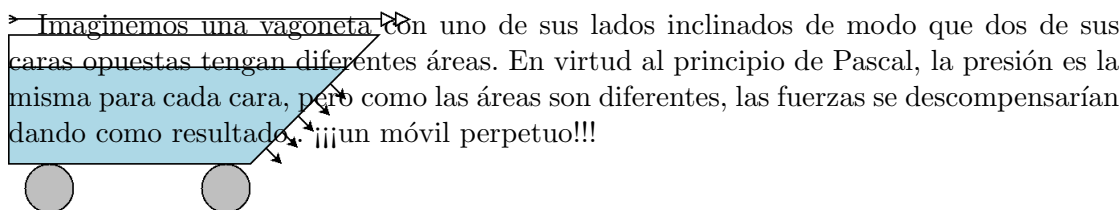


Figura 13.3.: Paradoja Hidrostática

Utilizando 13.14 sabemos que la presión en el fondo de ambos recipientes será la misma, proporcional a la altura de la columna de líquido.

La fuerza con que los recipientes presionen sobre la superficie que los sostiene es el producto de la presión por la superficie y será, por tanto, mayor en el caso del cono con la superficie mayor hacia abajo y menos en el otro.

Entonces, si los colocásemos sobre una balanza, ¿obtendríamos acaso diferentes medidas de sus respectivos pesos?



La hidrostática y el móvil perpetuo En ocasiones la ley de Pascal que a primera vista resulta tan sencilla e intuitiva puede dar lugar a fenómenos aparentemente caprichosos y poco intuitivos como la mencionada paradoja hidrostática. Otro de estos fenómenos es el **efecto sifón**, conocido ya por Herón de Alejandría en el año 10.

efecto sifón

Básicamente consiste en un método para trasvasar líquidos de un recipiente superior a otro inferior a través de un tubo. Vitorio Zonca en 1600 toma la idea del sifón y una mala interpretación de la paradoja hidrostática para construir un móvil perpetuo [V. 89]¹ que trasvasase el líquido del recipiente inferior al superior.

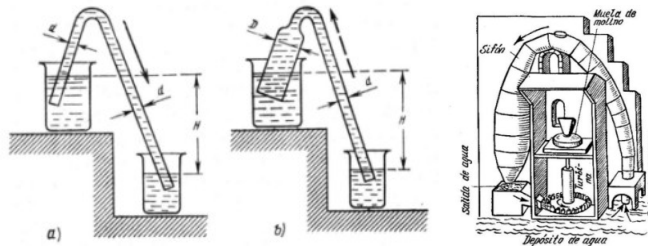


Figura 13.4.: Móviles perpetuos basados en la paradoja hidrostática

Las ideas de Zonca eran anteriores a Pascal (1623-1662), por lo que se le puede perdonar no haber sabido que la presión ejercida por el líquido dependía únicamente de la columna que hubiese por encima y no de la cantidad de líquido. Sin embargo, Papin (1685), uno de los grandes físicos, discípulo de Huygens e inventor entre otras cosas de las primeras máquinas a vapor con cilindro y émbolo, cayó de nuevo en esta trampa hidrostática tratando de construir un nuevo móvil perpetuo similar al de Zonca.

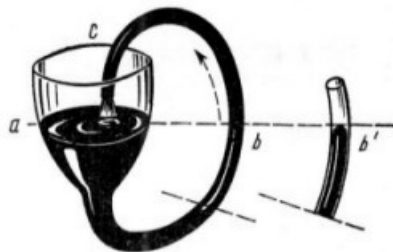


Figura 13.5.: Móvil perpetuo de Papin

Otros fenómenos de la hidrostática que llevaron a la búsqueda del móvil perpetuo fueron la capilaridad (12.5.1) y la presión osmótica (basada en dos regiones con diferente densidad). El propio Bernoulli cayó en el móvil perpetuo de presión osmótica. El líquido realmente fluye de un lado a otro, pero sólo hasta que las densidades se igualan.

En cuanto a la capilaridad, las mismas fuerzas que hacen que el líquido ascienda por la mecha o por los capilares evitan que éste se derrame al otro extremo.

¹Las figuras 13.4, 13.5 y 13.6 están extraídas del libro de Brodianski[V. 89], disponible en <http://librosmaravillosos.com>

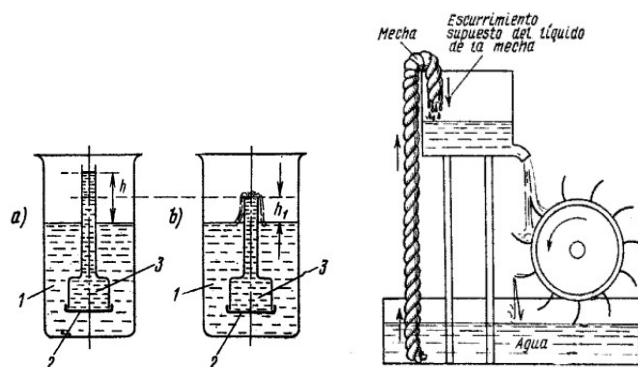


Figura 13.6.: Móviles perpetuos basados en la presión osmótica y la capilaridad

13.1.3. Ecuación dinámica del elemento fluido

Planteemos la ecuación de Newton $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ para un elemento fluido que sea lo bastante grande para poder considerarlo como un continuo e integrarlo (lejos de la escala atómica) y lo suficiente pequeño como para que las fuerzas volumétricas no varíen a lo largo del elemento:

$$\rho\Delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_s + \vec{F}_V = \oint_s \vec{f}_s ds + \int_V \vec{f}_V dV \quad (13.17)$$

Aplicando el teorema de la divergencia para la integral cerrada de superficie y sacando las fuerzas volumétricas de su integral:

$$\rho\Delta V \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_V \Delta V + \text{div} \hat{\tau} \Delta V \quad (13.18)$$

Donde el operador divergencia actúa sobre un vector transformándolo en un escalar como:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (13.19)$$

