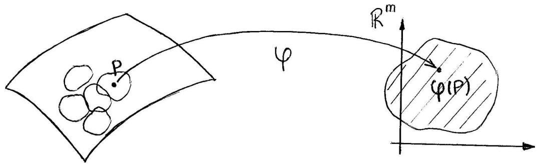
libro abierto / serie apuntes

Álvaro Tejero Cantero
Marta Balbás Gambra

Variedades, tensores y física

[] 1.1.0



▷ Un libro libre de Alqua

VTF	Variedades, tensores y física	514.7	ALQ

† lomo para ediciones impresas

http://alqua.org/libredoc/VTF

Álvaro Tejero Cantero alvaro@alqua.org http://alqua.org/people/alvaro
Marta Balbás Gambra marta@alqua.org http://alqua.org/people/marta

Variedades, tensores y física

versión 1.1.0
15 de abril de 2004

alqua,madeincommunity

copyleft

Serie apuntes

Área geometría diferencial

CDU 514.7

Editores

Álvaro Tejero Cantero alvaro@alqua.org

Notas de producción

Plantilla `latex-book-es-b.tex, v. 0.1` (C) Álvaro Tejero Cantero.

▷compuesto con software libre◁

Índice general

1 Variedades diferenciables

El concepto de *variedad diferenciable* aparece al generalizar y formalizar la definición de superficie, independientemente de un espacio exterior. El vocabulario de la disciplina toma términos de la descripción del globo terrestre: la representación plana de la superficie terrestre es un problema que ha ocupado un papel fundamental en la geometría durante la historia. Las regiones de la Tierra se representan mediante cartas o mapas, que se reúnen en un volumen para formar un atlas, un conjunto de cartas para todo el planeta.

Dos nombres de especial relevancia son el de Gauss, que inicia el estudio intrínseco (invariante frente al sistema de coordenadas) de las superficies y el de Riemann, que aporta una estructura métrica para las variedades.

[Schutz] indica que la palabra “variedad” es el sustituto matemáticamente preciso de la palabra “espacio”, sea éste el de todos los estados de equilibrio termodinámico, el espacio de fases de la mecánica, u otro más abstracto y complejo aún. La importancia de este concepto para la física matemática es, pues, difícil de exagerar.

En este capítulo estudiaremos la definición de variedad diferenciable, examinando todas las nociones previas que es necesario conocer para entenderla, presentaremos las variedades más comunes y algunos ejemplos de ellas, y, por último trasladaremos nuestros conocimientos matemáticos de $\mathbb{R}^m$ a estos espacios más generales, en particular los de aplicación diferenciable, curva y vector.

1.1. Hacia la definición de variedad

En esta sección diseccionaremos el concepto de variedad diferenciable, de modo que el campo de juego en el que se va a desarrollar el curso sea bien conocido desde el principio. Empezaremos con una introducción algo informal.

1.1.1. Introducción

Supongamos que existe un espacio abstracto M, en torno a cada punto P del cual tenemos un entorno homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ (figura 1.1). Este homeomorfismo dota al espacio M de unas coordenadas locales para cada punto, $\varphi[P] = \left(x^1 \dots x^m\right)$. Cada punto de M puede recibir un *parche* local al que es asignable por medio de φ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

Surge un problema: al intentar cubrir esa variedad M puede haber dos parches que solapen en una determinada región, de modo que para un punto P se tengan dos posibles subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$, $\varphi_1[U_1 \cap U_2]$ y $\varphi_2[U_1 \cap U_2]$. Pero si queremos que las coordenadas tengan un cierto grado de diferenciabilidad para poder definir sobre ellas objetos

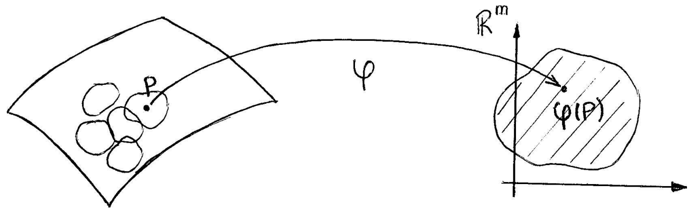


Figura 1.1: Aplicación de un entorno de un punto en M a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.

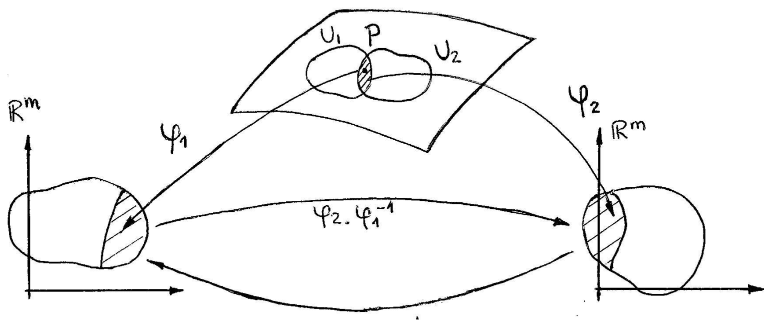


Figura 1.2: El problema de la compatibilidad entre dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2).

(funciones u otros más complicados) de, a su vez, cierto grado de diferenciabilidad, deben imponerse algunas condiciones de compatibilidad.

Como condición de compatibilidad exigiremos que los dos cambios de coordenadas,

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \left(x^1 \ldots x^m\right) &\mapsto \left(x^{1'} \ldots x^{m'}\right) \end{aligned}$$

y su inverso, $\varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$ sean suficientemente diferenciables.

Cualitativamente, una variedad diferenciable es un conjunto que localmente se puede representar por $\mathbb{R}^m$ y tal que los cambios de coordenadas entre diferentes representaciones de un subconjunto son $\mathcal{C}^\infty$.

1.1.2. Conceptos previos

carta sea X un *espacio topológico*. Se define una *carta* para X como el par (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de X y φ es un *homeomorfismo* de U en $\mathbb{R}^m$, es decir:

$$\begin{aligned} \varphi : U \subset X &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ P &\mapsto \left(x^1 \ldots x^m\right) \end{aligned}$$

espacio topológico es un conjunto X en el que se ha definido una familia de subconjuntos especiales que se denominan *conjuntos abiertos* y que satisfacen lo siguiente:

1. La intersección finita de abiertos es un abierto.
2. La unión arbitraria ($\bigcup_1^\infty$)de conjuntos abiertos es un abierto.
3. El conjunto vacío, $\varnothing$ y el total, X son conjuntos abiertos.

A la familia de subconjuntos se la denomina una *topología* del conjunto. Se pueden definir algunas topologías triviales

1. La discreta: todos los subconjuntos son abiertos.
2. La concreta: sólo el vacío y X son abiertos.
3. Una topología *métrica*. En $\mathbb{R}^m$ tenemos definida una distancia dada por el teorema de Pitágoras.

$$d\,[x,y] = \sqrt{\left(x^1 - y^1\right)^2 + \ldots + \left(x^m - y^m\right)^2}$$

   Un punto P es interior a un conjunto U si existe $\varepsilon > 0$ tal que en su ε-vecindad dada por la métrica está enteramente en U. Se dice que U es abierto si todos sus puntos son interiores.

Necesitamos la estructura de espacio topológico porque $\varphi : U \subset X \to \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo, lo que quiere decir que φ y φ^{-1} son continuas. φ continua implica, por la definición algebraica de homeomorfismo, que φ^{-1} de un conjunto abierto (el codominio del homeomorfismo φ es $\mathbb{R}^m$, que es un abierto) debe ser un conjunto abierto. Pero para saber qué es un abierto tengo que saber qué son los conjuntos abiertos en X. Y para eso tengo que haber introducido una topología en X, una estructura topológica.

En resumen, la función de la carta lleva abiertos a abiertos, como su inversa.

dimensión de una carta es la dimensión del subconjunto U, es decir m (la dim $[\mathbb{R}^m]$).

entorno de coordenadas U (también llamado dominio de coordenadas).

aplicación de coordenadas φ (aplicación de carta).

sistema de coordenadas usaremos habitualmente $(x^1 \ldots x^m)$ y $\left(x^{1'} \ldots x^{m'}\right)$ para denotar diferentes sistemas de coordenadas.

cartas compatibles $\mathcal{C}^\infty$ Sea X un espacio topológico y sean (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) dos cartas para X tales que

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U_1 \subset X & \to & \mathbb{R}^m \\ P & \mapsto & \left(x^1 \ldots x^m\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : U_2 \subset X & \to & \mathbb{R}^m \\ P & \mapsto & \left(x^{1'} \ldots x^{m'}\right) \end{array}$$

se dice que estas cartas son $\mathcal{C}^\infty$-compatibles si se cumplen estas dos condiciones

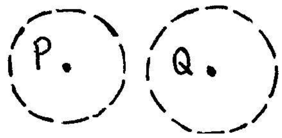


Figura 1.3: Ilustración de la condición Haussdorf para dos puntos P, Q en $\mathbb{R}^2$

1. $m = n$, y
2. o bien $U_1 \cap U_2 \equiv \varnothing$ o bien si $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ (los entornos de coordenadas solapan) las aplicaciones $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ y $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ (cambios de coordenadas) son $\mathcal{C}^\infty$.

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1 \left[U_1 \cap U_2\right] \subset \mathbb{R}^m &\to \varphi_2 \left[U_1 \cap U_2\right] \subset \mathbb{R}^m \\ \left(x^1 \dots x^m\right) &\mapsto \left(x^{1'}\left[x^1 \dots x^m\right] \dots x^{m'}\left[x^1 \dots x^m\right]\right) \end{aligned}$$

(ejercicio: escribir el cambio inverso).

Ahora vamos a ir exponiendo requisitos sucesivos a imponer sobre un espacio para considerarlo variedad diferenciable, escenario de una física del continuo.

variedad topológica Una *variedad topológica* X es un espacio topológico *Haussdorf* y *separable* junto con una familia de cartas $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ (de dimensión m) que recubren a X.

espacio topológico Haussdorf se dice de un espacio topológico X que es *Haussdorf* si $\forall P, Q \in X : P \neq Q, \exists U, V \subset X$ abiertos tales que $P \in U$ y $Q \in V$, $U \cap V = \varnothing$. Es decir, que se puede separar dos puntos distintos (figura 1.3).

Todo espacio con una topología métrica es Haussdorf. En un espacio métrico, dados dos puntos x e y, calculamos la distancia d entre ellos y alrededor de cada punto construimos una bola de radio $< \frac{d}{2}$. Esas bolas son los conjuntos U, V disjuntos a los que nos referimos en esta definición.

espacio topológico separable se dice de un espacio topológico X que es *separable* si admite una *base numerable* de entornos abiertos.

base de entornos abiertos de un punto Para un punto P de un espacio topológico X, una *base de entornos abiertos* es una familia de conjuntos abiertos $\{U_a\}_a$ que contiene a P de tal manera que si se toma cualquier otro conjunto abierto V que lo contenga siempre se pueda encontrar un U_a perteneciente a V.

Comentarios:

- En realidad lo que permite una base numerable de conjuntos abiertos abiertos es poder partir un cálculo integral en al menos una cantidad numerable de cálculos.

- Por ejemplo, en $\mathbb{R}^m$ una base de entornos abiertos sería el conjunto (numerable) de bolas de radio racional.

Que una familia de cartas $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ *recubre* X quiere decir que $\forall P \in X$ existe al menos un U tal que $P \in U$. Es decir que para todo punto siempre hay un entorno de coordenadas de una carta en el que está incluido.

atlas de una variedad topológica X es una familia de cartas que la recubre.

atlas $\mathcal{C}^\infty$ Sea X una variedad topológica. Se dice que un atlas $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ es $\mathcal{C}^\infty$ si cualesquiera cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) del atlas son $\mathcal{C}^\infty$ compatibles.

carta admisible para un atlas $\mathcal{C}^\infty$ sea X una variedad topológica y $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$un atlas $\mathcal{C}^\infty$. Se dice que la carta (V, ψ) es admisible para dicho atlas si es $\mathcal{C}^\infty$ compatible con todas sus cartas.

Si coleccionamos todas las cartas admisibles para un atlas podemos así construir un *atlas máximo*, que es el que contiene todas las cartas admisibles para un atlas inicial dado. Es necesario utilizar este atlas con *todas* las cartas para definir la variedad, y eso es por consistencia lógica. Así no privilegiamos ningún sistema de coordenadas respecto a la estructura, porque el atlas máximo es único, mientras que el atlas inicial es una descripción concreta y arbitraria del espacio topológico. Además si no fuese así se daría la paradoja de que consideraríamos distintos dos objetos cuya única diferencia está en su descripción (el atlas).

Es interesante preguntarse cuál es el número mínimo de cartas que recubren una variedad. En el caso de la esfera, se puede hacer con sólo 2.

1.1.3. Definición de variedad

variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ Una variedad diferenciable M es un espacio topológico Hausdorff y separable junto con un atlas $\mathcal{C}^\infty$ $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ de dimensión m y todas sus cartas admisibles (un atlas máximo para el atlas dado).

Esencialmente es una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable.

Tenemos pues la siguiente definición completa: una variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ M es un espacio topológico Hausdorff y separable junto con una familia de cartas $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ m-dimensionales que satisfacen las siguientes propiedades

1. $\forall P \in M \, \exists \, (U_a, \varphi_a)$ tal que $P \in U_a$ (la familia recubre M).
2. Cualesquiera (U_a, φ_a) y (U_b, φ_b) pertenecientes a la familia son $\mathcal{C}^\infty$ compatibles.
3. Toda carta admisible para la familia de cartas está contenida en ella (atlas máximo).

Otras explicaciones se basan en definir una estructura diferenciable para una variedad topológica, lo cual es simplemente el conjunto de cartas con las tres propiedades que hemos dicho. Esto separa nítidamente una parte topológica ("variedad topológica") y una parte diferenciable ("estructura diferenciable"); distinción importante porque incluso para variedades topológicas tan sencillas como $\mathbb{R}^4$ se pueden introducir varias estructuras diferenciables. Esta multiplicidad de estructuras diferenciables para una misma variedad topológica se presenta en algunos modelos geométricos extraídos de la Física.

Hay algunas consideraciones que hacer sobre la compatibilidad de cartas:

- A partir de una estructura analítica ($\mathcal{C}^\omega$) se puede, añadiendo todas las cartas $\mathcal{C}^\infty$ compatibles con las analíticamente compatibles, construir una estructura diferenciable $\mathcal{C}^\infty$.
- análogamente para $\mathcal{C}^k$ a partir de $\mathcal{C}^\infty$.
- Resultado importante (y difícil de probar): para una estructura $\mathcal{C}^k$ (hasta $\mathcal{C}^1$) podemos, simplemente descartando las cartas no analíticas, obtener una estructura diferenciable analítica.

Vemos que, a fin de cuentas, no debemos preocuparnos excesivamente por el grado de diferenciabilidad de las transformaciones. La estructura de variedad topológica incluye ya $\mathcal{C}^0$ (transformaciones continuas), pero eso no permite acceder a la estructura de variedad diferenciable. El tercer requisito para una variedad diferenciable introduce una enorme dificultad práctica que se resuelve por el siguiente aserto:

estructura diferenciable (teorema) Una variedad topológica X más un atlas $\mathcal{C}^\infty$ sobre ella definen de manera única una estructura diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ para X y que contiene al atlas dado.

1.2. Variedades importantes

En este apartado describiremos algunas categorías de variedades especialmente significativas para las aplicaciones, y daremos algunos ejemplos concretos junto con las definiciones necesarias para su comprensión.

1.2.1. El espacio habitual: $\mathbb{R}^m$

Un ejemplo conocido de variedad diferenciable es el propio espacio $\mathbb{R}^m$. Sobre él definimos la topología habitual, una topología métrica dada por la distancia

$$d\,[x,y] = \sqrt{(x^1 - y^1) + \ldots + (x^m - y^m)^2}$$

Por estar dotado de una topología métrica $\mathbb{R}^m$ es Hausdorff. También es separable (tómese una base de entornos centrados en los números racionales). En cuanto a la estructura diferenciable, podemos recubrirlo con una sola carta, trivial: $(\mathbb{R}^m, id)$ (el propio abierto $\mathbb{R}^m$ y la aplicación identidad, id).

1.2.2. Las subvariedades abiertas

Cualquier subconjunto abierto N de una variedad diferenciable M es, a su vez, una variedad diferenciable. Veamos cómo N hereda las propiedades topológicas y diferenciables necesarias de M:

1. **Topología inducida de M en N.** Diremos que un $U \subset N$ es abierto si $\exists \hat{U} \subset M$ abierto tal que $U \equiv \hat{U} \cap N$. Esta definición permite saber qué es y qué no es un subconjunto abierto de N. Por ejemplo, para determinar si un subconjunto de la esfera[1] $\mathbb{S}^2$ es abierto a partir de una topología de $\mathbb{R}^3$ no hay más que encontrar un abierto de $\mathbb{R}^3$ cuya intersección sea el subconjunto de la esfera en cuestión.

2. **Haussdorf.** Sean $P, Q \in N \subset M$. Entonces $\exists\, \hat{U}, \hat{V} \subset M$ abiertos tales que $P \in \hat{U}$ y $Q \in \hat{V}$ y $\hat{U} \cap \hat{V} = \varnothing$. Pero entonces

$$\begin{aligned} U &\equiv \hat{U} \cap N \\ V &\equiv \hat{V} \cap N \end{aligned}$$

   por construcción, son subconjuntos abiertos de N. Luego efectivamente si el conjunto de partida es Hausdorff, el subconjunto con topología inducida también lo es.

3. **Separabilidad.** Dada una base de entornos abiertos numerable para M (por ser separable) conseguimos una para N simplemente formando su intersección con M. Más formalmente, $\exists\, \{\hat{U}_a\}_a$ abiertos de M implica que es posible construir una base numerable de entornos abiertos para N, $\{U_a\}_a$, simplemente definiendo $U_a = \hat{U}_a \cap N$.

4. **Atlas $\mathcal{C}^\infty$.** Si M es una variedad $\mathcal{C}^\infty$ a partir de su atlas, $\{(\hat{U}_a, \hat{\varphi}_a)\}_a$ construimos un atlas $\mathcal{C}^\infty$ para N, $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} U_a &\equiv \hat{U}_a \cap N \\ \varphi_a &\equiv \hat{\varphi}_a|_{U_a} \end{aligned}$$

   Los conjuntos abiertos los construimos por intersección con los de M y las aplicaciones de carta mediante restricción del dominio original (en M) a N.

Las subvariedades abiertas tienen la misma dimensión que $\mathbb{R}^m$, la variedad ambiente. La esfera *no* es por tanto una subvariedad abierta de $\mathbb{R}^3$. La bola de dimensión m sí es una subvariedad abierta de $\mathbb{R}^m$.

[1] En adelante debe entenderse *superficie esférica* cuando quiera que nos refiramos a *esfera* o al *conjunto* $\mathbb{S}^2$. La esfera en sentido tradicional (*llena*) se designará aquí con el término habitual de topología, *bola*.

1.2.3. La esfera: $\mathbb{S}^2$

La esfera de dimensión 2 se puede definir por una ecuación:

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = 1 \right\}$$

Para probar que es una variedad diferenciable tenemos que definir qué son conjuntos abiertos en la esfera (estructura topológica) y encontrar para ella un atlas $\mathcal{C}^\infty$ (estructura diferenciable):

1. Inducimos la topología de $\mathbb{R}^3$. Un conjunto $U \subset \mathbb{S}^2$ es abierto si $\exists\, \hat{U} \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que $U = \hat{U} \cap \mathbb{S}^2$. Por el razonamiento de 1.2.2 $\mathbb{S}^2$ es Haussdorf y separable.

2. Para definir un atlas necesitamos una colección de conjuntos abiertos que recubra la variedad y aplicaciones que los lleven a $\mathbb{R}^2$. Vamos a identificar abiertos de $\mathbb{R}^3$ tal que al intersecar con $\mathbb{S}^2$ obtengamos una familia de conjuntos abiertos que recubra toda la esfera. Podemos utilizar estos 6:

$$\begin{aligned} \hat{U}_a^+ &= \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 : x^a > 0 \right\}_{a=1,2,3} \\ \hat{U}_a^- &= \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 : x^a < 0 \right\}_{a=1,2,3} \end{aligned}$$

   Estos conjuntos son semiespacios de $\mathbb{R}^3$ según se divide por planos de $x^a = 0$. Definimos entonces 6 conjuntos abiertos, que serán 6 superficies hemisféricas $U_a^\pm = \hat{U}_a^\pm \cap \mathbb{S}^2$. Por ejemplo, para $a = 1$:

$$U_1^+ = \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 : x^1 > 0, \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = 1 \right\}$$

   Estos conjuntos recubren la esfera porque como la distancia al cuadrado es uno, alguna coordenada tiene que ser $\neq 0$. Para asignar las coordenadas $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ no hay más que proyectar las coordenadas sobre $x^1 = 0$ si estamos en $U_1^\pm$, $x^2 = 0$ si estamos en $U_2^\pm$, etc. Como ejemplo veamos las dos aplicaciones de carta correspondientes a x^1:

$$\begin{aligned} \varphi_1^\pm : U_1^\pm \subset \mathbb{S}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \left(x^1, x^2, x^3\right) &\to \left(x^2, x^3\right) \end{aligned}$$

   que van de abiertos a abiertos: son homeomorfismos de $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{R}^2$. El atlas es pues $\{U_a^\pm, \varphi_a^\pm\}_a$ y tenemos ya una estructura de variedad topológica.

3. Ahora tenemos que demostrar que la variedad es diferenciable, estableciendo la compatibilidad entre cartas. Hagámoslo por ejemplo con $\left(U_1^+, \varphi_1^+\right)$ y $\left(U_2^-, \varphi_2^-\right)$. Lo que debemos determinar es si $\varphi_2^- \circ \left(\varphi_1^+\right)^{-1}$ es $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi_1^+\left[U_1^+ \cap U_2^-\right]$ (que es donde está definido). Veamos primero cuál es el conjunto intersección:

$$U_1^+ \cap U_2^- = \left\{ \left(x^1, x^2, x^3\right) \in \mathbb{R}^3 : x^1 > 0, x^2 < 0, \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = 1 \right\}$$

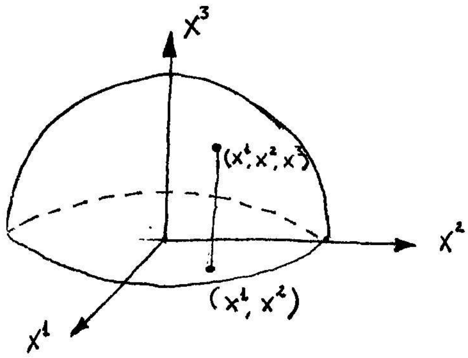


Figura 1.4: φ_3 proyecta según el eje x^3.

El cambio inverso, $\varphi_1^+ \circ \left(\varphi_2^-\right)^{-1}$, también debe ser $\mathcal{C}^\infty$ (en $\varphi_2^- \left[U_1^+ \cap U_2^-\right]$) .

La aplicación $\varphi_2^- \circ \left(\varphi_1^+\right)^{-1}$ es

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2^- \circ \left(\varphi_1^+\right)^{-1} : \varphi_1^+ \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] & \to & \varphi_2^- \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] \\ \left(x^2, x^3\right) & \mapsto & \left(x^1 = x^1 \left[x^2, x^3\right], x^3 = x^3 \left[x^2, x^3\right]\right) \end{array}$$

se debe cumplir $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ luego $(x^1)^2 = 1 - ((x^2)^2 + (x^3)^2)$. Nos debemos quedar con la raíz cuadrada positiva, por culpa de la restricción $x^1 > 0$.

$$x^1 \left[x^2, x^3\right] = \sqrt{1 - \left((x^2)^2 + (x^3)^2\right)}$$

por otra parte, $x^3 \left[x^2, x^3\right] = x^3$. La función del cambio de coordenadas es, por culpa de la restricción $\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 = 1$ y de que $x^1 > 0$, una raíz cuadrada positiva de algo positivo, luego es $\mathcal{C}^\infty$ en el dominio de definición:

$$\varphi_1^+ \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] = \varphi_1^+ \left[\left\{x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}^3 : x^2 < 0, \left(x^1\right)^2 + \left(x^3\right)^2 < 1\right\}\right]$$

En cuanto a la otra aplicación,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^+ \circ \left(\varphi_2^-\right)^{-1} : \varphi_2^- \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] & \to & \varphi_1^+ \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] \\ \left(x^1, x^3\right) & \mapsto & \left(x^2 = x^2 \left[x^1, x^3\right], x^3 = x^3 \left[x^1, x^3\right]\right) \end{array}$$

para la expresión de

$$x^2 \left[x^1, x^3\right] = -\sqrt{1 - \left((x^1)^2 + (x^3)^2\right)}$$

tomamos el signo menos porque $x^2 < 0$ en la restricción. Debemos probar que es $\mathcal{C}^\infty$ en el conjunto

$$\varphi_2^- \left[U_1^+ \cap U_2^-\right] = \left\{\left(x^1, x^3\right) \in \mathbb{R}^2 : x^1 > 0, \left(x^1\right)^2 + \left(x^3\right)^2 < 0\right\}$$

por el mismo razonamiento de antes esta función es $\mathcal{C}^\infty$. En cuanto a las funciones lineales como $x^3\left[x^1, x^3\right] = x^3$, son automáticamente $\mathcal{C}^\infty$.

1.2.4. Variedades diferenciales definidas por ecuaciones

El método recién utilizado para definir la esfera, utilizando una ecuación, es generalizable. Se trata de seleccionar aquellos puntos de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen una determinada ecuación. La pregunta que uno se puede hacer es si dado un sistema de ecuaciones, (con $c^1 \ldots c^k$ constantes y $x^1 \ldots x^n \in \mathbb{R}^n$),

$$\begin{aligned} f^1\left[x^1 \ldots x^n\right] &= c^1 \\ &\vdots \\ f^k\left[x^1 \ldots x^n\right] &= c^k \end{aligned}$$

el espacio determinado por sus soluciones es una variedad diferenciable. Esencialmente, como veremos, se trata de reformular el teorema de la función implícita.

función implícita (teorema) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. Consideremos el espacio de soluciones de las k ecuaciones $f^i\left[x^1 \ldots x^n\right] = c^i$ (con c un vector constante) que denotamos por M. Si el jacobiano de f es de rango máximo en todos los puntos $P \in M$, entonces M tiene una estructura de variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ de dimensión $n-k$ y además en torno a cada punto P podemos escoger $m = n-k$ coordenadas cartesianas del espacio ambiente como coordenadas locales.

jacobiano de f denotado a veces

$$J\left[f\left[x^1 \ldots x^n\right]\right] = \frac{\partial\left(f^1 \ldots f^k\right)}{\partial\left(x^1 \ldots x^n\right)}$$

se calcula así:

$$J\left[f\left[x^1 \ldots x^n\right]\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

Ejemplo Sea

$$M = \left\{\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \in \mathbb{R}^4 : \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 = 1, \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 = 1\right\} \tag{1.1}$$

con $n = 4, k = 2$ y $c^1 = c^2 = 1$. Lo primero que hay que comprobar es que

$$\begin{aligned} f^1 &= \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \\ f^2 &= \left(x^3\right)^2 + \left(x^4\right)^2 \end{aligned}$$

son $\mathcal{C}^\infty$ (lo son, porque son polinomios). Lo siguiente es escribir la matriz jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}$$

y ver si es de rango máximo para todos y cada uno de los puntos que satisfacen la ecuación (M). El rango del jacobiano es máximo si no se anulan simultáneamente todos los menores de orden 2:

$$\begin{aligned} x^1x^3 &= 0 \\ x^1x^4 &= 0 \\ x^2x^3 &= 0 \\ x^2x^4 &= 0 \end{aligned}$$

de aquí, imponiendo 1.1, concluimos que es imposible que el rango no sea máximo: sobre los puntos de la variedad siempre hay algún determinante 2×2 que no se anula. La variedad tiene dimensión $4-2=2$.

Se puede pensar en la variedad recién descrita como el producto cartesiano de las soluciones de la primera ecuación y las soluciones de la segunda ecuación. Análogamente, se puede describir el toro $\mathbb{T}^2$ como producto cartesiano de dos circunferencias unidad:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 &= \left\{\left(x^1,x^2\right):\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2=1\right\} \\ \mathbb{S}^{1'} &= \left\{\left(x^3,x^4\right):\left(x^3\right)^2+\left(x^4\right)^2=1\right\} \end{aligned}$$

Ejercicio probar que el conjunto de las matrices 2×2 de números reales con determinante unidad es una variedad diferenciable.

Intentemos justificar el teorema, suponiendo que sus hipótesis (jacobiano de f no nulo para cualquier $P_0\in M$) se cumplen en el siguiente ejemplo de $k=1$:

$$M=\left\{\left(x^1\dots x^n\right)\in\mathbb{R}^n : f\left[x^1\dots x^n\right]=c\right\}$$

El gradiente (jacobiano) de la función es

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\dots\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\right|_{P_0\in M}\neq\mathbf{0}$$

Al menos una de las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x^i}\left[x^1\dots x^n\right]$ es no nula para que el rango del jacobiano sea máximo. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que es la n-ésima. Entonces existe un entorno V_0 del punto proyección de P_0 según la coordenada de derivada no nula,

$$Q_0\equiv\left(x_0^1\dots x_0^{n-1}\right)\in\mathbb{R}^{n-1}$$

y un entorno $(x_0^n-\delta, x_0^n+\delta)$ alrededor de x_0^n, tales que (figura 1.5):

1. existe $y\left[x^1\dots x^{n-1}\right]=x^n$ en V_0 tal que $f\left[x^1\dots x^{n-1},y\left[x^1\dots x^{n-1}\right]\right]=0$. Es decir, en un entorno del punto Q_0 y de x_0^n puedo despejar x^n en función del resto de variables: $y\left[x^1\dots x^{n-1}\right]=x^n$

2. $x_0^n=y\left[x_0^1\dots x_0^{n-1}\right]$

3. La distancia $\left|x_0^n-y\left[x_0^1\dots x_0^{n-1}\right]\right|\leq\delta$

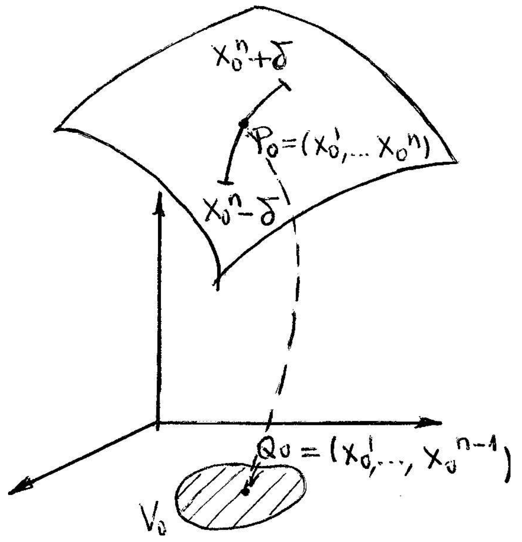


Figura 1.5: V_0 es un entorno del punto Q_0. Según la coordenada x^n tenemos un entorno de x_0^n.

4. Todas las soluciones en $V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ se pueden escribir como $x^n = y\left[x^1 \dots x^{n-1}\right]$

Es decir que en un entorno cilíndrico del punto podemos despejar la función (localmente).

1. Para definir la estructura de variedad topológica debemos encontrar para P_0 un (U, φ). U es simplemente el conjunto del cilindro abierto con M:

$$U \equiv (V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)) \cap M$$

un conjunto abierto por definición (topología inducida).

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow V_0 \subset \mathbb{R}^{n-1} \\ \left(x^1 \dots x^n\right) &\mapsto \left(x^1 \dots x^{n-1}\right) \end{aligned}$$

φ es la proyección. La inversa consiste en pasar de $(x^1 \dots x^{n-1})$ a $(x^1 \dots x^{n-1}, y\left[x^1 \dots x^{n-1}\right])$. Como esto lo podemos hacer para todo P podemos escoger un entorno como este para cualquier punto de la variedad, luego tenemos una familia de cartas que recubre toda la variedad, es decir, una estructura de variedad topológica.

2. Estudiemos ahora la compatibilidad entre cartas (estructura diferenciable). En una de ellas la derivada que no se anula es la i-ésima: (U_1, φ_1)

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \left(x^1 \dots x^n\right) &\mapsto \left(x^1 \dots x^{i-1}, x^{i+1}, \dots x^n\right) \end{aligned}$$

en otra carta: (U_2, φ_2), no se anula la n-ésima

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ \left(\hat{x}^1 \dots \hat{x}^n\right) &\mapsto \left(\hat{x}^1 \dots \hat{x}^{n-1}\right) \end{aligned}$$

El teorema de la función implícita asegura la *despejabilidad* local de una variable en todo caso; la global se alcanza si puede despejarse una variable en función de las demás (como en $4x^1 + 3x^2 = 1$) para todo $\mathbb{R}^n$ (en el ejemplo, $V_0 = \mathbb{R}^2$).
El cambio es

$$\begin{aligned}
x^1 &= \hat{x}^1 \\
&\vdots \\
x^{i-1} &= \hat{x}^{i-1} \\
x^{i+1} &= \hat{x}^{i+1} \\
&\vdots \\
x^{n-1} &= \hat{x}^{n-1} \\
x^n &= y\left[\hat{x}^1 \ldots \hat{x}^{n-1}\right]
\end{aligned}$$

el inverso es análogo pero con $\hat{x}_i = g\left[x^1 \ldots x^{i-1}, x^{i+1} \ldots x^n\right]$.

En conclusión

Después de aplicar el teorema de la función implícita con éxito sabemos que tenemos una variedad diferenciable, pero necesitamos todavía construir el atlas; el teorema no nos lo da, pero nos asegura que existe.

1.2.5. Método cortar y pegar: la banda de Möbius

Este sistema consiste en tomar ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ y pegarlos adecuadamente. Por ejemplo, la banda de Möbius se puede hacer pegando dos[2] subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. El problema es que sobre el punto en que se pega los puntos son los mismos, por lo que necesitaremos definir una relación de equivalencia. Sean las dos franjas cuya parametrización aparece en la figura 1.6

$$\begin{aligned}
S &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x < 5, -1 < y < 1\right\} \\
\hat{S} &= \left\{(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^2 : -5 < \hat{x} < 5, -1 < \hat{y} < 1\right\}
\end{aligned}$$

Para pegarlas debemos dar

1. unas zonas de solapamiento (que denotaremos por $T = T_1 \cup T_2$ para S y por $\hat{T} = \hat{T}_1 \cup \hat{T}_2$ para $\hat{S}$). La definición de una de ellas es, por ejemplo, $T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 < x < -4, -1 < y < 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x < 5, -1 < y < 1\right\}$ ($\hat{T}$ se define análogamente, sin más que poner gorros).

2. una forma de solapar (de identificar puntos).

[2] Aunque también se puede hacer con un sólo subconjunto el ejemplo lo desarrollaremos con dos.

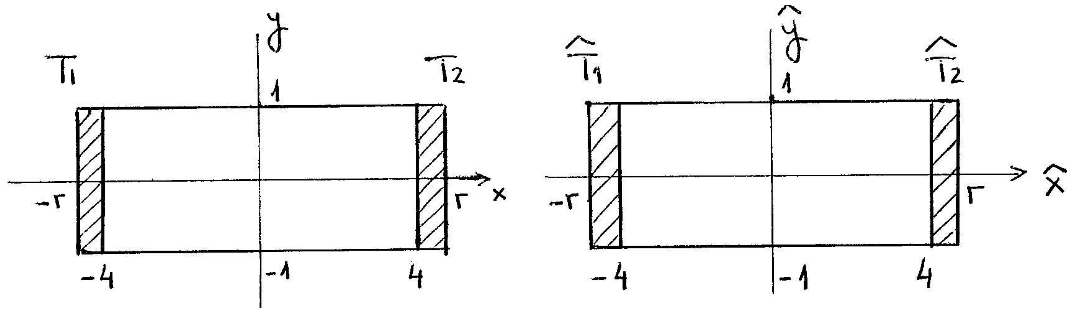


Figura 1.6: Parametrización de las bandas S y $\hat{S}$, que vamos a pegar.

Por el interior (centro de la figura 1.6) pegamos tal cual, de forma que el -5 vaya a parar al 4 y el -4 al 5. Por el exterior la otra haremos lo mismo, pero pasando de y a $-y$ (es el momento de coger una cinta de papel e intentar verlo). Las aplicaciones correspondientes son

$$\begin{aligned} R_{12} : T_1 &\rightarrow \hat{T}_2 \\ (x, y) &\mapsto (\hat{x} = x + 9,\, \hat{y} = -y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_{21} : T_2 &\rightarrow \hat{T}_1 \\ (x, y) &\mapsto (\hat{x} = x - 9,\, \hat{y} = y) \end{aligned}$$

denotamos por R a la aplicación simultánea de estas dos funciones.

El conjunto M

¿Cuáles son los puntos de la variedad?.

- Un punto que en S es equivalente a uno de $\hat{S}$ si está relacionado por la relación de "pegado" que acabamos de dar, R. Si $p \in S$, $p \in T$, $q \in \hat{S}$ entonces

  $$p \sim q \Leftrightarrow q = R\,[p]$$

  (p y q son equivalentes si y sólo si q es la imagen bajo R de p). Análogamente, en caso de que $q \in \hat{S}$, $q \in \hat{T}$, $p \in S$

  $$q \sim p \Leftrightarrow q = R^{-1}\,[p]$$

- De los puntos que no están en $T, \hat{T}$, un punto de S es equivalente a sí mismo, al igual que uno de $\hat{S}$ (clase de equivalencia con un sólo miembro). Si $p, p' \in S$ y $p \notin T$

  $$p \sim p' \Leftrightarrow p = p'$$

  Si $q, q' \in \hat{S}$ y $q \notin \hat{T}$

  $$q \sim q' \Leftrightarrow q = q'$$

En resumen, las clases de equivalencia en las zonas de solapamiento están constituidas por dos miembros: un punto y su transformado bajo R.

$$\begin{aligned} p \in S, p \notin T &\Rightarrow [p] = p \\ p \in S, p \in T &\Rightarrow [p] = (p, \hat{p} = R[p]) \end{aligned}$$

y análogamente para $\hat{S}$ y $\hat{T}$. Definimos U como las clases de equivalencia de S y $\hat{U}$ como las de $\hat{S}$, con lo que el conjunto "banda de Möbius" es $M = U \cup \hat{U}$. Así dado M, es necesario introducir estructura topológica para él con todos los requisitos y una estructura diferenciable (cartas compatibles).

La estructura topológica

Las aplicaciones de carta pueden ser

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow S \in \mathbb{R}^2 \\ [p] &\mapsto p \\ \hat{\varphi} : \hat{U} &\rightarrow \hat{S} \in \mathbb{R}^2 \\ [q] &\mapsto q \end{aligned}$$

Disponemos ya de las cartas, (U, φ) y $(\hat{U}, \hat{\varphi})$.

Dado $V \subset M$ queremos saber si es un conjunto abierto. Tres situaciones: que esté contenido en $U, \hat{U}$ o una parte en cada uno.

1. Si $V \subset U$ decimos que V es abierto si $\varphi[V]$ es abierto. En particular U es abierto por construcción.
2. Si $V \subset \hat{U}$ decimos que V es abierto si $\hat{\varphi}[V]$ es abierto. En particular $\hat{U}$ es abierto por construcción.
3. Si V no está íntegramente contenido ni en U ni en $\hat{U}$ decimos que es abierto si $\varphi[V \cap U]$ es abierto y $\varphi\left[V \cap \hat{U}\right]$ es abierto.

Por esta construcción $U, \hat{U}$ son abiertos y φ y $\hat{\varphi}$ transforman conjuntos abiertos en abiertos, así como sus inversas, por lo que son continuas (las aplicaciones de carta son homeomorfismos).$\{(U, \varphi), (\hat{U}, \hat{\varphi})\}$ conforma estructura de variedad topológica compuesta por dos cartas. Habría que ver si es Haussdorf y separable, pero no vamos a hacerlo[3].

La estructura diferenciable

Lo que sí vamos a comprobar es si las cartas son $\mathcal{C}^\infty$ compatibles, estudiando las aplicaciones de carta $\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi\left[U \cap \hat{U}\right] = T$ y $\varphi \circ \hat{\varphi}^{-1}$ en $\hat{\varphi}\left[U \cap \hat{U}\right] = \hat{T}$. Pero la

[3] Para intentarlo como ejercicio es bueno saber primero que se encontrarán dificultades para probar el carácter Haussdorf.

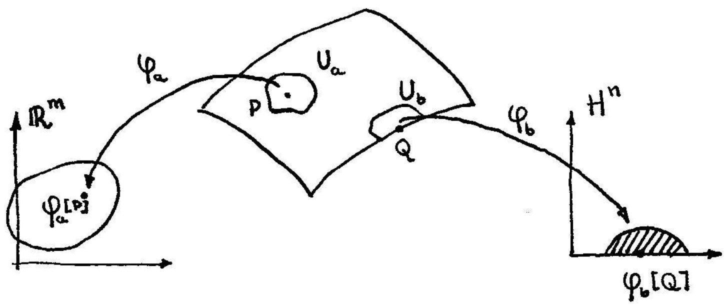


Figura 1.7: Superficie en $\mathbb{R}^3$, los puntos del interior van a $\mathbb{R}^n$ mientras que los de la frontera van a H^n

aplicación que nos lleva justamente de la zona de solapamiento de S a la de $\hat{S}$ es R, luego

$$\begin{aligned} R &= \hat{\varphi} \circ \varphi^{-1} \\ R^{-1} &= \varphi \circ \hat{\varphi}^{-1} \end{aligned}$$

Como estos cambios son lineales, son $\mathcal{C}^\infty$. Por tanto tenemos un atlas $\mathcal{C}^\infty$ sobre una variedad topológica, por lo que queda definida de manera única una estructura de variedad diferenciable sobre la banda de Möbius.

1.2.6. Variedades con frontera

Lo que hemos visto hasta ahora es lo que se conoce como variedades diferenciables *sin frontera.* Una variedad con frontera es por ejemplo la semiesfera,

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0\right\}$$

Esto no es una variedad diferenciable según los criterios que tenemos hasta ahora. ¿Qué hacer?

Tendremos dos tipos de cartas, a y b (figura 1.7):

- a : aquellas cuya imagen es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ (puntos interiores de la variedad).
- b : aquellas cuya imagen es subconjunto abierto de $H^m = \left\{\left(x^1 \dots x^m\right) \in \mathbb{R}^m : x^m \geq 0\right\}$. La topología en H^m será la inducida de $\mathbb{R}^m$, por el método de las intersecciones ya visto. Los puntos de la frontera van a parar a un conjunto de dimensión $m-1$, pero los de su entorno, necesarios para definir la aplicación de carta, van a H^m, **no** a $\mathbb{R}^m$, porque allí la imagen no sería un conjunto abierto: si P está en la frontera ∂H^m, $\varphi_b[Q] \in \partial H^m = \left\{x^1 \dots x^m : x^m = 0\right\}$. Los abiertos de H^m no son los de $\mathbb{R}^m$. Son abiertos en la medida en que puedo encontrar un abierto en $\mathbb{R}^m$ tal que su intersección con H^m es un abierto.