Y operará de manera análoga convirtiendo un tensor de orden dos en uno de orden uno:

$$\begin{aligned} \text{div} (\hat{A}) &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_{21}}{\partial y} + \frac{\partial A_{31}}{\partial z}, \frac{\partial A_{12}}{\partial x} + \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + \frac{\partial A_{32}}{\partial z}, \frac{\partial A_{13}}{\partial x} + \frac{\partial A_{23}}{\partial y} + \frac{\partial A_{33}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (13.20)$$

No obstante, si tenemos en cuenta que el tensor $\hat{\tau}$ es diagonal e isótropo (13.10), la divergencia del tensor de esfuerzos se reduce al gradiente de presiones:

$$-div\hat{\tau} = \vec{\nabla}p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (13.21)$$

Con todo, simplificando los elementos de volumen:

Ecuación dinámica del elemento de fluido

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_V + div\hat{\tau} = \rho \vec{f}_m + div\hat{\tau} \quad (13.22)$$

En el caso estático $\vec{v} = 0$:

$$\rho \vec{f}_m = -div\hat{\tau} \quad (13.23)$$

13.1.4. Principio de Arquímedes

Tenemos un cuerpo de volumen V delimitado por una superficie S sumergido en el seno de un fluido. Si tomamos un elemento infinitesimal de dicha superficie $d\vec{S}$, sobre dicho elemento de superficie, la presión en el seno del fluido ejercerá una fuerza en sentido contrario a la normal de la superficie:

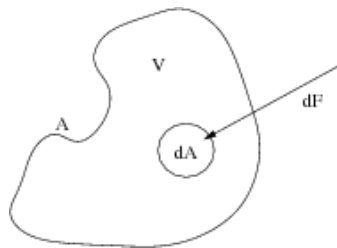


Figura 13.7.: Sólido en el seno de un líquido

$$\vec{F}_S = \oint_S \vec{f}_S dS \quad (13.24)$$

Teniendo en cuenta la distribución espacial de la presión (13.1.2) y considerando densidad constante y gravedad uniforme para poder sacar dichos términos de la integral:

$$\vec{F}_S = \oint_S \hat{\tau} \cdot \vec{n} dS = - \oint_S p \hat{I} d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} p dV = - \int_V \rho \vec{f}_m dV \quad (13.25)$$

Si a la fuerza resultante de la presión ejercida por el líquido añadimos el peso propio del cuerpo, obtenemos un balance de fuerzas:

Principio de Arquímedes

$$\sum F = \text{Peso} - \text{Empuje} = \rho_{\text{cuerpo}}gV - \rho_{\text{fluido}}gV \quad (13.26)$$

14. Construcción del universo

14.1. Descripciones Euleriana y Lagrangiana de la cinemática de fluidos

A la hora de estudiar el movimiento de un fluido nos encontramos con la dificultad de que, en principio, hay un número de partículas demasiado grande como para tomar las coordenadas de cada una de ellas (de hecho, hemos dicho que aproximaríamos nuestro estudio a fluidos continuos constituidos por partículas infinitesimales, por lo que tendríamos un número infinito de partículas).

Para atacar el problema podremos seguir dos enfoques diferentes: El estudio Lagrangiano y el Euleriano.

- DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA:

Se trata de describir el movimiento de cada una de las partículas individualmente, identificando las partículas mediante unas coordenadas de numeración que pueden ser la posición \vec{x}_0 de la partícula en un instante $t = 0$. Así, la posición en un instante de tiempo cualquiera para dicha partícula $\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ y su velocidad $\vec{v}(\vec{x}_0, t)$ serán funciones dependientes del tiempo y de las coordenadas de numeración.

$$\begin{aligned}x &= x(x_0, y_0, z_0, t) \\y &= y(x_0, y_0, z_0, t) \\z &= z(x_0, y_0, z_0, t)\end{aligned}\tag{14.1}$$

Esta definición conserva las nociones de punto material.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}\tag{14.2}$$

En problemas sencillos funciona bastante bien pero se complica demasiado para problemas con una física más rica.

- DESCRIPCIÓN EULERIANA:

Se trata de describir el estado de movimiento de cada punto geométrico ocupado por el fluido sin impotar qué partícula ocupa dicha posición. Lo que se estudia es el campo de velocidades en el espacio ($\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$) sin distinguir una partícula de otra.

El movimiento del fluido es descrito en términos de campos:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k} = \begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

En general, salvo que explícitamente se diga lo contrario, trabajaremos bajo la descripción euleriana.

14.1.1. Definiciones útiles en la descripción del flujo

Tipos de flujo

Partiendo de la forma euleriana de describir el movimiento del fluido desde su campo de velocidades, hay una serie de casos que simplifican el movimiento más general(14.3):

Flujo Estacionario Cuando el campo de velocidades no depende del tiempo:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) \neq \vec{v}(t) \quad (14.4)$$

Flujo Uniforme El campo de velocidades depende exclusivamente del tiempo y no de la posición:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \neq \vec{v}(x, y, z) \quad (14.5)$$

Flujo Plano El campo de velocidades es perpendicular en todo punto a una dirección concreta. El movimiento se efectúa en un plano.

$$\vec{v} \perp \vec{e}_i \quad (14.6)$$

Elementos de flujo

Veamos a continuación una serie de elementos que nos ayudarán a describir cómo se mueve un fluido.

- **LÍNEA FLUIDA:**

Se trata de una sucesión de partículas adyacentes. Digamos que señalamos una serie de partículas trazando una línea de forma arbitraria en un instante de tiempo. La línea trazada se moverá con el paso del tiempo junto a todo el fluido.

- **LÍNEA DE TRAZA:**

Línea fluida formada por las partículas que han ido pasando por un determinado punto geométrico (foco). Señalamos un punto geométrico, y vamos "marcando" cada partícula que pase por dicho punto, trazando con todas ellas una línea fluida.

■ TRAYECTORIA:

Recorrido de una partícula durante un período de tiempo. Señalaremos una partícula e iremos marcando los puntos geométricos que ocupa en cada instante de tiempo para trazar una línea. Se trata del elemento básico en el tratamiento Lagrangiano de la dinámica de fluidos.