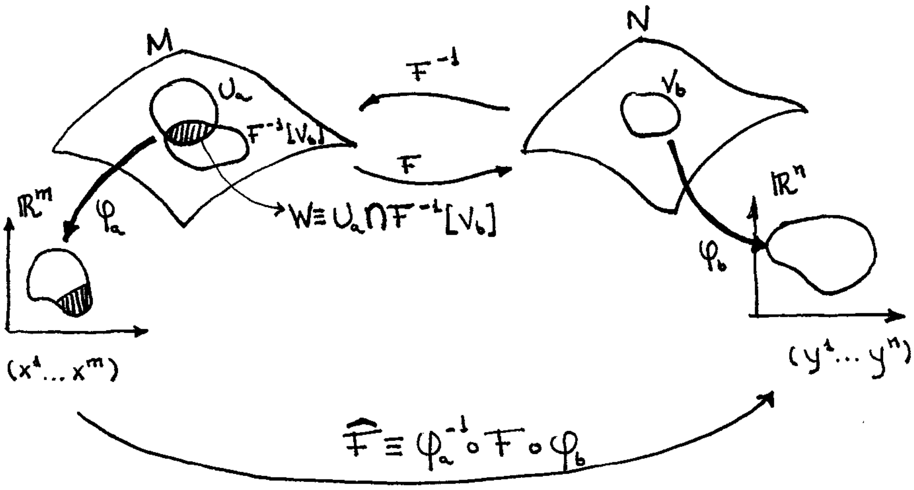


Figura 1.8: Cambio de dominio necesario para generalizar el concepto de aplicación diferenciable.

Aunque parezca que el subconjunto de H^m "imagen de un entorno de la frontera de M" es cerrado, porque incluye la imagen de la frontera, no lo es por ser la topología inducida. Es necesario construir un atlas de cartas compatibles para llegar de espacio topológico Haussdorf y separable a variedad diferenciable con frontera.

1.3. Generalización del cálculo de $\mathbb{R}^m$

Para poder hacer cálculo vectorial como en $\mathbb{R}^m$ debemos servirnos de la estructura diferenciable. En el contexto de $\mathbb{R}^m$ sabíamos qué era una aplicación diferenciable; en breve comprobaremos que es posible generalizarlo y saber qué se entiende por aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables. Análogamente nos preocupará encontrar definiciones de vector tangente a la variedad en un punto y de campo de vectores que sean independientes de que la variedad esté dotada de una métrica o no, es decir, que descansen exclusivamente sobre su estructura diferenciable.

1.3.1. Aplicaciones diferenciables

Imaginemos una variedad diferencial M de dimensión m dotada de un atlas $\{(U_a, \varphi_a)\}_a$, y una variedad diferenciable N, de dimensión n, con su atlas $\{(V_b, \psi_b)\}_b$. Sea una aplicación $F : M \to N$. ¿Cómo saber si es diferenciable?. Podemos decir que F es diferenciable si lo es una aplicación construida a partir de F que vaya de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$, que llamaremos $\hat{F}$. Para eso (figura 1.8) subimos de $\mathbb{R}^m$ a M por φ^{-1}, pasamos por F a N y de ahí bajamos a $\mathbb{R}^n$ por ψ:

$$\begin{array}{rcl}\hat{F} \equiv \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ \left(x^1 \ldots x^m\right) & \mapsto & \left(y^1 \left[x^1 \ldots x^m\right] \ldots y^n \left[x^1 \ldots x^m\right]\right)\end{array}$$

ahora podríamos decir "estudio la diferenciabilidad de esto y ya está". Pero no. Hay que tener cuidado con los dominios de definición: puede que F no lleve todos los puntos de U_a a V_b sino que mande algunos a otra parte. El dominio para que F sea función es $F^{-1}[V_b]$, que en intersección con el entorno de coordenadas U_a denotamos

$$W = U \cap F^{-1}[V]$$

El dominio de $\hat{F}$ es $\varphi[W]$.

En conclusión, diremos que F es $\mathcal{C}^\infty$ si su expresión en coordenadas para cualquier par de atlas es una aplicación diferenciable (el dominio debe ser correcto para que $\hat{F}$ sea considerada una aplicación).

aplicación diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ entre variedades Sea $F : M \to N$ continua. Si F es continua, F^{-1} transforma abiertos en abiertos. ¿Cómo saber si F es aplicación y diferenciable?. Reducimos el problema al de ir de subespacios de R^m a R^n. La expresión en coordenadas de F para las cartas (U, φ) de M y (V, ψ) de N es

$$\begin{array}{rcl}\hat{F} : \varphi[W] \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \psi[V] \subset \mathbb{R}^n \\ \left(x^1 \ldots x^m\right) & \mapsto & \left(y^1 \left[x^1 \ldots x^m\right] \ldots y^n \left[x^1 \ldots x^m\right]\right)\end{array}$$

Se dice que F es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si para cualesquiera dos cartas de las estructuras diferenciables de M y N su expresión en las coordenadas dadas por ellas (la de todas sus componentes, $y^1 \ldots y^n$) es una función $\mathcal{C}^\infty$.

No se puede comprobar para todas las cartas admisibles, pero afortunadamente existe un resultado que afirma que basta con tomar dos atlas, no necesariamente máximos, y probar que la aplicación de una carta es $\mathcal{C}^\infty$ (porque la estructura diferenciable garantiza la compatibilidad entre cartas).

Sean dos cartas en M, (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2), con los sistemas de coordenadas respectivos $x^1 \ldots x^m$ y $\hat{x}^1 \ldots \hat{x}^m$, y una carta (V, ψ) para N. Construimos dos expresiones en coordenadas de F que usan cada una una carta de M:

$$\begin{array}{rcl}\hat{F}_1 \equiv \psi \circ F \circ \varphi_1^{-1} : M & \to & N \\ \hat{F}_2 \equiv \psi \circ F \circ \varphi_2^{-1} : M & \to & N\end{array}$$

entonces

$$\begin{array}{rcl}\hat{F}_1 & = & \hat{F}_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \\ & = & \psi \circ F \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\end{array}$$

con el dominio dado por $\varphi_1[W]$, $W = U_1 \cap U_2 \cap F^{-1}[V]$.

Para saber que F es diferenciable han de verificarse tres condiciones: que ambas $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ sean $\mathcal{C}^\infty$ y que el cambio de coordenadas de una a otra también lo sea, lo que queda garantizado por el hecho de que en una variedad diferenciable, según la definición dada, todas las cartas (y en particular 1 y 2) son $\mathcal{C}^\infty$ compatibles.

Ejemplo Sea una una aplicación $F : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ tal que para $\mathbb{S}^3$ disponemos de un atlas con 4 cartas y para $\mathbb{S}^2$ de uno con 3. El procedimiento para probar la diferenciabilidad de F en un punto es comprobar que la expresión en coordenadas es $\mathcal{C}^\infty$ en dicho punto. Para ello basta con estudiar un par de las cartas compatibles que incluyen ese punto.

Esta definición es importante porque nos permite introducir otras estructuras. Entre ellas nos permite definir un cierto tipo de equivalencia entre variedades diferenciables.

1.3.2. Equivalencia de variedades diferenciales

¿Cuándo podemos decir que las propiedades diferenciables de dos variedades son equivalentes?. Estamos buscando un concepto análogo a la equivalencia topológica de dos variedades que viene dada por una aplicación.

difeomorfismo Sean M y N dos variedades diferenciables $\mathcal{C}^\infty$ y $F : M \to N$ una aplicación biyectiva. Se dice que F es un difeomorfismo entre M y N si F y F^{-1} son $\mathcal{C}^\infty$.

Dos variedades son difeomorfas si existe un difeomorfismo entre ellas. Todas sus propiedades diferenciables son las mismas, y también la dimensión. Son, esencialmente, la misma variedad.

1.3.3. Subvariedades diferenciables

subvariedad diferenciable de una variedad diferenciable. Sean M y N variedades diferenciables $\mathcal{C}^\infty$ de dimensiones respectivas m, n, con $m \geq n$. Se dice que N es una subvariedad de M si existe una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ $j : N \to M$ tal que el rango de la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas de j para cualesquiera par de cartas de N y M para cualquier punto $P \in N$ es máximo.

En la figura 1.9 se representa la acción de $\hat{j}$ sobre las coordenadas de $P \in U_a$,

$$\begin{aligned} \hat{j} \equiv \psi_b \circ j \circ \varphi_a : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \left(x^1 \dots x^n\right) &\mapsto \left(y^1 \left[x^1 \dots x^n\right] \dots y^m \left[x^1 \dots x^n\right]\right) \end{aligned}$$

cuya matriz jacobiana es

$$\mathsf{J}\left[\hat{j}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

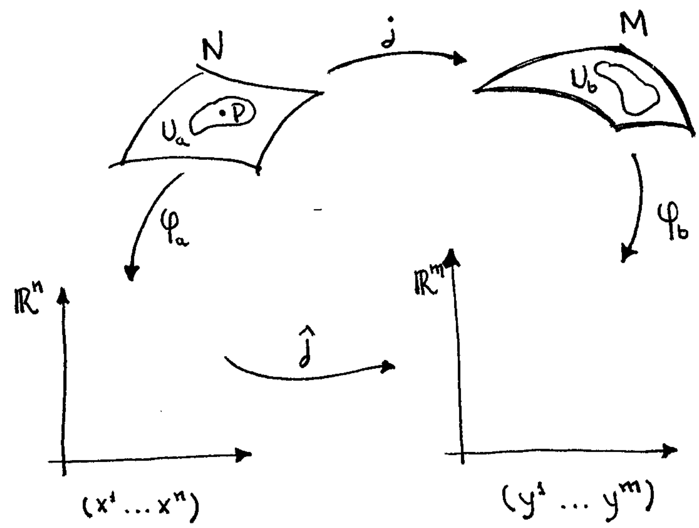


Figura 1.9: N es una subvariedad de M.

Tomar un $N \not\subset M$ e identificarlo con un subconjunto de M constituye un proceso llamado de *inmersión* (*embedding*). Un ejemplo de este proceso es sumergir el conjunto $N \equiv \mathbb{S}^2$ en $M \equiv \mathbb{R}^3$.

Podríamos, pero no lo vamos a hacer, generalizar el resultado de "defina su propia subvariedad en la variedad que usted quiera mediante ecuaciones", que ya presentamos (en la página 10) para definir variedades inmersas en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos Las curvas y superficies que conocemos hasta ahora son variedades diferenciables dentro de $M \equiv \mathbb{R}^3$. Del mismo modo los subgrupos de Lie son subvariedades de los grupos de Lie.

1.3.4. Curvas sobre la variedad

La siguiente definición resulta útil para definir vectores tangentes o flujos de campos vectoriales sobre variedades.

curva parametrizada en una variedad $\mathcal{C}^\infty$ Una curva parametrizada γ en una variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ M es una función $\mathcal{C}^\infty$ de un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en M tal que se puede extender a un intervalo abierto que contenga $[a, b]$ manteniendo el carácter $\mathcal{C}^\infty$. Véase la figura 1.10.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} & \rightarrow & M \\ t & \mapsto & P \end{array} \tag{1.2}$$

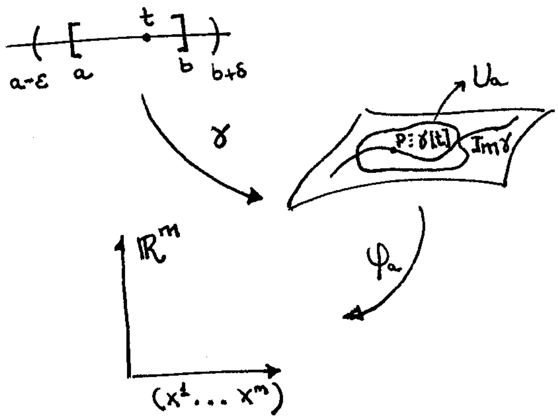


Figura 1.10: Curva parametrizada sobre una variedad.

¿Por qué esa última condición?. Queremos que la curva sea $\mathcal{C}^\infty$ y no podemos garantizarlo para un intervalo cerrado, que tenga *extremos*[4] a, b. En un intervalo cerrado no se puede establecer que γ es $\mathcal{C}^\infty$ alrededor de a o b porque no se dispone de entornos alrededor para definir las derivadas *por ambos lados*.

La aplicación γ nos proporciona el dibujo de la curva (Im $[\gamma]$) y la forma de recorrerlo. Si cambiamos el dominio de definición tendremos otra curva parametrizada: una curva parametrizada es la aplicación, los puntos y cómo se recorren. Podemos preguntarnos si el conjunto de puntos que obtenemos mediante γ admite otras parametrizaciones y si éstas son equivalentes o no, y definir una clase de equivalencia con las parametrizaciones admisibles, para considerar iguales una serie de curvas que tienen la misma imagen, aunque la parametrización sea diferente.

Esta definición depende únicamente de la estructura diferenciable; no depende de ningún concepto métrico como *ángulo* o *distancia*.

1.4. Vectores tangentes

Nuestro objetivo en esta sección es generalizar el concepto de vector tangente ya conocido en $\mathbb{R}^m$ y superficies a variedades. Gracias exclusivamente a la estructura diferenciable que toda variedad proporciona podremos definir vectores tangentes a la variedad en cada punto. El concepto de vector tangente será fundamento para definir campos vectoriales y tensoriales sobre variedades, por lo que es importante entenderlo bien.

[4] Podemos entender la curva como una subvariedad con frontera.

1.4.1. Definición

Para empezar con algo sencillo, supongamos que la variedad en que queremos definir los vectores tangentes es $\mathbb{R}^3$.

- Tradicionalmente, en una determinada base, $\mathsf{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$ indica cierta dirección en el espacio.
- Pero esto no podemos llevarlo a la variedad, porque en ella no disponemos ni de módulos ni de ángulos, al no tener métrica. Otra interpretación del concepto de vector consiste en entender v como un operador que toma una función definida en un entorno del punto P y produce un número real: la *derivada direccional de f en el punto P*.
$$\mathsf{v}\left[f\right] = \left(v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}\right)_P$$
Esta interpretación sólo depende de la estructura diferenciable en $\mathbb{R}^3$, que es todo lo que tenemos y es por tanto un buen punto de partida para la generalización a otras variedades diferenciables. v es un operador que actúa sobre funciones f pero es importante resaltar que se ejecuta sobre un punto, es decir, v *aplicado sobre f en P*.

Ambas interpretaciones son equivalentes. Debe tenerse en cuenta que la segunda es válida para toda función f en el dominio. Pero ¿cuál es ese dominio de v como operador?. Se trata del conjunto de funciones $\mathcal{C}^\infty$ del tipo

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto y = f\left[P\right] \end{aligned}$$

Este conjunto se denomina $\mathcal{F}^\infty\left[M\right]$, o $\mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$ para funciones definidas[5] en un entorno de $P \in M$ en lugar de en todo M.

La expresión en coordenadas de f, para un punto P en una carta cualquiera (U, φ) es (ver figura 1.11)

$$\begin{aligned} \hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ \left(x^1 \dots x^m\right) &\mapsto y = \hat{f}\left[x^1 \dots x^m\right] \end{aligned}$$

vector tangente a M en P Un vector tangente a la variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ M en el punto P es un operador que a cada $f \in \mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$ le hace corresponder un número real $\mathsf{v}\left[f\right]$ y tal que:

1. es lineal: $\mathsf{v}\left[af + bg\right] = a\mathsf{v}\left[f\right] + b\mathsf{v}\left[g\right]\ \forall\ f, g \in \mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$ y $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2. cumple la regla de Leibniz: $\mathsf{v}\left[fg\right] = \mathsf{v}\left[f\right] g\left[P\right] + f\left[P\right] \mathsf{v}\left[g\right]$.

[5] A partir de ahora salvo indicación en contrario todas las funciones que aparezcan como argumento de estos vectores se supondrán pertenecientes a $\mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$.

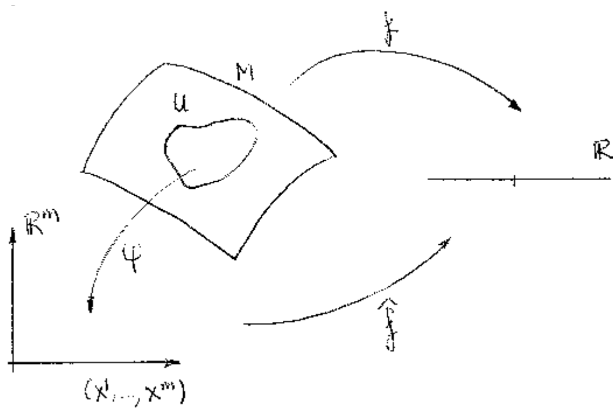


Figura 1.11: La expresión de coordenadas de $f \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$ en la carta (U,φ) es $\hat{f}$.

Cualquier operador que satisface estas dos propiedades se denomina una *derivación* (el ejemplo más conocido es probablemente la derivada de una función real de variable real).

En cartesianas, por ejemplo, entendemos $\left(v^1, v^2, v^3\right)$ como $v^1(1,0,0) + v^2(0,1,0) + v^3(0,0,1)$; En lo sucesivo lo entenderemos como

$$\mathsf{v}[\square] = v^1 \frac{\partial \hat{\square}}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \hat{\square}}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \hat{\square}}{\partial x^3}$$

Donde en el cuadro se puede poner cualquier función (recuérdese que v es un operador). El gorro indica que el argumento del vector no será exactamente una función (entre M y $\mathbb{R}$) sino su expresión en coordenadas a través de una carta (entre $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}$).

Comprobemos que

$$\mathsf{v}[f] = v^i \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]}$$

cumple las propiedades exigidas por la definición operacional

1. Linealidad

$$\begin{aligned}
\mathsf{v}[af+bg] &= v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\widehat{af+bg}\right]\right|_{\varphi[P]} \\
&= v^i\, a \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} + v^i\, b \left.\frac{\partial \hat{g}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} \\
&= a\mathsf{v}[f] + b\mathsf{v}[g]
\end{aligned}$$

2. Leibniz

$$\begin{aligned}
\mathsf{v}[fg] &= v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\widehat{fg}\right]\Big|_{\varphi[P]} \\
&= v^i \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\Big|_{\varphi[P]} \hat{g}[\varphi[P]] + \hat{f}[\varphi[P]]\, v^i \frac{\partial \hat{g}}{\partial x^i}\Big|_{\varphi[P]} \\
&= \mathsf{v}[f]\, g[P] + f[P]\, \mathsf{v}[g]
\end{aligned}$$

1.4.2. Espacio de los vectores tangentes

Vamos a ver que el conjunto de los vectores tangentes a la variedad en un determinado punto puede ser dotado de una estructura de espacio lineal, confirmando el uso hipotético de la palabra *vector* que hemos hecho hasta ahora para referirnos a sus elementos.

Combinaciones lineales de vectores tangentes

Sean v y w vectores tangentes a M en P con $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumple[6]

$$(a\mathsf{v} + b\mathsf{w})[f] = a\mathsf{v}[f] + b\mathsf{w}[f]$$

Base del espacio tangente

Dada una carta

$$\begin{aligned}
\varphi : U \subset M &\to \mathbb{R}^m \\
P &\mapsto (x_1 \dots x_m)
\end{aligned}$$

definimos

$$\mathsf{e}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi[P]}$$

con $i = 1 \dots m$ para funciones $f \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$. Vamos a demostrar que todo vector tangente se puede expresar como combinación lineal de vectores e_i linealmente independientes, es decir, que $\{\mathsf{e}_i\}_{i=1\dots m}$ es una base del espacio tangente a M en P. Nótese que la dimensión del espacio tangente es la misma que la de la variedad, ya que existen m coordenadas a lo largo de las que derivar, y por tanto m elementos en la base.

El vector expresado como combinación lineal de los operadores de la base, con coeficientes $v^i \in \mathbb{R}$ es

$$\begin{aligned}
\mathsf{v} &= \sum_{i=1}^m v^i \mathsf{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\varphi[P]}
\end{aligned}$$

[6] Nótese como, al igual que en la mayoría de los cursos de álgebra y según costumbre, denotamos por el mismo signo $(+)$ a dos operaciones esencialmente distintas, a saber, la suma de vectores $a\mathsf{v}$ y $b\mathsf{w}$ y la suma de escalares del cuerpo $(\mathbb{R})$, $a\mathsf{v}[f]$ y $b\mathsf{w}[f]$.

Cuando actúa sobre una función y usando el convenio de índices repetidos (de Einstein) se escribe

$$\mathsf{v}[f] = v^i \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]}$$

La expresión anterior establece la relación entre la definición clásica en geometría diferencial (definición en coordenadas) y la definición intrínseca de vector tangente v.

Actuación de los vectores tangentes sobre funciones constantes

Sean $c, f, g \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$. Vamos a mostrar utilizando la linealidad de v que si c es función constante entonces $\mathsf{v}[c] = 0$:

1. $\mathsf{v}[0] = 0$. Prueba:
$$\mathsf{v}[af + bg] = a\mathsf{v}[f] + b\mathsf{v}[g]$$
ya que $f = 0$ y $g = 0$
$$\mathsf{v}[0] = (a + b)\,\mathsf{v}[0]$$
como debe cumplirse $\forall a, b \in \mathbb{R}$ es necesario que $\mathsf{v}[0] = 0$.

2. $\mathsf{v}[1] = 0$. Prueba:
$$\mathsf{v}[fg] = \mathsf{v}[f]\,g + f\mathsf{v}[g]$$
con $f = 1, g = 1$
$$\begin{aligned} \mathsf{v}[1] &= \mathsf{v}[1] + \mathsf{v}[1] \\ &= 2\mathsf{v}[1] \end{aligned}$$
de donde $\mathsf{v}[1] = 0$.

3. $\mathsf{v}[c] = 0$. Prueba:
$$\begin{aligned} \mathsf{v}[c] &= \mathsf{v}[c \times 1] \\ &= c\mathsf{v}[1] \end{aligned}$$
necesariamente $\mathsf{v}[c] = 0$.

Definimos las funciones que se muestran en la figura 1.12. A partir de

$$\begin{aligned} u^i : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ \left(x^1 \dots x^m\right) &\mapsto x^i \end{aligned} \tag{1.3}$$

se construye φ^i por composición con la aplicación de carta

$$\begin{aligned} \varphi^i = u^i \circ \varphi : M &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto x^i \end{aligned} \tag{1.4}$$

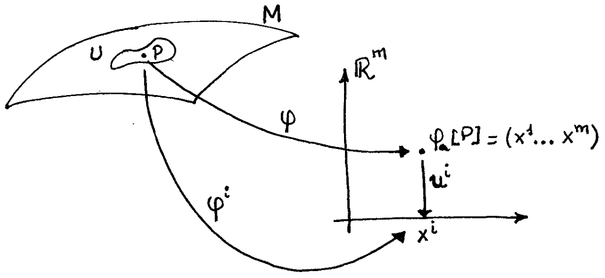


Figura 1.12: Definición de las proyecciones u^i: $\varphi^i = \left(u^i \circ \varphi\right)[P]$.

que es la función que selecciona la coordenada i-ésima en $\mathbb{R}^m$ a partir del punto P en la variedad. Por definición, $\varphi^i \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$.

Sea P' un punto en el entorno de P y φ la su aplicación de carta. Según el teorema del valor medio, existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned} f[P'] &= \hat{f}[\varphi[P']] \\ &= \hat{f}[\varphi[P]] + \sum_{i=1}^{m} \left(\varphi^i[P'] - \varphi^i[P]\right) \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} + \xi\left(\varphi[P'] - \varphi[P]\right) \end{aligned}$$

Si $\varphi[P'] = (x^{1'} \dots x^{m'})$ y $\varphi[P] = \left(x^1 \dots x^m\right)$ relajando la notación obtenemos la siguiente expresión, que refleja mejor cómo hemos aplicado el teorema de valor medio:

$$\hat{f}\left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] = \hat{f}\left[x^1 \dots x^m\right] + \sum_{i=1}^{m} \left(x^{i'} - x^i\right) \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}'+s(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}$$

Vamos ahora a ver la actuación de v sobre f así desarrollada en P', utilizando sus propiedades de linealidad y Leibniz:

$$\mathsf{v}[f] = \mathsf{v}\left[\hat{f}[\varphi[P]]\right] + \sum_{i=1}^{m} \mathsf{v}\left[\varphi^i[P'] - \varphi^i[P]\right] \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} + \sum_{i=1}^{m} \left(\varphi^i[P'] - \varphi^i[P]\right)\big|_P \, \mathsf{v}\left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right]$$

El último término se anula (en $P' = P$). El primer término también se anula, por ser el argumento del operador una función constante.

$$\begin{aligned}
\mathsf{v}[f] &= \sum_{i=1}^{m} \mathsf{v}\left[\varphi^i\left[P'\right] - \varphi^i\left[P\right]\right] \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\mathsf{v}\left[\varphi^i\left[P'\right]\right] - \mathsf{v}\left[\varphi^i\left[P\right]\right]\right) \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mathsf{v}\left[\varphi^i\left[P'\right]\right] \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} \\
&= \sum_{i=1}^{m} v^i \mathsf{e}_i\left[f\right]
\end{aligned}$$

Cualquier vector tangente se puede escribir como conjunto de números reales v^i multiplicados por su $\frac{\partial}{\partial x^i}$ correspondiente; como habíamos dicho antes, una combinación lineal de los e_i de la variedad en P.

Para todo vector v perteneciente al espacio tangente a M en el punto P $(T_P\left[M\right])$,

$$\mathsf{v} = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]}$$

por tanto

$$\left\{ \mathsf{e}_i \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} \right\}_{i=1\ldots m} \tag{1.5}$$

es la base natural[7] de los vectores tangentes a la variedad M en P asociada al sistema de coordenadas $\left(x^1 \ldots x^m\right)$ dado por la carta (U, φ).

Cambio de coordenadas

Si un punto está cubierto por dos cartas, (U_a, φ_a) y (U_b, φ_b) ¿cuál es la relación entre las dos bases naturales del espacio tangente (figura 1.13)?. En virtud de la existencia de dos cartas tenemos dos expresiones para un vector tangente a M en P:

$$\begin{aligned}
\mathsf{v} &= v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \\
&= v^{i'} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]}
\end{aligned}$$

[7]Se dice natural porque las derivadas son respecto a las coordenadas de la carta. Para cada punto contamos con una base natural por cada carta que lo incluye.

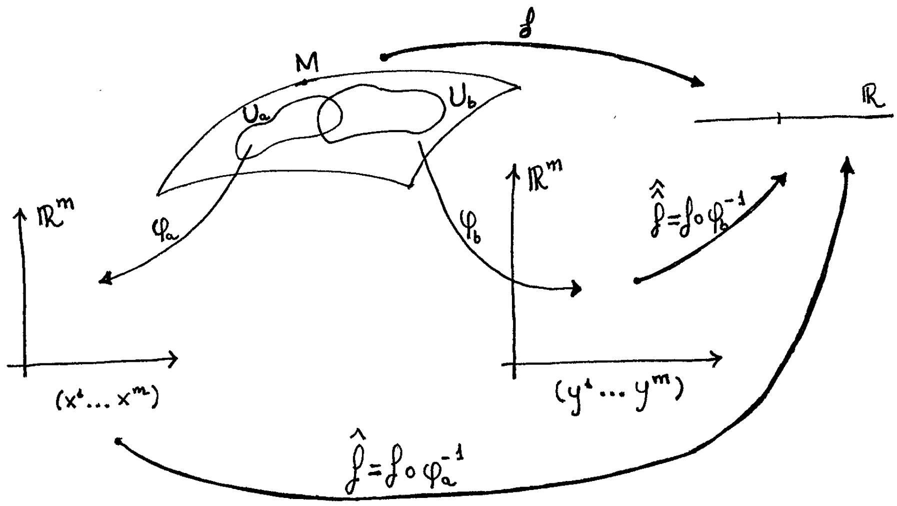


Figura 1.13: Cambio de coordenadas del vector tangente. $\hat{f} = f\circ\varphi_a^{-1}, \hat{\hat{f}} = f\circ\varphi_b^{-1}, \hat{f} = \hat{\hat{f}}\circ\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}$

Queremos ver la relación entre los dos conjuntos de coeficientes de la base, v^i y $v^{i'}$. Para ello aplicamos v sobre f en los dos sistemas de coordenadas:

$$\begin{aligned} \mathsf{v}[f] &= v^i \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \\ &= v^{i'} \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]} \end{aligned}$$

y relacionamos $\hat{\hat{f}}$ con $\hat{f}$:

$$\begin{aligned} \hat{f} &= f\circ\varphi_a^{-1} \\ \hat{\hat{f}} &= f\circ\varphi_b^{-1} \\ \hat{f} &= \hat{\hat{f}}\circ\varphi_b\circ\varphi_a^{-1} \end{aligned}$$

pero $\varphi_b\circ\varphi_a^{-1}$ es el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} \varphi_b\circ\varphi_a^{-1}:\mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^m \\ \left(x^1\dots x^m\right) &\mapsto \left(x^{1'}\left[x^1\dots x^m\right]\dots x^{m'}\left[x^1\dots x^m\right]\right) \end{aligned}$$

por tanto

$$\hat{f}\left[x^1\dots x^m\right] = \hat{\hat{f}}\left[x^{1'}\left[x^1\dots x^m\right]\dots x^{m'}\left[x^1\dots x^m\right]\right]$$

así que

$$
\begin{aligned}
\mathsf{v}[f] &= v^i \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \\
&= v^i \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}\left[x^{1'}\left[x^1 \ldots x^m\right] \ldots x^{m'}\left[x^1 \ldots x^m\right]\right]}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]}
\end{aligned}
$$

y por la regla de la cadena

$$
\begin{aligned}
\mathsf{v}[f] &= v^i \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]} \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \\
&= v^i \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]} \\
&= v^{i'} \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]}
\end{aligned}
$$

de donde el cambio de coordenadas para v es:

$$
v^{i'} = v^i \left.\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]} \tag{1.6}
$$

o bien, poniendo $\hat{\hat{f}}$ en función de f

$$
v^i = v^{i'} \left.\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[P]}
$$

Ya que $\hat{\hat{f}} = \hat{f} \circ \varphi_a \circ \varphi_b^{-1}$.

Se define un vector a la manera clásica como conjunto de coordenadas según la base y su modo de transformarse. Es una definición buena porque es muy práctica. Ahora daremos una definición distinta.

1.4.3. Vectores como clases de equivalencia de curvas

En este apartado damos una definición de vector a partir del concepto de clase de equivalencia de curvas.

Dos curvas son equivalentes en un punto si las derivadas de cualquier función a lo largo de ellas coinciden en ese punto. Se puede definir también el vector tangente en un punto como la clase de equivalencia de curvas que pasan por ese punto (figura 1.14).

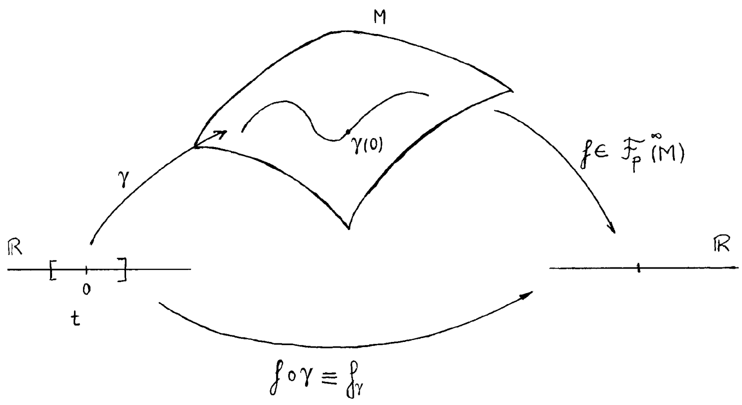


Figura 1.14: Definición de vector tangente como clase de equivalencia de curvas. f_γ es una función de M restringida a γ.

El punto P se escribe como $P = \gamma[0]$, la aplicación de la curva evaluada en $t = 0$. Una función sobre la variedad restringida a puntos de la curva se expresa así:

$$\begin{aligned} f_\gamma \equiv f \circ \gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \quad &\to \quad \mathbb{R} \\ t \quad &\mapsto \quad f_\gamma[t] \end{aligned}$$

la derivada de la función en P a lo largo de la curva parametrizada es

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_\gamma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

equivalencia de curvas se dice que dos curvas son equivalentes y se nota $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si y sólo si $\forall f \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$ y $\gamma_1[0] = \gamma_2[0] = P$ se cumple

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_{\gamma_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f_{\gamma_2}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}$$

En $\mathbb{R}^m$ esto es como decir que ambas curvas son tangentes (comparten el mismo vector tangente).

El vector tangente es el conjunto de curvas de la clase de equivalencia $[\gamma]$ en el punto dado. Esta definición es equivalente a la definición en coordenadas (clásica) de vector tangente,$\mathsf{v} \Leftrightarrow [\gamma]$. Para asignar mediante la clase de equivalencia a cada función un número real y así reproducir el comportamiento de v, simplemente basta con tomar

$$\mathsf{v}[f] = \left.\frac{\mathrm{d}f_\gamma}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

la derivada de la función a lo largo de *cualquier* curva γ de la clase de equivalencia $[\gamma]$. Por eso hemos identificado el vector con todas las curvas que a estos efectos nos dan el mismo número, y no con una en particular. Hay que comprobar que con esta nueva definición también se cumplen las propiedades de linealidad y de la regla de Leibniz.

1. Linealidad:

$$\begin{aligned} \mathsf{v}\left[af+bg\right] &= \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[af+bg\right]_{\gamma}\right)\right|_{t=0} \\ &= a\left.\frac{\mathrm{d}f_{\gamma}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}+b\left.\frac{\mathrm{d}g_{\gamma}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= a\mathsf{v}\left[f\right]+b\mathsf{v}\left[g\right] \end{aligned}$$

2. Leibniz:

$$\begin{aligned} \mathsf{v}\left[fg\right] &= \left.\frac{\mathrm{d}\left[\left(fg\right)_{\gamma}\right]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}f_{\gamma}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g_{\gamma}\left[t=0\right]+f_{\gamma}\left[t=0\right]\left.\frac{\mathrm{d}g_{\gamma}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ &= \mathsf{v}\left[f\right]g\left[P\right]+f\left[P\right]\mathsf{v}\left[g\right] \end{aligned}$$

Esta nueva definición es más interesante desde el punto de vista geométrico, aunque conduce a cálculos más complicados.

Hasta aquí hemos considerado tres definiciones del vector tangente:

- Operacional intrínseca.
- En coordenadas.
- Como clase de equivalencia de curvas (geométrica–intuitiva).

1.5. Diferencial de una función

Podemos intentar generalizar la idea de diferencial de una función entre dos variedades diferenciables. Una interpretación geométrica de este objeto es que del mismo modo que F (figura 1.15) transforma un punto de M en un punto de N, $\mathcal{D}F$ transforma vectores tangentes de M en vectores tangentes de N.

Podemos utilizar la definición de vector tangente como clase de equivalencia de curvas. Al actuar mediante F sobre las curvas obtendremos otras curvas en N. Geométricamente esperamos que esta $\mathcal{D}F$ nos lleve clases de equivalencia de curvas a clases de equivalencia de curvas (vectores a vectores). Querremos definir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}F|_{P}:T_{P}\left[M\right] &\rightarrow T_{F\left[P\right]}\left[N\right] \\ \mathsf{v} &\mapsto \mathsf{w} \end{aligned}$$

Vamos a llamar diferencial a aquello que transforma aproximaciones lineales a M en aproximaciones lineales a N (espacios tangentes a espacios tangentes). A la hora de

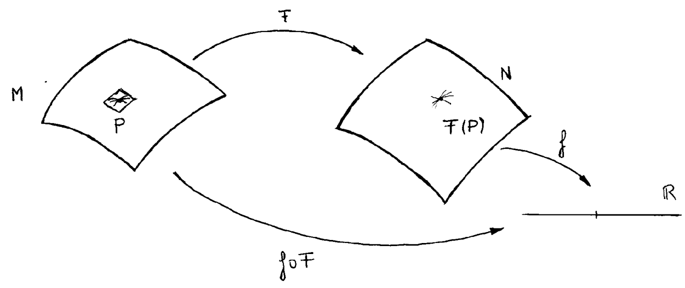


Figura 1.15: F: aplicación entre variedades.

definirla en lugar de utilizar la definición geométrica vamos a hacer uso de la definición operacional[8].

Tenemos el problema de encontrar cuál es el resultado de aplicar w a las funciones $\mathcal{C}^\infty$ definidas en $F[P] \in N$ a partir de la manera de actuar de v sobre las funciones definidas en $P \in M$. Lo podemos hacer del siguiente modo

$$\mathsf{w}[f] \equiv \mathsf{v}[f \circ F]$$

ya que $f \circ F \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$ pero $f \in \mathcal{F}_{F[P]}^\infty[N]$. Es una buena escapatoria (porque yo sólo sé calcular con v) y la definición parece lógica (porque sólo usamos ingredientes intrínsecos) pero ¿cómo se relaciona esto con la diferencial de la función?. Probemos pensando que M es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y N de $\mathbb{R}^n$. Sería el jacobiano. Veamos si esto es coherente. Para ello vamos a hallar la expresión en coordenadas utilizando sistemas de coordenadas en M y en N asociados a una determinada carta (figura 1.16). Sean las expresiones en coordenadas de $\mathsf{v} \in T_P[M]$ y $\mathsf{w} \in T_{F[P]}[N]$:

$$\begin{aligned}\mathsf{w} &= w^{i'} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_{\varphi_b[F[P]]} \\ \mathsf{v} &= v^{i} \left.\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right|_{\varphi_a[P]}\end{aligned}$$

Antes de seguir, una pequeña observación sobre la notación: vamos a evaluar las derivadas en $\varphi_b[F[P]]$ (en las coordenadas del punto $F[P]$), lo cual puede que a veces escribamos abreviando y abusando de la notación como $F[P]$. Mismo asunto con $\varphi_a[P]$ y P. La pregunta es cómo calcular las $w^{i'}$ a partir de las v^i. Se tiene

$$\mathsf{w}[f] = w^{i'} \left.\frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}}\right|_{F[P]} \tag{1.7}$$

[8]Recordemos que un vector tangente es un operador lineal que dada una función y un punto escupe un valor real, y que verifica la propiedad de Leibniz.

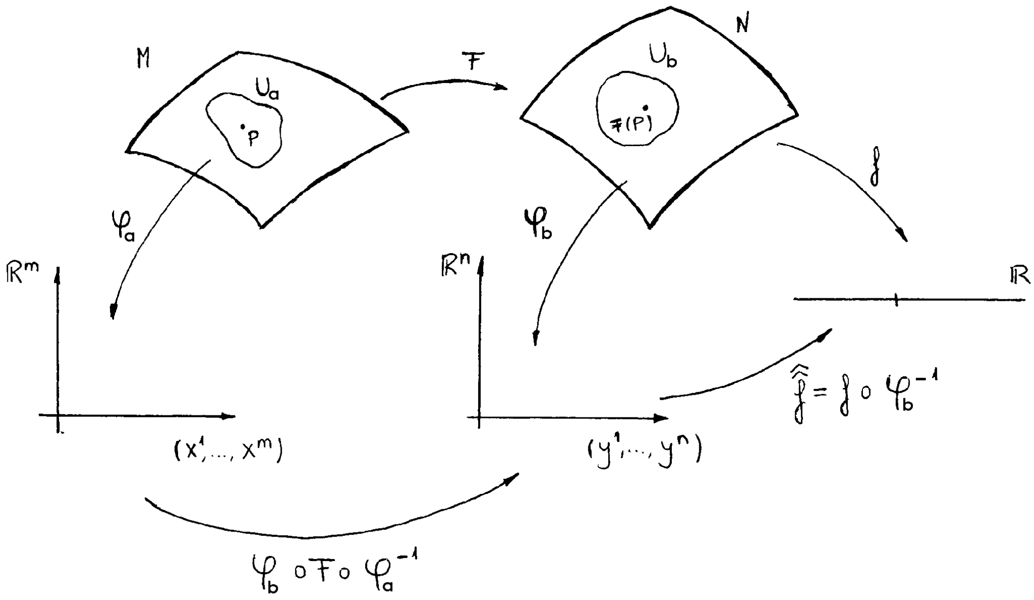


Figura 1.16: Usamos la expresión en coordenadas para definir la diferencial.

Queremos pasar del $\mathbb{R}^m$ original para expresar $f \circ F$ en coordenadas. La expresión de F en coordenadas resulta ser, acudiendo a la figura 1.16:

$$\begin{array}{rcl} \hat{F} \equiv \varphi_b \circ F \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ (x^1 \dots x^m) & \mapsto & (y^1 [x^1 \dots x^m] \dots y^n [x^1 \dots x^m]) \end{array}$$

usando la regla de la cadena en la ecuación 1.7

$$\begin{aligned} \mathsf{w}[f] &= v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \hat{\hat{f}} [y^1 [x^1 \dots x^m] \dots y^n [x^1 \dots x^m]] \right) \Big|_P \\ &= v^i \left. \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}} \right|_{F[P]} \left. \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|_P \end{aligned}$$

reordenando resulta que

$$\begin{aligned} \mathsf{w}[f] &= w^{i'} \left. \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}} \right|_{F[P]} \\ &= v^i \left. \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|_P \left. \frac{\partial \hat{\hat{f}}}{\partial x^{i'}} \right|_{F[P]} \end{aligned}$$

como la relación es válida para cualquier f y por lo tanto para cualquier expresión en

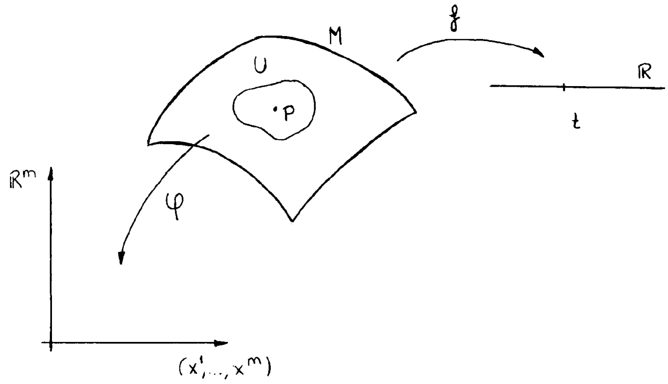


Figura 1.17: Llamamos f a la aplicación F cuando se establece entre la variedad y $\mathbb{R}$. $\hat{f} = id \circ f \circ \varphi_a^{-1}$.

coordenadas $\hat{\hat{f}}$ podemos igualar por componentes, con lo que

$$w^{i'} = \left. \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|_P v^i$$

Si F se establece entre las variedades particulares $M \equiv \mathbb{R}^m$ y $N \equiv \mathbb{R}^n$ la expresión en coordenadas de la diferencial de F, $\mathcal{D}F$ no es más que su matriz jacobiana, ya que F ya es, con este dominio y codominio, su propia expresión en coordenadas. En el caso general $\mathcal{D}F$ es la matriz jacobiana de la expresión en coordenadas de F, $\hat{F} \equiv \varphi_b \circ F \circ \varphi_a^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^m} \end{pmatrix} \right|_P \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}$$

Ahora está claro que la transformación de las componentes de un vector cuando se produce un cambio de coordenadas se puede ver como un caso particular de una aplicación entre variedades, pero con $F : M \to M$ y $P \equiv F[P]$ $(F \equiv id)$ usando dos cartas distintas: $\varphi_b \circ I \circ \varphi_a^{-1}$.