La obtenemos integrando en 14.2:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \int_{t_0}^t u(t') dt' \\ y - y_0 &= \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ z - z_0 &= \int_{t_0}^t w(t') dt' \end{aligned} \quad (14.7)$$

■ LÍNEA DE CORRIENTE:

Una línea de corriente es tangente en cada punto al vector velocidad en un instante de tiempo:

$$\vec{v} \parallel d\vec{l} \rightarrow \frac{\|d\vec{l}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (14.8)$$

Si el flujo es estacionario $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias:

$$\begin{aligned} d\vec{l} = d\lambda \vec{v} &\rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = d\lambda \rightarrow x = \int u d\lambda = u\lambda + C \\ d\vec{r} = dt \vec{v} &\rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt \rightarrow x = \int u dt \end{aligned} \quad (14.9)$$

Dado que λ no es un parámetro del sistema, $\vec{v} \neq \vec{v}(\lambda)$, pero en general no sucede lo mismo con respecto a t . Sólo cuando esto suceda (flujo estacionario) la línea de corriente coincide con la trayectoria

■ TUBO DE CORRIENTE:

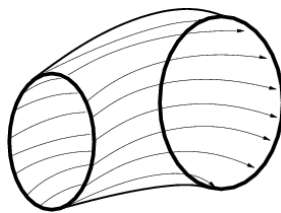


Figura 14.1.: Tubo de corriente

Volumen encerrado por las líneas de corriente que parten de una línea fluida cerrada.

14.2. Derivada sustancial, derivadas locales y término advectivo

Vamos a buscar una expresión general para las aceleraciones en un fluido:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = (u, v, w) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} &= \frac{du}{dt} \vec{i} + \frac{dv}{dt} \vec{j} + \frac{dw}{dt} \vec{k} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \end{aligned} \tag{14.10}$$

Llamando $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ tenemos que $\vec{v}\vec{\nabla} = (u, v, w) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ y obtenemos

el llamado **término advectivo**:

$$\left(\vec{v}\vec{\nabla} \right) = (u, v, w) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{14.11}$$

término advectivo

Derivada sustancial

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla} \right) \vec{v} \tag{14.12}$$

El término advectivo se anula cuando $\vec{v} = 0$ o cuando $\vec{v} \perp \vec{\nabla}$.

14.2.1. La derivada sustancial como operador

La derivada sustancial puede ser entendida como un operador que actúa sobre cualquier magnitud:

$$\frac{d\Box}{dt} = \frac{\partial \Box}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla} \right) \Box \tag{14.13}$$

Derivada sustancial de la densidad

Pongamos a la derivada sustancial actuando sobre la densidad ρ

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \underbrace{\vec{\nabla}\rho}_{\text{gradiente}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (u, v, w) \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} \end{aligned} \quad (14.14)$$

Es decir, que por un lado ($\frac{\partial\rho}{\partial t}$) la densidad como función de punto cambia con el tiempo y por otro la densidad cambia en función de la zona del campo por la que me muevo.

Derivada sustancial de la velocidad

Si tomamos, al igual que en el caso de la densidad, la segunda parte del término advectivo como un gradiente

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \underbrace{\vec{\nabla}\vec{v}}_{\text{gradiente}} \quad (14.15)$$

tensor gradiente de velocidades

$$\hat{\nabla}v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \quad (14.16)$$

14.3. Deformaciones en un fluido

14.3.1. Tensor de deformaciones

Cuando hablamos de la deformación de un fluido, estamos hablando de la variación en las distancias entre las partículas que lo forman. Que varíen dichas distancias con el tiempo, significa que debe existir una cierta velocidad relativa entre partículas (es decir, que si estuviésemos "montados" sobre una partícula tendríamos que ver a la otra acercarse, alejarse o quizá rotar a nuestro alrededor).

El tensor gradiente de velocidades (14.16) nos servirá, por tanto para describir las deformaciones del fluido y está íntimamente relacionado con el tensor deformación del campo de velocidades:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\hat{D}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\hat{C}} = \hat{D} + \frac{1}{2} \hat{C} \quad (14.17)$$

Donde \hat{D} es el **tensor de deformaciones** y \hat{C} es el **tensor de rotaciones**.

14.3.2. Deformación lineal

Cuando una de las componentes de la velocidad varía en su misma dirección, el resultado es una dilatación o una contracción del fluido en dicha dirección.

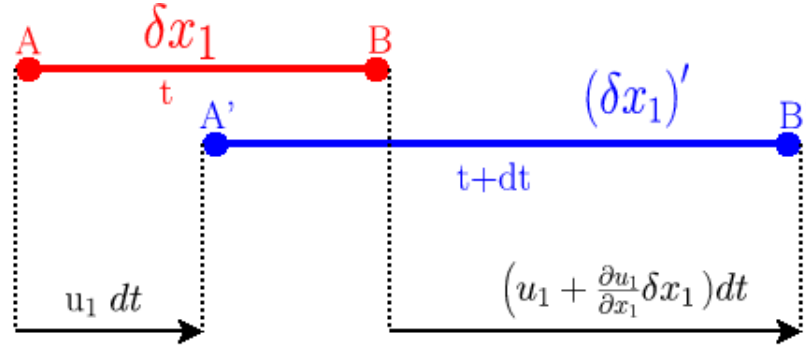


Figura 14.2.: Deformación Lineal

Atendiendo a la ilustración 14.2, un cuerpo \overline{AB} pasa de la posición \overline{AB} a la posición $\overline{A'B'}$ en un intervalo dt . El punto A que lleva una velocidad u_1 recorre una distancia $u_1 dt$ entre las posiciones A y A' . El punto B que llevará una velocidad $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1$ habrá recorrido en ese intervalo una distancia $(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1) dt$. En dicho tiempo, por tanto, la distancia δx entre los puntos A y B ha aumentado (o disminuido si $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 < 0$) una distancia $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \delta x_1 dt$. Se ha producido, en definitiva, una deformación lineal.

Esta variación en la dirección x_1 , viene dada por los términos $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, que generalizando a cada eje coordenado se corresponde con la diagonal principal del tensor deformación del campo de velocidades.

Estas deformaciones lineales son las que llevan directamente a una variación relativa de volumen. Llamando e_{ij} a las componentes del tensor de deformaciones \hat{D} :

$$\begin{aligned} \delta V' &= \delta x'_1 \cdot \delta x'_2 \cdot \delta x'_3 = \\ &= \delta x_1 (1 + e_{11} dt) \delta x_2 (1 + e_{22} dt) \delta x_3 (1 + e_{33} dt) = \\ &= \delta V (1 + e_{11} dt) (1 + e_{22} dt) (1 + e_{33} dt) \end{aligned} \quad (14.18)$$

Cuando el intervalo de tiempo dt es suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} \lim_{dt \rightarrow 0} [\delta V' - \delta V] &= \lim_{dt \rightarrow 0} [\delta V \text{tr}(\hat{D}) dt - \delta V dt] \\ \frac{d\delta V}{dt} &= \text{tr}(\hat{\nabla} v) = \sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (14.19)$$

Deformaciones lineales y variación de volumen

$$\text{tr}(\hat{D}) = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (14.20)$$

Como consecuencia de esta última expresión (14.20) podemos definir un **fluido incompresible** como:

fluido incompresible

$$\begin{aligned} V \equiv \text{Cte} \rightarrow \frac{d\delta V}{dt} \equiv 0 \rightarrow \text{tr}(\hat{D}) = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (14.21)$$

que es la forma más utilizada para definir un fluido incompresible.

Si hacemos una superficial analogía con el electromagnetismo, al igualar a cero la divergencia del campo magnético estábamos expresando la ausencia de fuentes escalares de campo (no existen monopolos magnéticos en la naturaleza).

En fluidos el papel de fuente escalar recae sobre la densidad.

Compresibilidad e incompresibilidad: Barotropía

- **Coefficiente de compresibilidad Γ :**¹

Coeficiente de compresibilidad Γ

$$\Gamma = \frac{d\rho}{dp} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dt} \quad (14.22)$$

El fluido es incompresible si $\Gamma = 0$, o lo que es lo mismo: $\frac{d\rho}{dt} = 0$; $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

- **Coefficiente de piezotropía Π :**

Coeficiente de piezotropía Π

$$\Pi = \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (14.23)$$

Se dice que un fluido es homogéneo si es cero su coeficiente de piezotropía.

- **Barotropía $\Pi = \Gamma$:**

Barotropía $\Pi = \Gamma$

Se dice que un fluido es barótrofo si sus coeficientes de piezotropía y de compresibilidad son iguales: $\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{d\rho}{dp}$.

Esto significa que la densidad es función únicamente de la presión: $\rho = \rho(p)$.

14.3.3. Deformaciones laterales: Rotación y cizalla

A continuación veremos lo que sucede con el resto de las componentes del tensor de deformación del campo de velocidades, es decir, cuando una componente de la velocidad varía a lo largo de una de las otras direcciones.

¹A menudo, especialmente en terminología, se utiliza análogamente el **módulo de compresibilidad** definido como $\rho \left(\frac{dp}{d\rho} \right)$

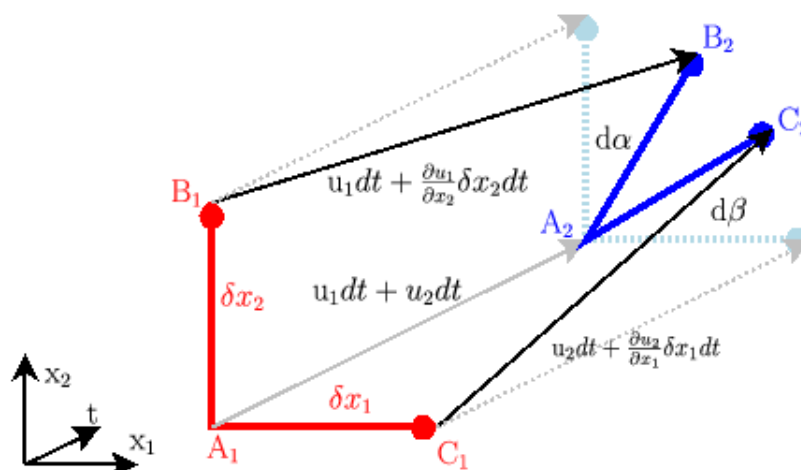


Figura 14.3.: Deformación Lateral

Según en diagrama 14.3, las distancias entre los puntos de referencia en el intervalo \$dt\$ varían:

$$\begin{cases} A_1 \rightarrow A_2 & u_1 dt + u_2 dt \\ B_1 \rightarrow B_2 & u_1 dt + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \delta x_2 dt \\ C_1 \rightarrow C_2 & u_2 dt + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \delta x_1 dt \end{cases} \quad (14.24)$$

En estos términos van las variaciones de forma y rotaciones del fluido. Resulta bastante intuitivo a la vista del diagrama 14.3 que cuando las variaciones \$d\alpha\$ y \$d\beta\$ sean iguales y del mismo signo el movimiento será una rotación pura. Concretando, las posibilidades son:

- CIZALLAS: Son las deformaciones laterales por unidad de tiempo:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (14.25)$$

- ROTACIÓN: Rotaciones del fluido por unidad de tiempo:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (14.26)$$

vorticidad

Los términos de rotación nos dan la **vorticidad**:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (14.27)$$

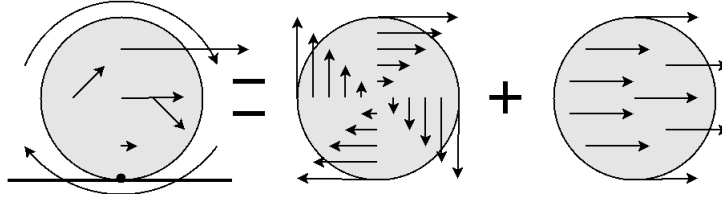


Figura 14.4.: Campo de velocidades de un disco que gira sin deslizar

Vorticidad

La vorticidad es fácilmente interpretable si estudiamos el movimiento de un sólido rígido desde el formalismo de los fluidos.