1.6. Vectores cotangentes y espacio cotangente

A los vectores tangentes de los que hemos venido hablando hasta ahora los llamaremos *contravariantes*. En este apartado introduciremos los vectores *covariantes* (o *covectores*) y el *espacio cotangente*. Un tipo interesante de aplicaciones F es el de las que tienen por variedad de llegada $\mathbb{R}$ (figura 1.17), y permiten definir los vectores covariantes.

Una base del espacio tangente a $\mathbb{R}$ es simplemente $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, la derivada en dirección de *la* *única* coordenada. Un vector tangente a $\mathbb{R}$ será

$$\mathsf{w} = w \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0}$$

con $\mathsf{w}[f] \in T_{t_0}[\mathbb{R}]$ (el espacio tangente de $\mathbb{R}$). Por otra parte $\mathsf{v}[f] \in T_P[M]$ con la expresión

$$\mathsf{v} = v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi_a[P]}$$

en este caso la (única) componente de w según la base, w, es el jacobiano $(m \times 1)$ de $\hat{f}$ multiplicado por las componentes de v:

$$w = \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_P v^i$$

w es la diferencial de la aplicación f que lleva vectores tangentes de M a vectores tangentes de $\mathbb{R}$ (escrita en coordenadas, $\hat{f}$). ¡Pero además w coincide con $\mathsf{v}[f]$!. w, coordenada de $\mathsf{w}[f]$ según la base $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ en t_0 se puede obtener pues como $\mathsf{v}[f]$.

Podemos pensar en la diferencial *df* como en una aplicación que a cada vector tangente le hace corresponder un número:

$$\begin{aligned} df : T_P[M] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathsf{v} &\mapsto w = \mathsf{v}[f] = \left.\frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i}\right|_P v^i \end{aligned}$$

a cada espacio lineal (plano tangente) le podemos asociar un *espacio dual*: el espacio de aplicaciones tal que a cada vector le hacen corresponder un número. *df* es pues un elemento de ese espacio dual

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V^* \\ T_P[M] &\rightarrow T_P^*[M] \end{aligned}$$

$T_P^*[M]$ se denomina *espacio cotangente*, y es el de las aplicaciones que llevan vectores tangentes a números. Un ejemplo de aplicación de este tipo es el producto escalar por un vector fijo.

A estas alturas disponemos de una base del espacio tangente $T_P[M]$ (ecuación 1.5) pero no de una base del espacio cotangente $T_P^*[M]$. Esta base que buscamos tiene que estar compuesta de elementos linealmente independientes y generadores del espacio cotangente (de las diferenciales). Veremos que en cierto sentido, esta base está formada por las diferenciales de las funciones coordenadas.

$$\left\{\mathsf{e}^{\mathsf{j}} \equiv dx^j\right\}_{j=1\ldots m}$$

Un elemento del espacio cotangente, $\mathsf{b} \in T_P^*[M]$, se escribe así en la base propuesta: $\mathsf{b} = b_j \left. dx^j\right|_P$.

Hemos dicho que dx^j son *en cierto sentido*[9] los componentes de la base porque en realidad esta notación es un abuso: los dx^j se construyen tomando φ^j (la función que selecciona la coordenada j de P) donde antes hemos tomado f. Para una función g entonces podemos escribir su expresión en la base:

$$dg = \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{\varphi[P]} dx^i$$

Construyamos ahora esa base de diferenciales. Para ello echamos mano de $\varphi^j = u^j \circ \varphi_a \in \mathcal{F}_P^\infty[M]$ (con u^j definida por 1.3 y φ^j por 1.4) . El abuso de notación consiste en llamar x^j a la función φ^j.. La base es $\{d\varphi^j\}_{j=1\ldots m}$ y dx^j su expresión en coordenadas.

Veamos cómo actúan las $d\varphi^j$ sobre un determinado vector v: ¿qué número le hacen corresponder?

$$\begin{aligned} d\varphi^j[\mathsf{v}] &= \mathsf{v}\left[\varphi^j\right] \\ &= \left.\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i}\right|_P \\ &= v^i \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_P \\ &= v^i \delta_i^j \\ &= v^j \end{aligned}$$

Abusando de la notación

$$dx^j\left[v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right] = v^j$$

si actuamos sobre $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$, es decir sobre la base tangente

$$\begin{aligned} d\varphi^j\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] &= \left.\frac{\partial \hat{\varphi}^j}{\partial x^i}\right|_P \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_P \\ &= \delta_j^i \\ &= dx^j\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

la actuación de los elementos de la base del dual sobre la del espacio tangente nos da 1 si $i = j$ y 0 en otro caso. Esto no es más que la definición de una base dual.

En definitiva, sobre un punto P de la variedad M podemos definir un espacio tangente, formado por vectores contravariantes y con una base natural. Al mismo tiempo podemos definir un espacio cotangente como combinación lineal de aplicaciones $T_P[M] \to \mathbb{R}$ (diferenciales) y con una base dual natural $\{d\varphi^j\}$.

[9] Además, atención a la siguiente observación: *no todos los elementos del espacio cotangente son diferenciales de funciones.*

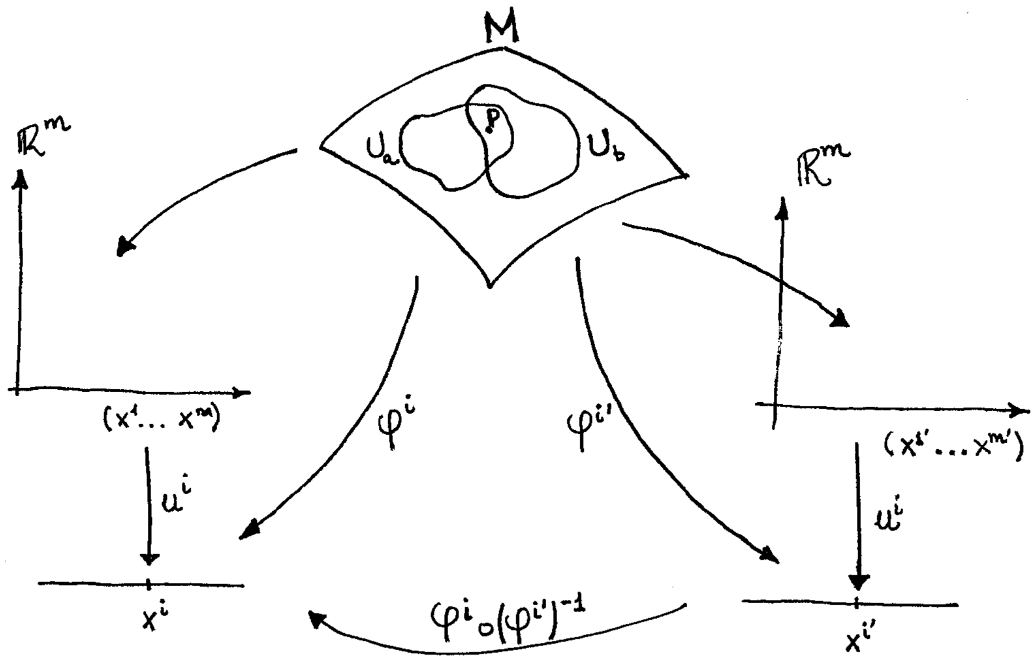


Figura 1.18: Cambio de coordenadas en el espacio cotangente.

1.6.1. Cambio de coordenadas de vectores covariantes

Veamos cómo se transforman las componentes de un vector covariante al utilizar el sistema de coordenadas correspondiente a otra carta. En ese caso tendremos otra base dual, las componentes respecto de la cual denotaremos con primas

$$\begin{aligned} \mathsf{b} &= b_j \, dx^j\big|_P \\ &= b_{j'} \, dx^{j'}\Big|_P \end{aligned}$$

Para expresar $b_{j'}$ en términos de b_j lo que debemos es expresar dx^j en términos de $dx^{j'}$. Lo que queremos es la aplicación que va de $x^{j'}$ a x^j. $x^j = x^j \left[x^{1'} \ldots x^{m'}\right]$ (ver figura 1.18).

$$\begin{aligned} \mathsf{b} &= b_j \, dx^j \left[x^{1'} \ldots x^{m'}\right]\Big|_P \\ &= b_j \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'}\right)\Bigg|_P \end{aligned}$$

de donde

$$b_{j'} = \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right|_P b_j \tag{1.9}$$

Los vectores contravariantes se definen como los que obedecen la regla de transformación 1.6 y los covariantes como los que se comportan según 1.9. La regla mnemotécnica para recordar ambas transformaciones (la contravariante y la covariante) es que se pueda aplicar el convenio de Einstein.

La razón del nombre es que los contravariantes se transforman *al contrario* (con la matriz inversa) de los elementos de la base.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \end{aligned}$$

las dos matrices que actúan como coeficientes de las respectivas bases son inversas, $MM^{-1} = I$, o en componentes,

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$$

si denotamos $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ por M los elementos de la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$ (covariantes) se transforman así

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = M \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y las coordenadas así

$$b_{j'} = M^j_{j'} b_j$$

sin embargo las coordenadas de los contravariantes van así:

$$v^{i'} = \left(M^{-1}\right)^{i'}_i v^i$$

Donde se ha supuesto todas las matrices evaluadas en el punto P. Las coordenadas de un vector deben ser contravariantes para que el objeto en sí sea invariante.

1.7. Fibrados

$$\dim T_P\left[M\right] = \dim T^*_P\left[M\right] = \dim M$$

Ahora podemos pensar en fibrados: añadir a cada punto su espacio tangente (su fibra, su plano tangente). Cada elemento del nuevo espacio viene dado por un punto de la variedad y un vector v. El fibrado viene dado por todos los posibles pares de esta forma (P, v). Este espacio recién construido, formado por todos los planos tangentes a la variedad en todos los puntos, es un espacio que resulta tener estructura de variedad diferenciable y dimensión la suma de la de M y la del espacio tangente $(2 \dim M)$. Tiene un grado de estructura mayor que el espacio producto cartesiano, pero eso es tema para desarrollar en otro momento.

1.8. Por hacer

1. Mejorar la discusión de $\mathbb{R}^m$ y sus abiertos como variedades diferenciables. Ver [Postnikov].
2. Reorganizar la sección 1.2 diferenciando claramente las categorías de variedades de los ejemplos particulares.
3. Aclarar la justificación del teorema de la función implícita, 1.2.4.
4. $\mathcal{D}F$ a dF por homogeneidad.
5. Explicación de por qué no todos los elementos de un campo de formas son diferenciales de funciones.
6. En el apartado 1.4.2 se utiliza por primera vez el convenio de Einstein; explicar someramente su funcionamiento.
7. Discusiones sobre el uso en castellano de maximal por máximo o con el número máximo de elementos según criterio. Tras una transformación de un objeto invariante respecto a ella el objeto ¿queda "invariable" o "invariado"?.
8. Mejorar el tratamiento del fibrado, discutiéndolo con más detalle. Mencionar las aplicaciones físicas del concepto.

2 Campos tensoriales y derivada de Lie

2.1. Introducción

Las entidades que modelan magnitudes físicas se transforman con frecuencia de modo tensorial. Además existen ciertos conjuntos de transformaciones frente a las cuales estas magnitudes no varían. Sobre qué es una ley de transformación tensorial, y sobre qué se entiende por variación de un tensor cuando se *desplaza* por una variedad hablaremos en este capítulo.

2.2. Construcción de tensores

Vamos a construir los tensores de la forma clásica (utilizando coordenadas) a partir del producto tensorial de vectores. El producto de r vectores contravariantes conducirá a tensores r veces contravariantes, el producto de s covectores conducirá a los tensores s veces covariantes y los productos de r vectores contravariantes y s covectores permitirán definir el tensor más general: r veces contravariante y s veces covariante.

La definición de tensor para una variedad es análoga a la definición en $\mathbb{R}^m$ una vez que hemos pasado de los puntos de la variedad a puntos de $\mathbb{R}^m$ mediante la aplicación de carta gracias a la estructura diferenciable de la variedad.

2.2.1. Tensores tangentes a la variedad en un punto

Para construir los tensores $(2,0)$, dos contravariantes, cero covariantes tomamos dos vectores v y w del espacio tangente.

$$\begin{aligned} \mathsf{v} &= v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P \\ \mathsf{w} &= w^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_P \end{aligned}$$

Formamos un nuevo objeto como el *producto tensorial* de los dos vectores, $\mathsf{T} = \mathsf{v} \otimes \mathsf{w}$ así[1]

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= v^i w^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

[1] Recuerda que a partir de ahora suponemos todas las derivadas evaluadas en P, o más precisamente, en $\varphi_a[P]$.

Las componentes de T en la base $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ (producto tensorial de las bases de los espacios tangentes) son $T^{ij} = v^i v^j$ (en el sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$).

Como conocemos las reglas de transformación de las componentes de los vectores, podemos imaginar cómo son las de los tensores: en cualquier otro sistema de coordenadas, $x^{1'} \dots x^{m'}$ las nuevas componentes son:

$$\begin{aligned} T^{i'j'} &= v^{i'} w^{j'} \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} w^j \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} T^{ij} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Esta es la manera de construir objetos contravariantes y obtener su comportamiento bajo cambios de coordenadas a partir de tantos vectores del espacio tangente como índices tenga el objeto buscado. La expresión 2.1 es la definición clásica de los tensores dos veces contravariantes.

Podemos construir un espacio lineal con este tipo de objetos: un espacio lineal de tensores 2-contravariantes, de dimensión m^2. Una combinación lineal de tensores se transformará del mismo modo que un tensor. El espacio de los tensores 2-contravariantes tangentes a la variedad M en el punto P se denotará $T^2_{0\,P}[M]$ o *tensores de tipo* $(2,0)$.

Generalizando el proceso constructivo se define el

Tensor T r **veces contravariante** tangente a la variedad $\mathcal{C}^\infty$ M en el punto P es un conjunto de m^r números reales $T^{i_1 \dots i_r}$ (componentes en el sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$ asociado a la carta (U_a, φ_a), $P \in U_a$) junto con la condición de que en cualquier otro sistema de coordenadas $x^{1'} \dots x^{m'}$ asociado a cualquier carta admisible (U_b, φ_b) tal que $P \in U_b$ las m^r componentes de T son

$$T^{i'_1 \dots i'_r} = T^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \tag{2.2}$$

es decir, un objeto tal que cada coordenada se transforma de modo contravariante. El conjunto de estos tensores se denotará $T^r_{0\,P}[M]$.

2.2.2. Tensores covariantes

Sean dos elementos del espacio cotangente, $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in T^*_P[M]$. Están dados por[2]

$$\begin{aligned} \mathsf{a} &= a_i dx^i \\ \mathsf{b} &= b_j dx^j \end{aligned}$$

el objeto lo construimos del mismo modo que antes, mediante el producto tensorial: $\mathsf{T} = \mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$

$$\mathsf{T} = a_i b_j dx^i \otimes dx^j$$

[2] Entiendase todo dx^j en lo sucesivo evaluado en P $(\varphi_a[P])$, lo mismo con las derivadas parciales.

donde $T_{ij} = a_i b_j$ son las componentes de T en la base $dx^i \otimes dx^j$.

Sólo tenemos que escribir el cambio de coordenadas como cambio de cada uno de los factores

$$\begin{aligned} T_{i'j'} &= a_{i'} b_{j'} \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} a_i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} b_j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_i b_j \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T_{ij} \end{aligned} \tag{2.3}$$

análogamente a como hicimos con el contravariante, podemos definir el espacio lineal $T^0_{2P}[M]$ de las combinaciones lineales de objetos de este tipo, el espacio de tensores 2 veces covariantes, o tensores de tipo $(0, 2)$.

Tensor T s veces covariante es un conjunto de m^s números reales $T_{i_1 \dots i_s}$ (componentes en el sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$ asociado a la carta (U_a, φ_a), $P \in U_a$) junto con la condición de que en cualquier otro sistema de coordenadas $x^{1'} \dots x^{m'}$ asociado a cualquier carta admisible (U_b, φ_b) tal que $P \in U_b$ las m^s componentes de T son

$$T_{i'_1 \dots i'_s} = T_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_s}}{\partial x^{i'_s}}$$

es decir, un objeto tal que cada coordenada se transforma de modo covariante. El conjunto de estos tensores se denotará $T^0_{s\,P}[M]$.

2.2.3. Tensores (r, s)

El siguiente paso que se le ocurre a uno es construir mediante productos tensoriales de vectores y covectores objetos mixtos: varias veces covariantes y varias veces contravariantes.

Veamos el ejemplo de un tensor tipo $(1, 1)$. $\mathsf{T} = \mathsf{v} \otimes \mathsf{a}$ tiene por componentes $T^i_j = v^i a_j$ en la base $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$. Sus componentes se transforman según la siguiente ley:

$$T^{i'}_{j'} = v^{i'} a_{j'} \tag{2.4}$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} a_j \tag{2.5}$$

$$= T^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \tag{2.6}$$

Son objetos de m^2 componentes pertenecientes al espacio de tensores $T^1_{1\,P}[M]$.

tensor r veces contravariante y s veces covariante tangente a M en el punto P es un conjunto de m^{r+s} números reales

$$\left\{ T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \right\}_{i,j=1 \dots m}$$

(componentes en un sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$ asociado a una carta (U_a, φ_a) tal que $P \in U_b$) junto con la condición de que las componentes en cualquier otro sistema de coordenadas $x^{1'} \dots x^{m'}$ asociado a otra carta admisible, (U_b, φ_b) con $P \in U_b$ son

$$T^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\mathrm{d}x^{i'_r}}{\mathrm{d}x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \tag{2.7}$$

aquí hay $r + s$ sumatorios camuflados por el convenio de Einstein.

Observaciones:

1. No existe necesariamente simetría en los índices del tensor: en general, $T_{ij} \neq T_{ji}$. Ver 2.6. De hecho, el producto tensorial es *no* conmutativo.
2. Para intercambiar índices de arriba a abajo se necesitan aplicaciones especiales, un subconjunto de las cuales son las métricas. Ellas asocian a determinado objeto contravariante un objeto covariante.
3. Hay una definición intrínseca (invariante frente al sistema de coordenadas) de tensor a partir del concepto de aplicación multilineal que actúa sobre r copias del espacio cotangente y s copias del espacio tangente.

2.3. Operaciones con tensores

Nos interesa definir operaciones entre tensores puesto que numerosas magnitudes físicas se comportan como tensores frente al cambio de coordenadas. Una ecuación en la que sólo se realicen operaciones como las que explicamos en este apartado se denomina *ecuación tensorial*.

2.3.1. Suma de tensores

Dados T, S tensores de tipo (r, s) con componentes $T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}, S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ el tensor suma $\mathsf{P} = \mathsf{T} + \mathsf{S}$ tiene las componentes:

$$P^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

La suma sólo está definida entre tensores del mismo tipo, asociados a la misma variedad en el mismo punto. De manera análoga se puede definir el producto por un número real.

Demostrar que el objeto resultante de cualquier operación es un tensor, es verificar que se transforma como dicta 2.7, es decir, como un tensor. Por ejemplo, para el tensor suma,

$$\begin{aligned}
P^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} &= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \\
&= \left(T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} + S^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \right) \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} \\
&= P^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}
\end{aligned}$$

2.3.2. Contracción

Es una aplicación que produce un tensor cuyos grados (de covariancia y contravariancia) son ambos uno menor que los del tensor de partida:

$$\mathsf{T} \in T^r_{s\,P}\,[M] \to \mathsf{P} \in T^{r-1}_{s-1\,P}\,[M]$$

Para realizar la operación etiquetamos los índices a contraer con el mismo índice mudo. Esto equivale, con la convención de Einstein, a sumar en tales índices.

Ejemplo sea $\mathsf{T} \in T^2_{3\,P}\,[M]$, con coordenadas T^{ij}_{klq}. Tenemos que decidir en qué índice queremos contraer. Si sumamos podemos definir $\mathsf{P} \in T^1_{2\,P}\,[M]$ de componentes P^j_{lq} como aquel conjunto de números reales que se construye sumando en el primer índice contravariante y en el primer índice covariante:

$$\begin{aligned} P^j_{lq} &\equiv T^{ij}_{ilq} \\ &= \sum_{i=1}^{m} T^{ij}_{ilq} \end{aligned}$$

Hay otras formas de contraer un tensor. Por ejemplo, sumando en el primer índice contravariante y el segundo covariante obtendríamos $S^j_{kq} = T^{ij}_{kiq}$. Una contracción adicional del S^j_{kq} nos daría un covector, $a^j_{jq} = a_q$.

Un error típico es contraer un índice que ya ha sido contraído, porque aparecen tres índices iguales. En los dos índices que son explícitamente iguales ya no puedo sumar más, ya están sumados. T^{ij}_{iiq} es un absurdo.

Ejemplo Sea $T^i_j = v^i a_j$. La contracción de un tensor $(1,1)$ es sumar en el único índice disponible, para obtener un objeto $(0,0)$. Esto es como calcular la traza de una matriz:

$$T^i_i = v^i a_i = a^1 v_1 + \ldots + a^m v_m$$

Si contraes el primero covariante con el primero contravariante el resultado es un tensor distinto que si contraes el segundo covariante con el primero contravariante.