Sabemos bien plantear la velocidad de cada punto del sólido. Eliminando la traslación pura y quedándonos con los términos de rotación, tenemos:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_y z - \Omega_z y \\ \Omega_z x - \Omega_x z \\ \Omega_x y - \Omega_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (14.28)$$

El rotacional del campo de velocidades nos dará inmediatamente la vorticidad:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y w - \partial_z v \\ \partial_z u - \partial_x w \\ \partial_x v - \partial_y u \end{pmatrix} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{pmatrix} 2\Omega_x \\ 2\Omega_y \\ 2\Omega_z \end{pmatrix} \quad (14.29)$$

Con todo, podemos identificar la vorticidad como el doble de la velocidad angular:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\Omega} \quad (14.30)$$

Llamaremos **flujo irrotacional** al caso en el que la vorticidad se anule:

flujo irrotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \vec{0} \quad (14.31)$$

Hagamos una analogía con el electromagnetismo paralela a la que hicimos en el caso de la condición de fluido incompresible (14.3.2). En este caso, deberíamos decir que al anularse la vorticidad estamos negando la existencia de fuentes de campo vectorial, como sucede con el campo eléctrico.

A partir de ambas analogías, podemos asociar la imagen de campo irrotacional a la imagen típica de un campo eléctrico y la de fluido incompresible a la de un típico campo magnético.

14.3.4. Tensor de deformación del campo de velocidades

En resumen, podemos descartar el tensor deformación del campo de velocidades en los siguientes términos:

14. Construcción del universo

$$\hat{\nabla}v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sphericalangle$$

$$\hookrightarrow = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right) \text{ Def. Lineal } \rightarrow \text{ Variación de V} \\ + \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{array} \right) \text{ Cizalla} \\ + \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{array} \right) \text{ Rotación} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (14.32)$$

La variación de volumen junto con la cizalla, nos determinan todas las deformaciones del fluido:

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \frac{\hat{\nabla}v + (\hat{\nabla}v)^t}{2} = \hat{D} \quad (14.33)$$

La Rotación, por otro lado, viene directamente de la vorticidad:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\nabla}v - (\hat{\nabla}v)^t}{2} = \frac{1}{2} \hat{C} \quad (14.34)$$

Podemos escribir el tensor gradiente de velocidades, desglosando según los términos que hemos ido hallando, como:

$$\hat{\nabla}v = \hat{D} + \frac{1}{2} \hat{C} = \frac{\hat{\nabla}v + (\hat{\nabla}v)^t}{2} + \frac{\hat{\nabla}v - (\hat{\nabla}v)^t}{2} \quad (14.35)$$

14.4. Ecuaciones fundamentales: Leyes de Conservación

14.4.1. Conservación de masa: Ecuación de continuidad

Conservación de masa según una descripción Lagrangiana

Sea δm un elemento fluido que ocupa un volumen $\delta x \delta y \delta z$.

La conservación de masa la podemos enunciar como la no variación de la misma con el tiempo: $\frac{d}{dt} \delta m = 0$, lo que directamente podemos escribir como $\frac{d}{dt} \rho \delta x \delta y \delta z = 0$ donde ρ es la densidad del medio fluido.

Desarrollando la derivada última y dividiendo posteriormente por el volumen del elemento fluido para obtener un resultado en función de la densidad:

$$\delta x \delta y \delta z \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta x}{dt} \delta y \delta z + \rho \frac{d\delta y}{dt} \delta x \delta z + \rho \frac{d\delta z}{dt} \delta y \delta x = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\nabla \cdot \vec{v}} \quad (14.36)$$

Obteniendo finalmente una expresión de la ecuación de continuidad en formulación lagrangiana:

Ecuación de continuidad

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \vec{v} \quad (14.37)$$

Alternativamente, introduciendo un volumen específico $V_l = \frac{1}{\rho}$, obtenemos la misma expresión pero en función de la variación relativa de volumen:

$$\frac{1}{V_l} \frac{dV_l}{dt} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (14.38)$$

Conservación de la masa según una descripción euleriana

Para comenzar el estudio en descripción euleriana, comenzaremos definiendo un volumen de control V , que estará delimitado por una superficie cerrada A .

La cantidad de fluido que atraviesa un fragmento dA de dicha superficie será $\rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$, e integrando a toda la superficie que encierra el volumen de control $\oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$ obtenemos la masa que sale de dicho volumen.

Podemos utilizar dicha superficie cerrada para aplicar el teorema de Gauss:

$$\oint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div}(\rho \vec{v}) dV \quad (14.39)$$

$\int_V \rho dV$ es la masa encerrada en la superficie gaussiana, cuya disminución ha de ser igual al flujo de masa que sale de dicha superficie de control: $-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$.

Expresando la última ecuación por unidad de volumen tenemos ya una expresión para la ecuación de continuidad:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \rho \vec{v} \quad (14.40)$$

14.4.2. Conservación del momento: Ecuación dinámica

Partamos de la ecuación del movimiento de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ en forma diferencial y expresada con fuerzas por unidad de masa $\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_i$ e introduzcamos en ella fuerzas másicas y de superficie:

$$\frac{dv_i}{dt} = f_{mi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (14.41)$$

Alternativamente, podemos expresar esta ecuación en función de la unidad de volumen y no de masa:

$$\underbrace{\rho \frac{dv_i}{dt}}_{\text{aceleración}} = \underbrace{\rho f_{mi}}_{\text{f. másicas}} + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_{\text{f. superficiales}} \quad (14.42)$$

Si ahora tomamos un volumen finito sobre el que integrar:

$$\int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_V \rho f_{mi} dV + \int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (14.43)$$

Sobre el último término, el correspondiente a las fuerzas superficiales, podemos aplicar el teorema de Gauss:

$$\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV = \oint_A \tau_{ij} dA_j \rightarrow \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_V \rho f_{mi} dV + \oint_A \tau_{ij} dA_j \quad (14.44)$$

Integrando y poniendo el resultado en notación vectorial:

Ecuación dinámica

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_m + \text{div} \hat{\tau} \quad (14.45)$$

Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva es la que relaciona la tensión con la deformación en un medio continuo.

Cuando nos encontramos en reposo, el tensor $\hat{\tau}$ sólo tiene componentes distintas de cero en la diagonal principal, es decir, sólo hay tensiones normales (presión): $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$

Sin embargo en cuanto observamos movimiento en el fluido, aparecen tensiones tangenciales $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$ a causa de las tensiones surgidas por la existencia de movimiento σ_{ij} que nos darán el tensor de deformación del campo de velocidades $\vec{\nabla} v$.

$$\hat{\nabla} v = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (14.46)$$

Supondremos que entre la tensión y la deformación existe una relación lineal de la forma $\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \underbrace{e_{mm}}_{\nabla \cdot \vec{v}} \delta_{ij}$ donde μ y λ serán coeficientes que nos dirá la termodinámica del sistema.

De ahí, las tensiones se expresan como:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda e_{mm} \delta_{ij} \quad (14.47)$$

Podemos simplificar más el problema mediante la hipótesis de Stokes que relaciona los coeficientes termodinámicos entre sí: $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu e_{mm} \delta_{ij} \quad (14.48)$$

Finalmente nos queda:

Ecuación constitutiva

$$\tau_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v} \right) \delta_{ij} + \underbrace{\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{cizalla}} \quad (14.49)$$

Ecuación de Navier-Stokes

Introduciendo en la ecuación del movimiento el resultado para τ_{ij} obtenido en la ecuación constitutiva, obtenemos:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_{mi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{v} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \right) \quad (14.50)$$

Desarrollando la derivada respecto de x_j :

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_{mi} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\nabla^2 v_i + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \vec{v}) \right) \quad (14.51)$$

Veamos ahora cómo funciona la ecuación de Navier-Stokes en algunos casos particulares en que impondremos restricciones:

- Fluido incompresible: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_m - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (14.52)$$

14. Construcción del universo

- Fluido ideal (incompresible y no viscoso):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (14.53)$$

ecuación de Euler

Ésta es la llamada **ecuación de Euler** que, en función de la unidad de masa, toma la forma:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f}_m - \nabla p \quad (14.54)$$

Si la observamos desde la perspectiva de una descripción Euleriana

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (14.55)$$

y teniendo en cuenta identidades vectoriales

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\nabla v^2}{2} - \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) \quad (14.56)$$

, llegamos a una expresión en función de derivadas locales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \\ &= \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\nabla v^2}{2} + \vec{f}_m \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} & \longrightarrow \text{Acel. local} \\ \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) - \frac{\nabla v^2}{2} & \longrightarrow \text{Campo de v.} \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p & \longrightarrow \text{Presiones} \\ \vec{f}_m & \longrightarrow \text{F. externas} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (14.57)$$

Si eliminamos ahora la restricción de no viscosidad:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times \text{rot}(\vec{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\nabla v^2}{2} + \vec{f}_m + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (14.58)$$

14.4.3. Conservación de la energía: Ecuación de Bernoulli

Restricción 1: Fluidos incompresibles

Comencemos tratando con fluidos incompresibles $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

La ecuación de movimiento por unidad de masa la escribíamos como:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_{mi} \quad (14.59)$$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por v_i , reordenando la ecuación y aplicando algunas identidades vectoriales podemos llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \frac{\rho v^2}{2} = -div \left(\vec{v} \left(\frac{\rho v^2}{2} + p \right) - \tau \vec{v} \right) + \rho \vec{v} \vec{f}_m - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (14.60)$$

Integrando a un volumen de control V delimitado por la superficie cerrada A podremos interpretar cada uno de los términos de la ecuación por separado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_v \frac{\rho v^2}{2} dV = & \\ = \begin{cases} - \oint_A \frac{\rho v^2}{2} \vec{v} d\vec{A} & \longrightarrow \text{Flujo de Energía cinética a través de } A \\ - \oint_A p \vec{v} d\vec{A} & \longrightarrow \text{Trabajo de las fuerzas de presión sobre } A \\ \oint_A (\tau \cdot \vec{v}) d\vec{A} & \longrightarrow \text{Trabajo de las fuerzas viscosas sobre } A \\ \int_V \rho \vec{v} \vec{f}_m dV & \longrightarrow \text{Trabajo de fuerzas externas (Energía potencial)} \\ - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV & \longrightarrow \text{Pérdida de energía por viscosidad} \end{cases} \quad (14.61) \end{aligned}$$

Restricción 2: Fluidos ideales (incompresibles y no viscosos)

Al eliminar las fuerzas viscosas de nuestro problema, los términos tercero y quinto del desarrollo anterior $\oint_A (\tau \cdot \vec{v}) d\vec{A} - \int_V \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = 0$ desaparecen, con lo que la energía se conserva (las pérdidas energéticas venían del quinto término). La ecuación nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \frac{\rho v^2}{2} dV = - \oint_A \frac{\rho v^2}{2} \vec{v} d\vec{A} - \oint_A p \vec{v} d\vec{A} + \int_V \rho \vec{v} \vec{f}_m dV \quad (14.62)$$

En este caso, si atacamos a Bernoulli por unidad de masa (sin hacer uso del volumen de control) obtenemos una forma de la ecuación de movimiento de Euler reordenada:

$$\nabla \underbrace{\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right)}_{\equiv \beta \rightarrow \text{parámetro de Bernouilli}} = - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times rot(\vec{v}) \quad (14.63)$$

Restricción 3: Flujo estacionario

El flujo estacionario lo expresamos como $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, de donde:

$$\nabla \beta = \vec{v} \times rot(\vec{v}) \quad (14.64)$$

Claramente, el parámetro de Bernoulli (β) es constante a lo largo de las líneas de corriente, tangentes en todo punto a \vec{v} .