Veamos que los objetos contraídos son a su vez tensores. Usaremos para ello $\mathsf{T} \in T^1_{2\,P}\,[M]$ de componentes T^i_{jk}, contraído a $S_k = T^i_{ik}$. De

$$T^{i'}_{i'k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} T^i_{ik}$$

se deduce inmediatamente que

$$S_{k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} S_k$$

2.3.3. Producto tensorial[3]

$$\begin{aligned}
\otimes : T^{r_1}_{s_1\,P}[M] \times T^{r_2}_{s_2\,P}[M] &\rightarrow T^{r_1+r_2}_{s_1+s_2} \\
(\mathsf{T},\mathsf{S}) &\mapsto \mathsf{P} = \otimes[\mathsf{T},\mathsf{S}] = \mathsf{T}\otimes\mathsf{S} \\
\left(T^{i_1\ldots i_{r_1}}_{j_1\ldots j_{s_1}}, S^{k_1\ldots k_{r_2}}_{l_1\ldots l_{s_2}}\right) &\mapsto P^{i_1\ldots i_{r_1},k_1\ldots k_{r_2}}_{j_1\ldots j_{s_2},l_1\ldots l_{s_2}} = T^{i_1\ldots i_{r_1}}_{j_1\ldots j_{s_1}} S^{k_1\ldots k_{r_2}}_{l_1\ldots l_{s_2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo Sea $\mathsf{T} \in T^1_{1\,P}[M]$ con componentes T^i_j y $\mathsf{S} \in T^2_{1\,P}[M]$ con componentes S^{kl}_m. Entonces $\mathsf{P} \in T^3_{2\,P}[M]$ con componentes

$$P^{ikl}_{jm} = T^i_j S^{kl}_m$$

se transforma así:

$$\begin{aligned}
P^{i'k'l'}_{j'm'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T^i_j \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} S^{kl}_m \\
&= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} P^{ikl}_{jm}
\end{aligned}$$

y tiene el comportamiento esperado para un tensor si se escribe como producto de $T^{i'}_{j'}$ y $S^{k'l'}_{m'}$.

2.3.4. Producto interior

Es una combinación de operaciones: el producto tensorial y la contracción. Consideremos un tensor T tipo $(1,1)$ y un tensor S tipo $(0,2)$ (misma variedad y mismo punto P). $\mathsf{P} = \mathsf{T}\otimes\mathsf{S}$ tiene entonces las componentes

$$P^i_{jkl} = T^i_j S_{kl}$$

ahora podemos contraer el primer contravariante con el segundo covariante,

$$Q_{jl} = P^i_{jil}$$

que en términos de las componentes de T y S es

$$Q_{jl} = T^i_j S_{il}$$

Podemos considerar la operación compuesta como una operación única, metida en una lata: (contracción $\circ$ producto tensorial). A esto se le suele llamar *producto interior de tensores*. Evidentemente, no hay un único producto interior, ya que hay varios modos de contraer.

Ejemplo (el producto escalar). Supongamos que tenemos v y a, tensores $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente en el mismo punto P de la variedad M. Pues bien, podemos construir $T^i_j = v^i a_j$ mediante el producto tensorial y acabar el producto interior contrayendo ese símbolo:

$$P = T^i_i = v^i a_i$$

[3] En la formulación clásica se le ha llamado *producto exterior*, pero esta denominación puede conducir a confusión.

2.4. Definición invariante de tensores tangentes a M en un punto P

El tensor como tal no privilegia ningún sistema de coordenadas, de hecho el tensor es el conjunto de todas las posibles coordenadas en todos los posibles sistemas de coordenadas. Para soslayar este problema de aparente dependencia del sistema de coordenadas damos una nueva definición, que se basa en considerar una aplicación multilineal que toma copias de los espacios tangente y cotangente y produce un número.

2.4.1. Covectores como aplicaciones lineales

Recordemos que $\mathsf{a} \in T_P^*[M]$. Este dual está constituido por aplicaciones lineales como a que toman elementos del espacio tangente y los llevan a números reales. Luego a no es más que una aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} \mathsf{a} : T_P[M] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathsf{v} &\mapsto \mathsf{a}[\mathsf{v}] \end{aligned}$$

Los covectores son parte del espacio ${T^0_1}_P[M] \equiv T_P^*[M]$. La linealidad significa nada más que

$$\mathsf{a}[k_1\mathsf{v} + k_2\mathsf{w}] = k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}] + k_2\mathsf{a}[\mathsf{w}]$$

Dada la base del espacio cotangente $\left\{\mathsf{e}^i\right\} \equiv \{dx^i\}$ podemos expresar cualquier elemento del espacio cotangente como combinación lineal de elementos de su base. Lo mismo con los vectores contravariantes y su base correspondiente.

$$\begin{aligned} \mathsf{a}[\mathsf{v}] &= a_i\ dx^i\left[v^j\ \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_P\right] \\ &= a_i v^j\ dx^i\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] \end{aligned}$$

pero por definición la actuación de la base del cotangente sobre la base del tangente es δ^i_j:

$$\begin{aligned} \mathsf{a}[\mathsf{v}] &= a_i v^j \delta^i_j \\ &= a_k v^k \end{aligned}$$

Esto nos permite interpretar los vectores covariantes como aplicaciones lineales sobre una copia del espacio tangente.

2.4.2. Vectores contravariantes como aplicaciones lineales

También se pueden interpretar los elementos del espacio tangente como aplicaciones lineales. Consideremos $\mathsf{v} \in T_P[M]$. Es una aplicación que a cada elemento del espacio cotangente le hace corresponder un número real:

$$\begin{aligned} \mathsf{v} : T_P^*[M] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathsf{a} &\mapsto \mathsf{v}[\mathsf{a}] \equiv \mathsf{a}[\mathsf{v}] \end{aligned}$$

Esto nos permite hacer una interpretación de un vector como una aplicación lineal de una copia del espacio cotangente en $\mathbb{R}$. La linealidad se deriva de la linealidad de la aplicación $\mathsf{a}[\mathsf{v}]$

$$\begin{aligned} \mathsf{v}[k_1\mathsf{a} + k_2\mathsf{b}] &\equiv (k_1\mathsf{a} + k_2\mathsf{b})[\mathsf{v}] \\ &= k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}] + k_2\mathsf{b}[\mathsf{v}] \\ &\equiv k_1\mathsf{v}[\mathsf{a}] + k_2\mathsf{v}[\mathsf{b}] \end{aligned}$$

2.4.3. Tensores $(0, 2)$ como aplicaciones multilineales

Se plantea el problema de interpretar los tensores de orden superior. Para ello procedemos, como en la definición de tensor, de modo constructivo. Supongamos que queremos formar los tensores tipo $(0, 2)$. Sean dos covectores a, b de tipo $(0, 1)$. Es de esperar que este objeto se coma dos vectores. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \otimes : T_P[M] \times T_P[M] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathsf{v}, \mathsf{w}) &\mapsto \otimes[\mathsf{a}, \mathsf{b}] = (\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})[\mathsf{v}, \mathsf{w}] \equiv \mathsf{a}[\mathsf{v}]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] \end{aligned} \tag{2.8}$$

que a cada par de vectores contravariantes asocia un número real: el producto de la actuación de cada uno de los covectores sobre su vector respectivo. Esta aplicación, que actúa sobre dos copias del espacio tangente, es lineal en sus dos argumentos. En efecto, para el primero se cumple:

$$\begin{aligned} (\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})[k_1\mathsf{v}_1 + k_2\mathsf{v}_2, \mathsf{w}] &\equiv \mathsf{a}[k_1\mathsf{v}_1 + k_2\mathsf{v}_2]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] \\ &= (k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}_1] + k_2\mathsf{a}[\mathsf{v}_2])\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] \\ &= k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}_1]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] + k_2\mathsf{a}[\mathsf{v}_2]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] \\ &= k_1(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})[\mathsf{v}_1, \mathsf{w}] + k_2(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b})[\mathsf{v}_2, \mathsf{w}] \end{aligned}$$

Análogamente se prueba la linealidad en el segundo argumento, de modo que $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}$ es una aplicación bilineal.

Es evidente que $\mathsf{a} \otimes \mathsf{b} \neq \mathsf{b} \otimes \mathsf{a}$. Esto se ve porque el primer factor, a, del producto tensorial actúa sobre el primer argumento y el segundo factor, b, sobre el segundo argumento w (ver definición 2.8).

Ahora podemos construir un espacio lineal mediante combinaciones lineales: el espacio lineal de los tensores de tipo $(0, 2)$. Si $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}$ son covectores y v, w vectores tangentes a la misma variedad en el mismo punto se cumple que:

$$(k_1(\mathsf{a} \otimes \mathsf{b}) + k_2(\mathsf{c} \otimes \mathsf{d}))[\mathsf{v}, \mathsf{w}] = \ldots = k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] + k_2\mathsf{c}[\mathsf{v}]\,\mathsf{d}[\mathsf{w}]$$

Un tensor de tipo $(0, 2)$ es una aplicación bilineal que actúa sobre dos copias del espacio tangente:

$$\begin{aligned} \mathsf{T} : T_P[M] \times T_P[M] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathsf{v}, \mathsf{w}) &\mapsto \mathsf{T}[\mathsf{v}, \mathsf{w}] \end{aligned}$$

2.4.4. Conexión entre la interpretación intrínseca y la clásica

Tensores $(0,2)$

Queremos tender un puente con la definición tradicional. Para ello vamos a buscar una base para los tensores dos veces covariantes a partir de una base del espacio cotangente, simplemente por un producto tensorial de elementos de la base. Dados un sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$, una carta (U_a, φ_a) con $P \in U_a$ y la base $\{dx^i\}_{i=1\dots m}$ de $T_P^*[M]$, la base para el espacio de tensores $(0,2)$, de m^2 elementos es:

$$\left\{dx^i \otimes dx^j\right\}_{i,j=1\dots m}$$

eso quiere decir que cualquier $\mathsf{T} \in T^0_{2\,P}[M]$ se puede escribir como

$$\mathsf{T} = T_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j\right)$$

Ahora pasamos a un nuevo sistema de coordenadas $x^{1'} \dots x^{m'}$ con una base para los tensores $(0,2)$ asociada que es

$$\left\{dx^{i'} \otimes dx^{j'}\right\}_{i',j'=1\dots m}$$

Para expresar los antiguos en función de los nuevos no hay más que tener en cuenta la consistencia del convenio de Einstein:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'}$$

así que, empleando para la segunda igualdad la linealidad del producto tensorial,

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= T_{ij}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \otimes \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'}\right) \\ &= T_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\left(dx^{i'} \otimes dx^{j'}\right) \end{aligned}$$

de modo que reencontramos a partir de la definición intrínseca la definición clásica:

$$T_{i'j'} = T_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$$

Veamos cuál es la expresión en términos de las componentes de v y w de $\mathsf{T}[\mathsf{v},\mathsf{w}] \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}[\mathsf{v},\mathsf{w}] &= T_{ij}\left(dx^i \otimes dx^j\right)[\mathsf{v},\mathsf{w}] \\ &= T_{ij} dx^i[\mathsf{v}]\, dx^j[\mathsf{w}] \\ &= T_{ij} dx^i\left[v^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right] dx^j\left[w^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= T_{ij} v^i w^j \end{aligned}$$

ya que $dx^i\left[v^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right] = v^l \delta^i_l = v^i$ y $dx^j\left[w^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = w^k \delta^j_k = w^j$ por ser bases duales (ver 1.8 en la página 36).

Tensores $(2,0)$

Los tensores tipo $(2,0)$ como aplicación esperan dos covectores y devuelven un número real:

$$\begin{array}{rcl}\mathsf{v}\otimes\mathsf{w} : T_P^*[M]\times T_P^*[M] & \to & \mathbb{R}\\ (\mathsf{a},\mathsf{b}) & \mapsto & (\mathsf{v}\otimes\mathsf{w})[\mathsf{a},\mathsf{b}] = \mathsf{v}[\mathsf{a}]\,\mathsf{w}[\mathsf{b}] \equiv \mathsf{a}[\mathsf{v}]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}]\end{array} \tag{2.9}$$

Podemos definir las combinaciones de objetos de este tipo. Dados $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(k_1\mathsf{v}\otimes\mathsf{w} + k_2\mathsf{t}\otimes\mathsf{u})[\mathsf{a},\mathsf{b}] &= k_1\mathsf{v}[\mathsf{a}]\,\mathsf{w}[\mathsf{b}] + k_2\mathsf{t}[\mathsf{a}]\,\mathsf{u}[\mathsf{b}]\\ &= k_1\mathsf{a}[\mathsf{v}]\,\mathsf{b}[\mathsf{w}] + k_2\mathsf{a}[\mathsf{t}]\,\mathsf{b}[\mathsf{u}]\end{aligned}$$

${T^2_0}_P[M]$, al que pertenecen estas combinaciones, es un espacio lineal sobre el cuerpo de los reales, porque hemos definido la suma de tensores $(2,0)$ y el producto por los elementos del cuerpo de escalares, $\mathbb{R}$. Queremos construir una base natural asociada al sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$ de una carta (U_a, φ_a), $P \in U_a$. La base natural del espacio tangente, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_P\right\}_{i=1\dots m}$ permite construir una base de los tensores dos veces contravariantes del siguiente modo:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right\}_{i,j=1\dots m}$$

Todo $\mathsf{T} \in {T^2_0}_P[M]$ podemos expresarlo así:

$$\mathsf{T} = T^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$$

En otro sistema de coordenadas dispondremos también de una base alternativa

$$\mathsf{T} = T^{i'j'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j'}}$$

utilizando las reglas de transformación sobre los factores del producto tensorial podemos escribir:

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= T^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\\ &= T^{ij}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\otimes\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right)\end{aligned}$$

y la linealidad del producto tensorial,

$$\mathsf{T} = T^{ij}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j'}}\right)$$

de modo que la transformación de coordenadas del objeto total es

$$T^{i'j'} = T^{ij}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$$

Nos gustaría saber cuál es la expresión en coordenadas de la actuación de un tensor de tipo $(2,0)$ sobre un par de covectores. Teniendo en cuenta la linealidad y las reglas tensoriales

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}[\mathsf{a},\mathsf{b}] &= \left(T^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}\right)[\mathsf{a},\mathsf{b}] \\
&= T^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}[\mathsf{a}]\frac{\partial}{\partial x^j}[\mathsf{b}] \\
&= T^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[a_k dx^k\right]\frac{\partial}{\partial x^j}\left[b_l dx^l\right] \\
&= T^{ij}a_k b_l\frac{\partial}{\partial x^i}\left[dx^k\right]\frac{\partial}{\partial x^j}\left[dx^l\right] \\
&= T^{ij}a_k b_l\delta_i^k\delta_j^l \\
&= T^{ij}a_i b_j
\end{aligned}$$

El valor obtenido es independiente del sistema de coordenadas utilizado, es un invariante frente a cambios del sistema de coordenadas, un número real independiente del sistema de coordenadas. Es un invariante por construcción; la definición intrínseca parte precisamente de este hecho.

Tensores $(1,1)$

Tensor $(1,1)$ T **tangente** a la variedad M en el punto P es una aplicación bilineal que actúa sobre una copia del espacio cotangente (por la vez que es contravariante) y otra del espacio tangente (por la vez que es covariante) y produce un número real:

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}: T_P^*[M]\times T_P[M] &\to \mathbb{R} \\
(\mathsf{a},\mathsf{v}) &\mapsto \mathsf{T}[\mathsf{a},\mathsf{v}]
\end{aligned}$$

$\mathsf{T}\in T^1_{1\,P}[M]$ es una aplicación lineal en los dos argumentos:

$$\mathsf{T}[k_1\mathsf{a}+k_2\mathsf{b},\mathsf{v}] = k_1\mathsf{T}[\mathsf{a},\mathsf{v}]+k_2\mathsf{T}[\mathsf{b},\mathsf{v}]$$

La base de estos tensores es, por el mismo procedimiento constructivo que antes,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\right\}_{i,j=1\ldots m}$$

y actúa sobre un covector y un vector contravariante así:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\right)[\mathsf{a},\mathsf{v}] = \frac{\partial}{\partial x^i}[\mathsf{a}]\,dx^j[\mathsf{v}]$$

T se expresa así en la base:

$$\mathsf{T} = T^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$$

en otro sistema de coordenadas la base correspondiente será

$$\mathsf{T} = T^{i'}_{j'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \otimes dx^{j'}$$

como los elementos de la base normal se pueden expresar así en función de los elementos de la base prima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \\ dx^j &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathsf{T} &= T^{i'}_{j'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \\ &= T^i_j \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \otimes \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \right) \\ &= T^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \otimes dx^{j'} \right) \end{aligned}$$

En conclusión:

$$T^{i'}_{j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T^i_j$$

En cuanto a la expresión en coordenadas de la actuación de este objeto sobre un vector y un covector es

$$\mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{v}] = T^i_j a_i v^j$$

Tensores (r, s)

Tensor de tipo (r, s) T tangente a la variedad M en un punto P es una aplicación multilineal de r copias del espacio cotangente y s copias del espacio tangente $T^*_P[M] \times \cdots \times T^*_P[M] \times T_P[M] \times \cdots \times T_P[M]$ en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathsf{T} : T^*_P[M] \times \cdots \times T^*_P[M] \times T_P[M] \times \cdots \times T_P[M] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathsf{a}_1, \ldots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s) &\mapsto \mathsf{T}[\mathsf{a}_1, \ldots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s] \end{aligned}$$

Tiene que ser lineal en cada uno de sus argumentos. Para el argumento i:

$$\mathsf{T}[\mathsf{a}_1 \ldots, k_1 \mathsf{a}_i + k_2 \mathsf{b}_i, \ldots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s] = k_1 \mathsf{T}[\mathsf{a}_1 \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s] + k_2 \mathsf{T}[\mathsf{a}_1 \ldots, \mathsf{b}_i, \ldots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \ldots$$

producto tensorial sean T (r_1, s_1) y S (r_2, s_2). Se define como el producto tensorial de T por S y se denota $\mathsf{T} \otimes \mathsf{S}$ a un tensor de tipo $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ dado por la siguiente relación:

$$(\mathsf{T} \otimes \mathsf{S})[\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_{r_1}, \mathsf{b}_1 \ldots \mathsf{b}_{r_2}, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_{s_1}, \mathsf{w}_1 \ldots \mathsf{w}_{s_2}] \equiv \mathsf{T}[\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_{r_1}, \mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_{s_1}]\ \mathsf{S}[\mathsf{b}_1 \ldots \mathsf{b}_{r_2}, \mathsf{w}_1 \ldots \mathsf{w}_{s_2}]$$

propiedades de $\otimes$

1. Asociativa $(\mathsf{T}\otimes\mathsf{S})\otimes\mathsf{P}=\mathsf{T}\otimes(\mathsf{S}\otimes\mathsf{P})$
2. Distributiva respecto de la suma:
   a) $(\mathsf{P}+\mathsf{Q})\otimes\mathsf{T}=\mathsf{P}\otimes\mathsf{T}+\mathsf{Q}\otimes\mathsf{T}$
   b) $\mathsf{T}\otimes(\mathsf{P}+\mathsf{Q})=\mathsf{T}\otimes\mathsf{P}+\mathsf{T}\otimes\mathsf{Q}$

   (P y Q ambos tensores (r,s))
3. En general no conmutativo: $\mathsf{T}\otimes\mathsf{S}\neq\mathsf{S}\otimes\mathsf{T}$

base Una base en el sistema de coordenadas $x^1\dots x^m$ es

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\right\}_{\forall i_1\dots i_r, j_1\dots j_s=1\dots m}$$

La dimensión de un tensor de tipo (r,s) es m^{r+s}.

T se expresa con diferentes coeficientes en función de la base:

$$\begin{aligned}\mathsf{T} &= T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\\ &= T^{i'_1\dots i'_r}_{j'_1\dots j'_s}\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i'_r}}\otimes dx^{j'_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j'_s}\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones de cambio de coordenadas y utilizando la linealidad, vemos que cada índice se transforma consecuentemente con su tipo

$$T^{i'_1\dots i'_r}_{j'_1\dots j'_s}=\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$$

Ejemplo Veamos la actuación de un $(2,3)$ sobre dos covectores y tres vectores contravariantes:

$$\mathsf{T}\left[\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{v},\mathsf{w},\mathsf{u}\right]=T^{ij}_{klq}a_ib_jv^kw^lu^q$$

tenemos que contraer las componentes del primer covector con el primer índice contravariante, etc. El resultado es un número real independiente del sistema de coordenadas.

2.5. Campos tensoriales

2.5.1. Introducción

Desde el punto de vista clásico un tensor $(2,3)$ es un conjunto de m^5 números reales (componentes) asociado a un punto P de la variedad M. Si construimos un campo tensorial asociando a cada punto P de $E\subset M$ un tensor $(2,3)$ tangente a la variedad en ese punto tenemos m^5 funciones definidas en el subconjunto E de las coordenadas del punto P, $x^1\dots x^m$ y tales que para cualquier otro sistema de coordenadas se cumple que

$$T^{i'j'}_{k'l'r'}=T^{ij}_{klr}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{r'}}$$

los coeficientes del cambio y las coordenadas del tensor dependen ahora de las coordenadas del punto considerado

$$\begin{aligned} T^{i'j'}_{k'l'r'}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right] &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\left[x^{1}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\dots x^{m}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\right]\times \\ &\quad \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j}}\left[x^{1}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\dots x^{m}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\right]\times \\ &\quad \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{k'}}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\frac{\partial x^{l}}{\partial x^{l'}}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\frac{\partial x^{r}}{\partial x^{r'}}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\times \\ &\quad T^{ij}_{klr}\left[x^{1}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\dots x^{m}\left[x^{1'}\dots x^{m'}\right]\right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.5.2. Campos vectoriales

Para caracterizar el campo de vectores tangentes a una superficie (u otras variedades más sofisticadas) es necesario introducir la siguiente definición

campo vectorial contravariante tangente a la variedad M Un campo vectorial Y tangente a la variedad $\mathcal{C}^\infty$ M es una aplicación de $E\subset M$ tal que a cada $P\in E$ le asocia un elemento de $T_P\left[M\right]$.

$$\begin{aligned} Y: E\subset M &\rightarrow T_P\left[M\right] \\ P &\mapsto \mathsf{y} \end{aligned}$$

su expresión en coordenadas hace $x^1\dots x^m\mapsto Y^i\left[x^1\dots x^m\right]\big|_P\frac{\partial}{\partial x^i}$.