Restricción 4: Flujo irrotacional

Lo expresamos como $rot(\vec{v}) = 0$. Esto hace que matemáticamente podamos plantear el campo de velocidades como procedente de un potencial escalar $\vec{v} = \nabla \varphi$.

$$\beta = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \equiv cte \quad (14.65)$$

Multiplicando por la densidad ρ , podemos interpretar fácilmente la invariante anterior en términos de presiones:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = cte \rightarrow \begin{cases} p & \rightarrow \text{hidrostática} \\ \rho \frac{v^2}{2} & \rightarrow \text{dinámica} \\ \rho g z & \rightarrow \text{potencial} \end{cases} \quad (14.66)$$

14.5. Flujo Potencial

Hemos hablado en dos ocasiones (?? y ??) del interés que podía tener hacer la analogía con el electromagnetismo en las consideraciones de fluido incompresible y de flujo irrotacional.

Esas dos ecuaciones de Maxwell a las que hacemos referencia son las que nos permiten definir sendos potenciales de los que podemos sacar fácilmente gran cantidad de información.

A continuación vamos a hacer lo análogo en dinámica de fluidos.

14.5.1. Restricciones necesarias

- Fluidos ideales: Consideraremos despreciables los efectos de la viscosidad.
- Incompresibles: Consideraremos fluidos incompresibles o, cinemáticamente, flujos solenoidales, lo que formalmente expresaremos como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
- Flujo irrotacional: Consideraremos igual a cero el rotacional del campo de velocidades $\nabla \times \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{\omega} = 0$.
- Movimiento sólo en dos dimensiones: Una de las componentes espaciales de la velocidad la consideraremos invariante ($u_z = cte$)².

14.5.2. Potencial de velocidades

Al considerar flujos irrotacionales, imponíamos que se anulase el rotacional del campo de velocidades: $\nabla \times \vec{v} = 0$.

Algebráicamente, dicha condición nos autoriza a construir una función escalar φ cuyo gradiente sea la velocidad.

Llamaremos a este potencial φ potencial de velocidades:

$$\vec{v} = \nabla \varphi \implies \vec{v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (14.67)$$

Como además estamos trabajando en dos dimensiones:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (14.68)$$

²Podríamos extenderlo al caso tridimensional, pero no lo trataremos en este curso.

de donde:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y x} = 0 \implies \omega_z = 0 \rightarrow \text{Vorticidad nula} \quad (14.69)$$

Por otro lado, hemos considerado también que el flujo debía ser solenoidal (que el fluido era incompresible) por lo que:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \implies \nabla^2 \varphi = 0 \quad (14.70)$$

Vemos que el potencial de velocidades cumple la ecuación de Laplace, cuyas soluciones serán armónicas.

Las líneas de potencial de velocidades constante las llamaremos **líneas de velocidad** y serán perpendiculares al campo de velocidades en cada punto:

$$\vec{v} = \nabla \varphi \rightarrow \nabla \varphi \perp \varphi \quad (14.71)$$

líneas de velocidad

14.5.3. Potencial de corriente

En este caso, partiremos de la condición de incompresibilidad: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

De forma análoga a como hicimos en el caso del potencial de velocidades, vamos a buscar (ya que vectorialmente sabemos que existe) un potencial escalar del que derive el campo de velocidades:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (14.72)$$

Llamaremos ψ al potencial de corriente.

Tomemos ahora la condición de flujo irrotacional $\nabla \times \vec{v} = 0$ y veremos que, análogamente a lo que nos sucedía en el caso anterior, nuestro potencial de corriente cumple la ecuación de Laplace:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \implies \nabla^2 \psi = 0 \quad (14.73)$$

En éste caso, al fijar el potencial de corriente nos moveremos por las líneas de corriente, paralelas en cada punto al campo de velocidades:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \rightarrow d\psi = 0 \quad (14.74)$$

El potencial crecerá hacia la izquierda del movimiento:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{j} = -v \vec{i} + u \vec{j} \quad (14.75)$$

El fluido se moverá limitado entre dos líneas de potencial de corriente constante, y la cantidad de fluido que circula entre dos líneas de corriente por unidad de tiempo nos la da la diferencia entre los potenciales constantes de las líneas:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \nabla \psi d\vec{l} = \int_1^2 |\vec{v} \times d\vec{l}| = \Psi \quad (14.76)$$

14.5.4. Condiciones de Cauchy-Riemann

La relación entre el potencial de corriente, el de velocidades y las componentes del campo de velocidades nos las dan:

Condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (14.77)$$

Bibliografía

- [Ant94] Antonio Rañada. *Dinámica clásica*. Alianza Editorial, 1994. [31](#), [49](#)
- [FLS98] Feynman, Richard P., Leyghton, Robert B., and Sands, Matthew. *Física*, volume 1: Mecánica, radiación y calor. Addison Wesley Iberoamericana, 1998.
- [Gam80] Gamow, George. *Biografía de la física*. Alianza Editorial, 1980. [55](#)
- [Gan96] Gantmájér, F. R. . *Mecánica analítica*. Editorial URSS, 1996.
- [GN99] Goriely, A. and Nizette, M. Kovalevskaya rods and kovalevskaya waves. *R&C Dynamics*, 1999. [44](#)
- [Gol00] Goldstein. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, 2000.
- [GW87] Gerald F. Wheeler and William P. Crummet. The vibrating string controversy. *American Journal of Physics*, 1987. [81](#)
- [Lan78] Langue, V. *Paradojas y sofismas físicos*. Editorial MIR MOSCU, 1978. [12](#), [108](#)
- [Lan97] Lanczos, Cornelius . *The variational principles of mechanics*. University of Bangalore press, 1997.
- [Law98] Lawden, Derek F. *Elliptic functions and applications*. Collæge press, 1998. [38](#)
- [LL82] Landau and Lifchitz. *Curso abreviado de física teórica*, volume 1: Mecánica y electrodinámica. Editorial MIR MOSCÚ, 1982.
- [MM87] Miguel Ángel Rodríguez Valverde and María Tirado Miranda. Doscientos años de meniscos líquidos (1805-2005). *American Journal of Physics*, 1987. [103](#), [104](#)
- [PG05] Piña, E. and Guillaumin, E. An auxiliary vector space that simplifies some calculations of the kovalevskaya top. *Revista Mexicana de física*, 2005. [45](#)
- [V. 89] V. M. Brodianski. *Móvil Perpetuo, antes y ahora*. Editorial MIR Moscú, 1989. [109](#)
- [VG07] Veysey II, John and Goldenfeld, Nigel. Simple viscous flows: From boundary layers to the renormalization group. *Reviews of modern physics*, 2007. [102](#)
- [Web98] Webster, A. G. *The dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*. ¿?, 1998.