El espacio formado por todos los campos vectoriales Y tangentes a la variedad M lo denotamos $\aleph\left[M\right]$. Dado un sistema de coordenadas en la variedad, $x^1\dots x^m$, asociado a una carta (U_a,φ_a), podremos expresar el campo vectorial Y en la restricción $E\cap U_a$ en función de estas coordenadas:

$$Y = Y^i\left[x^1\dots x^m\right]\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Necesitamos definir el grado de diferenciabilidad de un campo vectorial. En la interpretación intrínseca, el campo es un conjunto de aplicaciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ que a un covector le hacen corresponder un número dependiente del punto. Al hacer actuar el campo vectorial sobre una función $f\in\mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$ se obtiene una función del punto, $Y\left[f\right]=g$ cuya expresión en coordenadas será

$$g = Y\left[f\right] = Y^i\left[x^1\dots x^m\right]\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

sólo válida en un dominio de definición que es el del campo vectorial Y. Un campo vectorial Y es de clase $\mathcal{C}^k$ con dominio de definición $E\subset M$ si actuando sobre funciones de clase $\mathcal{F}^\infty_P\left[M\right]$ da funciones g de clase $\mathcal{C}^k$. Habrá que exigir que el dominio de definición E sea abierto. Veamos que esta afirmación no depende del sistema de coordenadas:

proposición En términos de componentes en un determinado sistema de coordenadas un campo Y es de clase $\mathcal{C}^\infty$ si en *algún* sistema de coordenadas sus componentes son $\mathcal{C}^\infty$ para cada punto P de $E \subset M$, ya que se puede comprobar que un campo vectorial que es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un determinado sistema de coordenadas lo es también en todos los demás.

Sea $Y \in \aleph[M]$. Escribimos Y en el sistema normal

$$Y = Y^i \left[x^1 \dots x^m\right] \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y en otras coordenadas cualesquiera $x^{1'} \dots x^{m'}$

$$Y^{i'} \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \left[x^1 \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] \dots x^m \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right]\right] Y^i \left[x^1 \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] \dots x^m \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right]\right]$$

si $Y^i \left[x^1 \dots x^m\right]$ son $\mathcal{C}^k$ como los cambios de coordenadas $x^1[x^{1'} \dots x^{m'}] \dots x^m[x^{1'} \dots x^{m'}]$ (y sus inversos) son $\mathcal{C}^\infty$ por ser la variedad a su vez $\mathcal{C}^\infty$ (compatibilidad de cartas) la composición de los coeficientes $Y^i \left[x^1 \dots x^m\right]$ con los cambios es $\mathcal{C}^k$.

2.5.3. Campos tensoriales

un campo tensorial (r,s) τ **tangente a** M es una aplicación con dominio $E \subset M$ que a cada $P \in E$ hace corresponder un tensor T de tipo (r,s) tangente a M en P (un elemento de $T^r_{s\,P}[M]$:

$$\begin{array}{rcl} \tau \in T^r_s[M] : E \subset M & \to & T^r_{s\,P}[M] \\ P & \mapsto & \mathsf{T} \end{array}$$

En un sistema de coordenadas $x^1 \dots x^m$ τ (con dominio $E \cap U_a$) se escribe así:

$$\tau = \tau^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[x^1 \dots x^m\right] \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

En otro sistema de coordenadas $x^{1'} \dots x^{m'}$:

$$\begin{aligned} \tau^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] &= \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \left[x\left[x'\right]\right] \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \left[x\left[x'\right]\right] \times \\ & \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \left[x'\right] \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} \left[x'\right] \tau^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \left[x^1 \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right] \dots x^m \left[x^{1'} \dots x^{m'}\right]\right] \end{aligned}$$

donde el dominio de definición es $E \cap U_a \cap U_b$.

Respecto a la diferenciabilidad de los campos tensoriales se tiene un resultado análogo al de los campos vectoriales.

Interpretación intrínseca Tenemos que hacer la interpretación de campos tensoriales actuando sobre vectores o covectores. Un campo tensorial será una aplicación que toma r campos tensoriales $(0,1)$ y s campos tensoriales $(1,0)$. Sea A un campo covariante

$$\begin{array}{rcl} A : E \subset M & \rightarrow & T_P^* [M] \\ \left(x^1 \dots x^m\right) & \mapsto & A = A_i \left[x^1 \dots x^m\right] dx^i \end{array}$$

Si $X \in \aleph[M]$ podemos decir que $A[X]$ es $\mathcal{C}^\infty$ si su actuación $A[X] = f$ da lugar a funciones $\mathcal{C}^\infty$. Interpretación de un campo tensorial (r,s): τ actúa sobre r campos vectoriales covariantes y s campos vectoriales contravariantes.

$$\tau[A_1 \dots A_r, X_1 \dots X_s] = g[P]$$

resultando una función de punto, g. Será $\mathcal{C}^\infty$ si su actuación sobre cualesquiera campos vectoriales que pongamos como argumentos produce funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Acerca de la notación

En lo sucesivo llamaremos a los campos tensoriales también con letras rectas, presentación que hasta ahora reservábamos a los tensores *en un punto*. La ambigüedad quedará salvada por la presencia de una serie de argumentos que indican que las componentes del tensor dependen del punto de la variedad. Es decir, con un ejemplo en baja dimensión

$$\mathsf{v}[f] = v^i \left[x^1 \dots x^m\right] \frac{\partial \hat{f}}{\partial x^i} \left[x^1 \dots x^m\right]$$

debe entenderse como un *campo vectorial* ya que las componentes v^i de v en cierto sistema de coordenadas dependen del punto.

2.6. Propiedades de simetría

Los tensores que observan simetrías bajo permutaciones de los índices se pueden especificar con un número menor de cantidades independientes. Ejemplos: el tensor electromagnético (antisimétrico), la métrica de una superficie (simétrica), el tensor de tensiones de un fluido (simétrico)...

Debemos enfrentarnos pues, ante la presencia generalizada de estas propiedades en objetos matemáticos de la física, con su definición rigurosa y la de las propiedades asociadas. Nos centraremos primero en la definición de la simetría de tensores para después pasar a la de campos tensoriales.

Decimos que un tensor es totalmente covariante si es tipo $(0,s)$, y totalmente contravariante si es tipo $(r,0)$.

2.6.1. Simetría y antisimetría en los índices

tensor simétrico (definición clásica). Sea T un tensor de tipo (r,s) tangente a la variedad M en el punto P. Decimos que T es simétrico en sus índices p-ésimo y q-ésimo si en un sistema de coordenadas sus componentes cumplen que

$$T^{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

para todo $i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s = 1 \dots m$.

Ejemplo Estas simetrías para el primer y tercero índices contravariantes se reflejan en un tensor 3 contravariante y 1 covariante así: $T_4^{123} = T_4^{321}$.

Análoga definición se puede aplicar para la simetría en índices covariantes. Para imponer condiciones de simetría sobre índices de diferente tipo se necesita tener un dispositivo para bajar o subir índices, tal como una métrica o un espacio simpléctico.

Nótese que hemos hablado de simetría para un cierto sistema de coordenadas. Es importante convencerse de que un tensor que es simétrico en un cierto sistema de coordenadas lo es en todos los demás.

$$T^{i'_1 \dots i'_p \dots i'_q \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \cdots \frac{\partial x^{i'_q}}{\partial x^{i_q}} \cdots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

pero como

$$T^{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = T^{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

se tiene que también

$$T^{i'_1 \dots i'_p \dots i'_q \dots i_r}_{j'_1 \dots j_s} = T^{i'_1 \dots i'_q \dots i'_p \dots i_r}_{j'_1 \dots j_s}$$

Concluimos que las propiedades de simetría son intrínsecas del tensor, y no dependen del sistema de coordenadas.

tensor antisimétrico (definición clásica) en el índice p-ésimo y q-ésimo es el que cumple

$$T^{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = -T^{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

simetría y antisimetría (definición intrínseca) Sea T un tensor de tipo (r, s) tangente a la variedad M en el punto P. Se dice que T es simétrico (antisimétrico) en sus argumentos p-ésimo y q-ésimo si se cumple que

$$\mathsf{T}\left[\mathsf{a}_1 \dots \mathsf{a}_p \dots \mathsf{a}_q \dots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \dots \mathsf{v}_s\right] = (-)\ \mathsf{T}\left[\mathsf{a}_1 \dots \mathsf{a}_q \dots \mathsf{a}_p \dots \mathsf{a}_r, \mathsf{v}_1 \dots \mathsf{v}_s\right]$$

Ejemplo $\mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{v}] = \mathsf{T}[\mathsf{c}, \mathsf{b}, \mathsf{a}, \mathsf{v}]$ con el convenio habitual para denotar vectores y covectores, es un tensor 3 contravariante simétrico en a, c, 1 covariante. Ahora queda más patente por qué no se puede hacer una definición directa de simetría en índices de diferente naturaleza, sin encontrar antes un proceso de asignación de un vector covariante a cada vector contravariante.

La definición clásica y la intrínseca son equivalentes a efectos de simetría. Comprobémoslo utilizando un tensor T tipo $(2, 1)$ simétrico en sus índices contravariantes,

$$T_k^{ij} = T_k^{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{v}] = \mathsf{T}[\mathsf{b}, \mathsf{a}, \mathsf{v}]$$

1. $\Rightarrow (T^{ij}_k = T^{ji}_k)$ La expresión en coordenadas es

$$\begin{aligned} T\,[\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{v}] &= T^{ij}_k a_i b_j v^k \\ &= T^{ji}_k a_i b_j v^k \\ &= \mathsf{T}\,[\mathsf{b},\mathsf{a},\mathsf{v}] \end{aligned}$$

por tanto la definición clásica implica la definición intrínseca.

2. $\Leftarrow (T\,[\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{v}] = T\,[\mathsf{b},\mathsf{a},\mathsf{v}])$

$$\begin{aligned} T^{ij}_k &= \mathsf{T}\left[dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= \mathsf{T}\left[dx^j, dx^i, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= T^{ji}_k \end{aligned}$$

escribimos el tensor en componentes:

$$\mathsf{T} = T^{pq}_r \frac{\partial}{\partial x^p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^q} \otimes dx^r$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\left[dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] &= \left(T^{pq}_r \frac{\partial}{\partial x^p} \otimes \frac{\partial}{\partial x^q} \otimes dx^r\right)\left[dx^i, dx^j, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= T^{pq}_r \frac{\partial}{\partial x^p}\left[dx^i\right] \frac{\partial}{\partial x^q}\left[dx^j\right] dx^r \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\right] \\ &= T^{pq}_r \delta^i_p \delta^j_q \delta^r_k \\ &= T^{ij}_k \end{aligned}$$

2.6.2. Tensores contravariante y covariantemente simétricos

Se dice que un tensor es contravariantemente (covariantemente) simétrico (en el sentido clásico) si es simétrico bajo el intercambio de cualquier par de índices contravariantes (covariantes). En el formalismo intrínseco, el tensor debe ser simétrico respecto de la permuta de cualquier par de argumentos contravariantes (covariantes).

Se dice que un tensor es totalmente simétrico si es contravariantemente y covariantemente simétrico. Nos interesa a menudo considerar tensores totalmente simétricos, y dentro de ellos los que son completamente contravariantes o covariantes.

2.6.3. Tensores totalmente simétricos, totalmente contravariantes

Definición

tensor contravariantemente simétrico se dice de un tensor que es contravariantemente simétrico si es simétrico en cualquier par de índices contravariantes. Si consideramos tensores totalmente contravariantes (tipo $(r,0)$) totalmente simétricos, constatamos que hay un subconjunto de las componentes que sirve para caracterizarlos completamente: $T^{i_1 \ldots i_r}$ con $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r \leq m$ (secuencia no decreciente de índices) determina completamente el tensor.

Ejemplo si tenemos T^{123} también tenemos $T^{123} = T^{312} = T^{132} = T^{321}$.

El conjunto de los tensores totalmente simétricos se suele denotar $S^r_{0\,P}[M]$, y constituye un subespacio lineal del espacio lineal $\mathsf{T}^r_{0\,P}[M]$. Las combinaciones lineales

$$\begin{aligned} \mathsf{Q} &= a\mathsf{T} + b\mathsf{P} \\ Q^{i_1 \ldots i_r} &= aT^{i_1 \ldots i_r} + bP^{i_1 \ldots i_r} \end{aligned}$$

de tensores T y P simétricos dan lugar a un $\mathsf{Q} \in S^r_{0\,P}[M]$.

$S^2_{0\,P}[M]$ es isomorfo al conjunto de las matrices simétricas 2×2, y tiene el siguiente número de elementos independientes:

$$\begin{aligned} \binom{m}{2} + m &= \frac{m!}{2!\,(m-2)!} + m \\ &= \frac{m\,(m-1)}{2} + m \\ &= m\frac{m+1}{2} \end{aligned}$$

De manera heurística basta con percatarse de que hay $\frac{m \times m}{2}$ elementos independientes, más la diagonal, que a su vez tiene $\frac{m}{2}$.

Ejercicio Demostrar que la dimensión del espacio en general para un tensor $(r, 0)$ es $\binom{m+r-1}{r}$.

Simetrización de un tensor $(r, 0)$

Dado un tensor T de tipo $(r, 0)$ a partir de él podemos definir un tensor totalmente simétrico $\mathsf{T_s} \in S^r_{0\,P}[M]$, así:

$$\mathsf{T_s}[\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_r] = \frac{1}{r!} \sum_{(1 \ldots r)} \mathsf{T}[\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_r]$$

donde la suma se extiende a todas las posibles permutaciones de índices, $(1 \ldots r)$.

Ejemplos Vamos a simetrizar un tensor de tipo $(2, 0)$ y otro $(3, 0)$, tanto de forma intrínseca como según la definición clásica:

$$\begin{aligned} \mathsf{T_s}[\mathsf{a}, \mathsf{b}] &= \frac{1}{2}\left(\mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{b}] + \mathsf{T}[\mathsf{b}, \mathsf{a}]\right) \\ T^{ij}_{\mathsf{s}} &= \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right) \end{aligned}$$

la simetrización de un objeto $(3, 0)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{T_s}[\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}] &= \frac{1}{6}\left(\mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}] + \mathsf{T}[\mathsf{a}, \mathsf{c}, \mathsf{b}] + \mathsf{T}[\mathsf{c}, \mathsf{a}, \mathsf{b}] + \mathsf{T}[\mathsf{c}, \mathsf{b}, \mathsf{a}] + \mathsf{T}[\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{a}] + \mathsf{T}[\mathsf{b}, \mathsf{a}, \mathsf{c}]\right) \\ T^{ijk}_{\mathsf{s}} &= \frac{1}{6}\left(T^{ijk} + T^{ikj} + T^{kij} + T^{jik} + T^{jki} + T^{kji}\right) \end{aligned}$$

Como puede imaginarse, con un objeto $(4, 0)$ la suma se extiende a 24 términos, etc.

Producto tensorial simétrico

La operación de simetrización permite definir un tipo especial de producto tensorial que a partir de dos tensores produce un tensor también totalmente simétrico.

El producto tensorial de dos tensores simétricos $\mathsf{T} \in S^{r_1}_{0\,P}[M]$ y $\mathsf{P} \in S^{r_1}_{0\,P}[M]$ no es, en general, simétrico:

$$\mathsf{T} \otimes \mathsf{P} \notin S^{r_1+r_2}_{0\,P}[M]$$

así que definimos el producto tensorial simétrico (que admite argumentos tensoriales *de cualquier tipo de simetría o falta de ella*) como la composición del producto tensorial habitual y la operación de simetrización

$$\begin{array}{rcl} \otimes_{\mathsf{s}} \equiv (\quad)_{\mathsf{s}} \circ \otimes : T^{r_1}_{0\,P}[M] \times T^{r_2}_{0\,P}[M] & \longrightarrow & S^{r_1+r_2}_{0\,P}[M] \\ (\mathsf{T}, \mathsf{P}) & \longmapsto & \mathsf{T} \otimes_{\mathsf{s}} \mathsf{P} \equiv (T \otimes P)_{\mathsf{s}} \end{array}$$

podemos construir una base del espacio tensorial $S^{r}_{0\,P}[M]$ utilizando el producto tensorial simétrico de elementos de la base del espacio tangente (si es r veces contravariante) o cotangente.

Ejemplo Base de $S^{2}_{0\,P}[M]$. En virtud de la simetría $(\mathsf{T} \otimes \mathsf{P})_{\mathsf{s}} = (\mathsf{P} \otimes \mathsf{T})_{\mathsf{s}}$ se puede escribir $(\mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2)_{\mathsf{s}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\mathsf{s}}$ como el producto normal, $\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2$, que también es conmutativo. Tomamos todos los elementos de la base, realizamos sus productos tensoriales simétricos y los ordenamos de menor a mayor:

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1\mathsf{e}_2 &= \frac{1}{2}(\mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_1) \\ \mathsf{e}_2\mathsf{e}_1 &= \frac{1}{2}(\mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2) \end{aligned}$$

Para $S^{3}_{0\,P}[M]$ uno de los 10 elementos de la base es[4]:

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1 \otimes_{\mathsf{s}} \mathsf{e}_2 \otimes_{\mathsf{s}} \mathsf{e}_3 &\doteq \mathsf{e}_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_3 \\ &= \frac{1}{6}(\mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_3 + \mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_3 \otimes \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_3 \otimes \mathsf{e}_1 + \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_3 + \mathsf{e}_3 \otimes \mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2 + \mathsf{e}_3 \otimes \mathsf{e}_2 \otimes \end{aligned}$$

(hay otros 9, como $\mathsf{e}_1\mathsf{e}_1\mathsf{e}_2$) que cumplen las ordenaciones de índices posibles. Si hacemos actuar la base del espacio tangente (simetrizada) sobre elementos de la base del espacio cotangente, e^i al ser

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_j\left[\mathsf{e}^i\right] &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left[dx^i\right] \\ &= \delta^i_j \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathsf{e}_1\mathsf{e}_2\mathsf{e}_3\left[\mathsf{e}^1, \mathsf{e}^2, \mathsf{e}^3\right] &= \left((\mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_3)\left[\mathsf{e}^1, \mathsf{e}^2, \mathsf{e}^3\right]\right)_{\mathsf{s}} \\ &= \left(\mathsf{e}_1\left[\mathsf{e}^1\right]\mathsf{e}_2\left[\mathsf{e}^2\right]\mathsf{e}_3\left[\mathsf{e}^3\right]\right)_{\mathsf{s}} \\ &= \frac{1}{6}\left((\mathsf{e}_1 \otimes \mathsf{e}_2 \otimes \mathsf{e}_3)\left[\mathsf{e}^1, \mathsf{e}^2, \mathsf{e}^3\right] + 0 + \ldots + 0\right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

[4] $\doteq$ indica una igualdad formal, como cuando se iguala el producto vectorial a un determinante imposible que oficia de regla mnemotécnica.

Problema: la actuación la base de tensores contravariantes (simétricos) sobre la base de tensores covariantes no da 1 como podríamos esperar. Eso es por culpa del proceso de simetrización, que ha introducido un factor$\frac{1}{r!}$.

2.6.4. Tensores totalmente antisimétricos, totalmente covariantes

Los tensores totalmente antisimétricos totalmente covariantes son la base algebraica para las formas diferenciales.

Consideremos el tensor T de componentes $T_{j_1 \ldots j_s}$, totalmente covariante (tipo $(0, s)$) y totalmente antisimétrico. Basta con dar las componentes con sus índices ordenados de menor a mayor $1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq m$, pero no se pueden repetir, porque en ese caso el valor de la componente correspondiente se tendría que anular:

$$0 = T_{iik} = -T_{iik}$$

Se puede obtener una componente cuyos índices no observen la ordenación descrita introduciendo un signo negativo por cada permutación de índices a partir de un conjunto de índices ordenados

$$T_{321} = -T_{312} = T_{132} = -T_{123}$$

El espacio de los tensores completamente antisimétricos de tipo $(0, s)$, $\Lambda^0_{s\,P}[M]$ es un subespacio lineal de $T^0_{s\,P}[M]$.

El número componentes independientes de un tensor de $\Lambda^0_{s\,P}[M]$ es $\binom{m}{s}$.

Ejemplo el número de componentes de un objeto de $\Lambda^0_{2\,P}$ es

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2!\,(m-2)!} = \frac{m\,(m-1)}{2}$$

Antisimetrización

A partir de un tensor no antisimétrico, $\mathsf{T} \in T^0_{s\,P}[M]$ podemos construir un tensor totalmente antisimétrico, $\mathsf{T}_\mathsf{a} \in \Lambda^0_{s\,P}[M]$ del siguiente modo:

$$\mathsf{T}_\mathsf{a}[\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s] = \frac{1}{s!} \sum_{(1 \ldots s)} (-1)^\sigma\, \mathsf{T}[\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s]$$

donde σ es el signo de la permutación. En componentes, podemos denotar $T_{\mathsf{a},ij}$ por $T_{[ij]}$.