Índice alfabético

- armónicos, 82
- Armonía en el espacio: Red Recíproca, 85
- Armonía en el tiempo: Frecuencia, 84
- autovalores, 66

- Barotropía $\Pi = \Gamma$, 117
- Base, 40

- centro de masas, 11, 22
- Chasles
 - teorema de, 19
- clepsidra, 54
- Coefficiente de compresibilidad Γ , 117
- Coefficiente de piezotropía Π , 117
- coeficiente de viscosidad, 99
- Condiciones de Cauchy-Riemann, 128
- Condiciones de contorno en el problema de N cuerpos, 76
- coordenadas generalizadas, 20
- Cuerda vibrante de N partículas, 76

- Deformaciones lineales y variación de volumen, 117
- degeneración, 70
- delta de Kronecker, 26
- Densidad de energía cinética, 90
- Densidad de energía, 91
- Densidad de energía potencial, 91
- Derivada sustancial, 114

- Ecuación constitutiva, 123
- Ecuación de continuidad, 121
- ecuación de Euler, 124
- ecuación de onda de primer orden con efectos dispersivos, 89
- Ecuación de ondas, 83
- Ecuación dinámica, 122

- Ecuación dinámica del elemento de fluido, 109
- ecuaciones de movimiento, 20
- efecto sifón, 107
- eje instantáneo de rotación, 11, 39
- Energía asociada a una longitud de onda, 92
- Energía cinética
 - sólido rígido
 - expresión general, 23
- Euler
 - ángulos de, 33, 34
 - ecuaciones de, 30
 - teorema de, 19
- figuras planas
 - teorema de, 28
- fluido incompresible, 117
- fluido Newtoniano, 99
- flujo irrotacional, 119
- Foucault, 12
- frecuencias normales, 66
- Frecuencias normales armónicas de una cuerda, 82

- Galileo, 53
- giroscopio
 - trompo dormido, 12
- grados de libertad, 20

- Hamiltoniana, 2
- herpolhodia, 32

- Kovalevskaya, 42

- líneas de velocidad, 127
- Lagrange
 - trompo de

- ecuaciones de movimiento, 36
- giroscopio, 12
- peonza, 11
- Ley de Jurin, 102
- Ley de Pascal, 105
- ligaduras, 15
- masa puntual
 - ecuaciones de movimiento, 16
- matriz de masas, 65
- matriz elástica, 63
- Maxwell
 - disco de, 8
- modos normales de vibración, 65
- moléculas triatómicas, 69
- momento, 16
- Momento angular
 - forma tensorial, 25
- momento de inercia, 17
- momento lineal, 22
- muelle real, 57
- normales
 - modos, coordenadas, frecuencias, 63
- Oscilador bidimensional, 55
- Oscilador unidimensional, 55
- péndulos acoplados, 61
- período, 54
- Poinsot
 - teorema de, 27
- polhodia, 32
- potencial armónico, 58
- Principio de Arquímedes, 110
- producto vectorial, 17
- pulsómetro, 54
- punto de aplicación, 17
- Puntos de equilibrio, 59
- puntos de equilibrio, 59
- régimen elástico, 57
- Relación de dispersión, 88
- relación de dispersión, 88
- rotación
 - tierra-luna, 9
- Ruleta, 40
- sólido libre, 32
- sólido rígido
 - noción, 15
 - rotación pura, 23
 - término mixto, 23
 - traslación pura, 23
- Schwartz, condición de, 66
- Sencilla armonía entre el espacio y el tiempo, 83
- serie par de Fourier, 81
- simetría, 20
 - eje de, 29
 - plano de, 29
 - reflexiones especulares del producto vectorial, 17
- sistema de referencia inercial, 20
- sistema de referencia no inercial, 20
- Solución para N cuerpos, 73
- soluciones desacopladas, 55
- Steiner
 - teorema de, 28
- término advectivo, 114
- tensión viscosa, 99
- tensor de deformaciones, 116
- Tensor de esfuerzos, 104
- Tensor de inercia
 - diagonalización, 26
- tensor de rotaciones, 116
- tensor gradiente de velocidades, 115
- trompo
 - asimétrico, 31
 - esférico, 32
 - simétrico, 32
- velocidad
 - sólido rígido, 22
- viscosidad cinemática, 99
- vorticidad, 118

Historia

Estos apuntes han sido elaborados por alumnos de la **Facultad de Ciencias Físicas** de la **Universidad Complutense de Madrid** a partir de las clases de la asignatura de **Mecánica y ondas II** perteneciente al tercer curso de la licenciatura en ciencias físicas.

2004-05 Ve la luz la primera versión de estos apuntes de la mano de las clases impartidas por **Gregorio Maqueda Burgos**.

2005-06 A partir de las clases de **Francisco Domínguez-Adame Acosta** se revisa la versión existente añadiendo principalmente nuevas figuras, ejemplos y ejercicios.

2007-08 Se realiza un cambio profundo en los apuntes desde la estructura de los mismos y el orden de los bloques inspirada en las lecciones de **Enrique Maciá Barber**. Mejorando especialmente la estructura lógica de los mismos y la coherencia de las explicaciones.