Ejemplo para un tensor dos covariante:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_\mathsf{a}[\mathsf{v}, \mathsf{w}] &= \frac{1}{2!}\left(\mathsf{T}[\mathsf{v}, \mathsf{w}] - \mathsf{T}[\mathsf{w}, \mathsf{v}]\right) \\ T_{[ij]} &= \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \end{aligned}$$

y para un tres covariante:

$$\begin{aligned} \mathsf{T}_\mathsf{a}[\mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{x}] &= \frac{1}{3!}\left(\mathsf{T}[\mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{x}] - \mathsf{T}[\mathsf{v}, \mathsf{x}, \mathsf{w}] + \mathsf{T}[\mathsf{x}, \mathsf{v}, \mathsf{w}] - \mathsf{T}[\mathsf{w}, \mathsf{v}, \mathsf{x}] + \mathsf{T}[\mathsf{w}, \mathsf{x}, \mathsf{v}] - \mathsf{T}[\mathsf{x}, \mathsf{w}, \mathsf{v}]\right) \\ T_{[ijk]} &= \frac{1}{3!}\left(T_{ijk} - T_{ikj} + T_{kij} - T_{jik} + T_{jki} - T_{kji}\right) \end{aligned}$$

Producto tensorial antisimétrico

Es un producto tensorial que conserva la antisimetría *si* los argumentos son a su vez antisimétricos. Atención, no debe confundirse con el producto exterior, que definiremos más adelante (ver **??** en la página ??). Si $\mathsf{F} \in \Lambda_{s_1}$ y $\mathsf{G} \in \Lambda_{s_2}$, $\mathsf{F} \otimes \mathsf{G} \notin \Lambda_{s_1+s_2}$. Construyamos

$$\begin{array}{rcl} \otimes_{\mathsf{a}} \equiv (\quad)_{\mathsf{a}} \circ \otimes : \Lambda^0_{s_1\,P}[M] \times \Lambda^0_{s_2\,P}[M] & \rightarrow & \Lambda^0_{s_1+s_2\,P}[M] \\ (\mathsf{F}, \mathsf{G}) & \mapsto & \mathsf{F} \otimes_{\mathsf{a}} \mathsf{G} \equiv (\mathsf{F} \otimes \mathsf{G})_{\mathsf{a}} \end{array}$$

El interés de estos tensores aparece en conexión con los determinantes y su interpretación geométrica como áreas o volúmenes. Es natural utilizar estos recintos como espacios de integración, lo que conducirá a justificar la utilidad de las formas diferenciales.

Todo lo anterior está referido a una carta en particular (ver razonamientos en la definición de campo tensorial en la página 55).

Ejemplos Un campo tensorial de especial interés es la métrica riemanniana o semiriemanniana, que es de tipo $(0,2)$ (totalmente covariante), totalmente simétrico, de tipo $\mathcal{C}^k$ y no degenerado ($\Leftrightarrow \forall \mathsf{v} \neq 0\ \exists \mathsf{w} : g[\mathsf{v}, \mathsf{w}] \neq 0$, es decir g tiene inversa). Dado el campo tensorial *métrica riemanniana* g,

$$\mathsf{g}[\mathsf{v}, \mathsf{w}] = g_{ij} v^i w^j$$

es una forma cuadrática diagonalizable, cuya signatura, la serie de signos de elementos de la diagonal, es la misma en todos los puntos de la variedad. Esto quiere decir que una métrica definida positiva (riemanniana) debe serlo en todos los puntos de la variedad. Cuando la signatura es $- - \ldots +$ ó $+ - - \ldots -$ se dice que la métrica es lorentziana o de Minkowski. En todo otro caso, la métrica es pseudo (o semi) riemanniana.

2.6.5. Campos tensoriales y simetría

Como los campos tensoriales no son más que una aplicación que asigna a cada punto de la variedad un tensor, definirlos como simétricos o antisimétricos se reduce a imponer la simetría (antisimetría) de los tensores correspondientes a cada punto:

$$T^{i_1 \ldots i_p \ldots i_q \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\left[x^1 \ldots x^m\right] = (\pm)\, T^{i_1 \ldots i_q \ldots i_p \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}\left[x^1 \ldots x^m\right]$$

2.7. Campos vectoriales, curvas integrales y flujos

Imaginemos un vector $\mathsf{v} \in T_P[M]$ y una función $f \in \mathcal{F}^\infty[M]$. $\mathsf{v}[f]$ indica cuál es la variación de f a lo largo de la dirección indicada por el vector tangente v en P. Buscamos generalizar esto para campos tensoriales, intentando definir cuál es la variación de un campo tensorial en la dirección indicada por determinado campo de vectores. En esencia esto nos conduce al concepto de *derivada de Lie*. Para ello debemos introducir las curvas integrales asociadas a un campo vectorial y el flujo de dicho campo.

Un campo vectorial se puede interpretar usando la clásica analogía del fluido, en la que la trayectoria de una partícula se asimila a las curvas integrales y donde la evolución de un volumen de fluido da la idea de flujo.

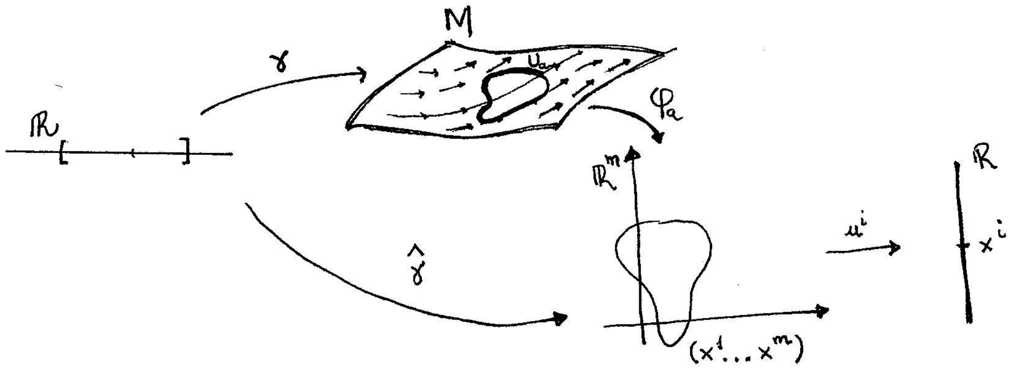


Figura 2.1: Campo vectorial sobre la variedad. Las curvas integrales enhebran el campo.

2.7.1. Curvas integrales

Una curva definida sobre una variedad es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [a,b] \in \mathbb{R} & \rightarrow & M \\ t & \mapsto & \gamma\,[t] = P \end{array}$$

El campo vectorial asigna a cada punto de la variedad un vector (figura 2.1). Si el vector coincide en cada punto de la curva con su vector tangente, la curva es una *curva integral*.

¿Cómo se refleja esto en la estructura diferenciable de la variedad?. La aplicación en coordenadas es:

$$\begin{array}{rcl} \hat{\gamma} \equiv \varphi_a \circ \gamma : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & \left(x^1\,[t] \ldots x^m\,[t]\right) \end{array}$$

y su diferencial

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} : T_t\,[\mathbb{R}] & \rightarrow & T_P\,[M] \\ a\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & \mapsto & \mathsf{v} \end{array}$$

en coordenadas

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}\hat{\gamma}}{\mathrm{d}t} \equiv \varphi_a \circ \dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} : T_t\,[\mathbb{R}] & \rightarrow & T_{\varphi_a[\gamma[t]]}\,[\mathbb{R}^m] \\ a\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & \mapsto & \left(\dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \ldots \dfrac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}\right) \end{array}$$

Como era de esperar, si queremos encontrar precisamente estas curvas *enhebradoras*, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. La condición para hallar la curva es que su vector tangente en cada punto sea igual al vector v del campo vectorial en ese punto:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \mathsf{v}|_{\gamma[t]} \tag{2.11}$$

ecuación que se puede llevar a coordenadas utilizando la aplicación de carta:

$$\begin{aligned} \frac{d\left[\varphi_a^i \circ \gamma\right]}{dt} &= v^i \left[\varphi_a \circ \gamma\left[t\right]\right] \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= v^i \left[x^1\left[t\right] \ldots x^m\left[t\right]\right] \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

donde φ_a^i no es más que la coordenada i ($\varphi_a^i = u^i \circ \varphi_a$), de modo que $\varphi_a^i \circ \gamma$ no es más que, abusando de la notación, la coordenada x^i de la curva:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = v^i \left[x^1\left[t\right] \ldots x^m\left[t\right]\right] \quad i = 1 \ldots m \tag{2.12}$$

sistema de m ecuaciones ordinarias para las funciones x^i. Para determinar la curva integral (que será única por el teorema de existencia y unicidad) debemos aportar una condición inicial (dar un punto cualquiera de la curva, $\left(t, x^1 \ldots x^m\right)$).

Ejemplo Consideremos el siguiente campo de vectores,

$$\mathsf{v} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

Para calcular sus curvas integrales debemos imponer las siguientes condiciones (un sistema de ecuaciones ordinarias):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= x^2 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= z \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -y \end{aligned}$$

la solución de la primera ecuación, que está desacoplada, es

$$x = \frac{1}{t_0 - t}$$

combinando las otras dos

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -y$$

con lo que $y = A\sin t + B\cos t$ y $z = y' = A\cos t - B\sin t$. Para $t = 0$ se cumple

$$x_0 = \frac{1}{t_0} \quad y_0 = B \quad z_0 = A$$

por lo que la solución se expresa en función de los datos iniciales del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x\left[t\right] &= -\frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \\ y\left[t\right] &= z_0 \sin t + y_0 \cos t \\ z\left[t\right] &= z_0 \cos t - y_0 \cos t \end{aligned}$$

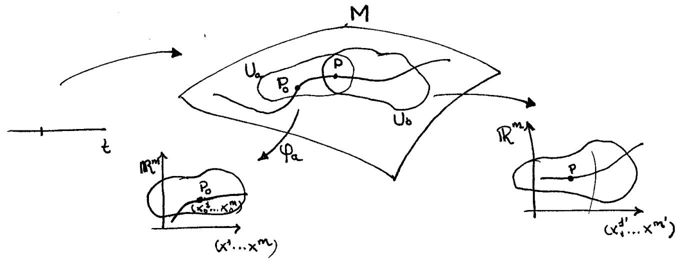


Figura 2.2: Curvas integrales en una variedad recubierta por varias cartas.

En el ejemplo anterior hemos cubierto la variedad con una sola carta. Si tuviésemos varias cartas (figura 2.2), para cada una de ellas deberíamos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tomaríamos una carta (U_a, φ_a) tal que $P_0 \in U_a$ e integraríamos el sistema diferencial a lo largo de toda su extensión. En la carta (U_b, φ_b), que necesariamente deberá solapar con la anterior, deberíamos buscar un punto, perteneciente a la intersección, P. Así vamos *cosiendo* las curvas, utilizando el conjunto de cartas para resolver en cada región un sistema diferente de ecuaciones diferenciales ordinarias (tipo 2.12). Para $t = 0$ (punto P_0) tendremos $x^i[0] = x_0^i$, trabajando en U_a, mientras que para $t = \tau$ (punto $P \in U_b$) se cumplirá

$$\frac{\mathrm{d}x^{i'}}{\mathrm{d}t} = v^{i'}\left[x^{1'}[t] \ldots x^{m'}[t]\right]$$

La garantía de continuidad la aporta el hecho de que v es $\mathcal{C}^\infty$. Aunque haya zonas en las que tenemos dos parametrizaciones, éstas no son contradictorias. Cuando ocurre que todas las curvas integrales de un campo vectorial pueden extenderse para todo t, se dice que se trata de un campo vectorial *completo.*

Existencia y unicidad de curvas integrales (teorema) Sean v un campo vectorial contravariante de clase $\mathcal{C}^\infty$ definido en $E \subset M$, $P \in E$ un punto de dicha variedad y c un número real. Entonces existe una única curva integral γ y un número real r tal que γ está definida en $(t - c) < r$ y $\gamma[c] = P$.

Esto quiere decir que en torno a P localmente existe una única curva integral que pasa por P.

La unicidad se interpreta del siguiente modo: si $\exists$ otra curva $\hat{\gamma}[t]$ en la intersección de dominios de definición ($|t - c| < r$ y $|t - c| < \hat{r}$) las dos curvas son la misma.

2.7.2. Flujo de un campo vectorial

Se denomina *flujo* al conjunto de vectores tangentes a una curva integral. Así el flujo define una clase de curvas en un punto, o, de otro modo, obtenemos la curva integral integrando las ecuaciones diferenciales ordinarias del flujo.

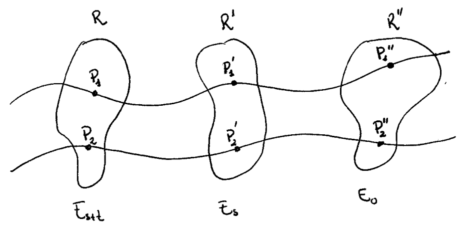


Figura 2.3: Evolución de un volumen de fluido mediante el flujo. $P_1 = \gamma_{P_1}[0]=\mu_0[P_1]$, $P_1' = \gamma_{P_1}[s] = \mu_s[P_1]$, $P_1'' = \gamma_{P_1}[s+t] = \mu_{s+t}[P_1]$, $P_2 = \gamma_{P_2}[0] = \mu_0[P_2]$, $P_2' = \gamma_{P_2}[s] = \mu_s[P_2]$, $P_2'' = \gamma_{P_2}[s+t] = \mu_{s+t}[P_2]$. $E_{s+t} \to E_t \to E_0$.

Definición

Un recinto R se hace evolucionar con el tiempo a R' y posteriormente a R''. Cada punto se transporta con la variación del parámetro de la curva integral que le corresponde (s en la figura 2.3). El campo vectorial a través de sus curvas integrales determina el flujo de un recinto con el parámetro. Se define el flujo de un campo vectorial como el conjunto de aplicaciones μ_s que van de un subconjunto $E_s \subset E$ de la variedad a la variedad M.

$$\begin{array}{rcl} \mu_s : \mathbb{R} \times E_s & \to & M \\ (s, P) & \mapsto & \mu_s[P] = \gamma_P[s] \end{array}$$

El conjunto E_s está formado por todos los puntos de E tales que su curva integral se puede extender hasta el valor del parámetro s, una definición *ad hoc* del dominio para que μ_s sea efectivamente una función (se podría dar el caso de que la curva integral que pasa por un punto no fuese extensible para todos los valores del parámetro $s \in \mathbb{R}$). Para cada valor del parámetro tendremos un subconjunto E_s, dependiente tanto de la regularidad del campo como de la curva integral. Para cada valor del parámetro s tenemos una aplicación, y el conjunto de todas estas aplicaciones μ_s es lo que llamamos *flujo del campo vectorial.*

Se trata de una definición invariante frente a reparametrizaciones, porque la parametrización es la dada por el sistema de ecuaciones diferenciales que hemos resuelto para hallar las curvas integrales.

Propiedades

1. Si los dominios de μ_s y μ_t están bien definidos, entonces $\mu_t \circ \mu_s = \mu_{s+t}$ (figura 2.3). El único problema puede darlo el dominio de definición, por lo que hay que restringirlo a la intersección de ambos.

2. $\mu_s \circ \mu_{-s} = 1$.

Los flujos constituyen un *grupo uniparamétrico de transformaciones*[5].

2.8. Derivada de Lie

La derivada de Lie permite estudiar la variación de un campo tensorial T no sólo sobre curvas coordenadas, x^μ, sino sobre curvas las curvas integrales de un campo cualquiera, v:

$$\mathsf{v} = v^\mu \left[x^1 \dots x^m\right] \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Dos transformaciones generales

Sea una transformación F

$$\begin{aligned} F : M &\rightarrow M \\ P &\mapsto \tilde{P} \\ \hat{F} \equiv \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \left(x^1 \dots x^m\right) &\mapsto \left(\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^m\right) \end{aligned}$$

aceptemos que podemos expresar P y $\tilde{P}$ en un mismo sistema de coordenadas, $\tilde{x}^\mu = F\left[x^1 \dots x^m\right]$ abusando de la notación. La aplicación inversa la denotamos por G (por conveniencia notacional):

$$\begin{aligned} G : M &\rightarrow M \\ \tilde{P} &\mapsto P \\ \hat{G} \equiv \varphi_1 \circ G \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \left(\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^m\right) &\mapsto \left(x^1 \dots x^m\right) \end{aligned}$$

y $x^\nu = G^\nu\left[\tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^m\right]$ abusando una vez más de la notación.

Sistema de coordenadas arrastrado

Definimos el *sistema de coordenadas arrastrado correspondiente a la aplicación* F como el sistema de coordenadas (denotado por primas) tal que el punto $\tilde{P}$ tiene *las mismas* coordenadas una vez arrastrado (primas) que tenía P sin arrastrar (sin primas).

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{\mu'} &\equiv \delta^{\mu'}_{\mu} x^\mu \\ &= x^{\mu'} \end{aligned} \tag{2.13}$$

El punto P lo podemos expresar en términos de las coordenadas de $\tilde{P}$, sin más que utilizar G:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{\mu'} &= \delta^{\mu'}_{\mu} x^\mu \\ &= \delta^{\mu'}_{\mu} G^\mu\left[\tilde{x}^\nu\right] \end{aligned}$$

[5] Recibe el nombre de grupo uniparamétrico de transformaciones del conjunto R la familia $\{\mu_s\}$ de aplicaciones del conjunto M en sí mismo, numeradas con el conjunto de los números reales que cumplen las propiedades enunciadas. Se trata de un grupo conmutativo de aplicaciones biunívocas. Ver [Arnold].

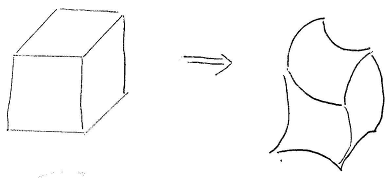


Figura 2.4: F transforma puntos y deforma las bases, $x^i \mapsto \tilde{x}^i$.

supongamos relleno el dominio de definición por una gelatina (figura 2.4), marcada por una malla. La transformación F deforma la gelatina (traslación, giro, estiramiento...). Al efectuar esta operación obtenemos una nueva malla, caracterizada por el sistema de coordenadas primas. Las coordenadas de un punto respecto al original deben ser las mismas que la del transformado respecto al sistema de coordenadas deformado.

campo tensorial arrastrado dado un campo tensorial T_k^{ij} se define el campo tensorial arrastrado de modo que sus componentes en el punto transformado $\left(\tilde{P}\right)$ y en el sistema de coordenadas transformado (con primas) sean las mismas que el original tenía en el punto y sistema de partida. Por ejemplo, para $\mathsf{T} \in T_1^2\left[M\right]$

$$\hat{T}_{k'}^{i'j'}\left[\tilde{P}\right] = \delta_i^{i'}\delta_j^{j'}\delta_{k'}^{k}T_k^{ij}\left[P\right]$$

En términos de la gelatina, si tenemos un vector en cada punto de la gelatina–dominio, la flechita deformada por la aplicación tendrá con respecto al sistema deformado las mismas componentes que tenía la flechita original en el sistema sin deformar.

Arrastre por un flujo

Sea el flujo

$$\begin{array}{rcl} \mu_\varepsilon : E_\varepsilon \subset M & \rightarrow & M \\ P & \mapsto & \tilde{P} \end{array}$$

asociado a un campo vectorial v cuyas curvas integrales se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = v^\mu\left[x^k\left[t\right]\right]$$

En coordenadas el flujo arrastra de P a $\tilde{P}$ según la siguiente aplicación (a primer orden)

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon v^\mu + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{2.14}$$

despejando

$$x^\mu = \tilde{x}^\mu - \varepsilon v^\mu + O\left(\varepsilon^2\right)$$

es la aplicación inversa, G.

Según la definición de sistema de coordenadas arrastrado, (ecuación 2.13), las componentes del punto transformado (con tilde) en el sistema prima serán las mismas que las del punto sin transformar (sin tilde) en el sistema de coordenadas de partida (sin primas):

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{\mu'} &= \delta_{\mu}^{\mu'} x^{\mu} \\ &= \delta_{\mu}^{\mu'} \left(\tilde{x}^{\mu} - \varepsilon v^{\mu}\right)\end{aligned}$$

El sistema de coordenadas nuevo se define por el siguiente cambio (cambio directo)

$$x^{\mu'} = \delta_{\mu}^{\mu'} \left(x^{\mu} - \varepsilon v^{\mu}\right) \tag{2.15}$$

Manipulando la expresión anterior

$$\begin{aligned}\delta_{\mu'}^{\nu} x^{\mu'} &= \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\mu}^{\mu'} \left(x^{\mu} - \varepsilon v^{\mu}\right) \\ &= \delta_{\mu}^{\nu} \left(x^{\mu} - \varepsilon v^{\mu}\right) \\ &= x^{\nu} - \varepsilon v^{\nu}\end{aligned}$$

se llega a la relación que permite volver del nuevo sistema de coordenadas (aquel en el que las coordenadas no varían al arrastrar) al viejo (cambio inverso)

$$x^{\nu} = \delta_{\mu'}^{\nu} x^{\mu'} + \varepsilon v^{\nu} \tag{2.16}$$

Ambos cambios 2.15 y 2.16 están escritos en aproximación lineal, $O\left(\varepsilon^2\right)$.

¿Cómo definimos un tensor arrastrado? Queremos expresar el tensor arrastrado por el flujo en función del tensor antes de arrastrar. Debemos calcular las matrices jacobianas del cambio de coordenadas[6]

$$T_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{j'}} T_{j}^{i}$$

en el sistema de coordenadas arrastrado (con primas), para lo cual nos servimos de las ecuaciones de cambio 2.15 y 2.16. Así obtenemos ambas jacobianas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} &= \delta_{\mu}^{\mu'} \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \varepsilon \frac{\partial v^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \\ &= \delta_{\mu}^{\mu'} \left(\delta_{\alpha}^{\mu} - \varepsilon v_{,\alpha}^{\mu}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \qquad (2.17)\end{aligned}$$

[6]Elegimos un tensor (1,1) para ilustrar el apartado por que es el más simple con jacobianas de los dos tipos.

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} &= \delta^{\nu}_{\mu'}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\beta'}} + \varepsilon\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} \\ &= \delta^{\nu}_{\mu'}\delta^{\mu'}_{\beta'} + \varepsilon\frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{k}}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{\beta'}} \\ &= \delta^{\nu}_{\beta'} + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\delta^{k}_{\beta'} \\ &= \delta^{\nu}_{k}\delta^{k}_{\beta'} + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\delta^{k}_{\beta'} \\ &= \delta^{k}_{\beta'}\left(\delta^{\nu}_{k} + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\right) \qquad (2.18)\end{aligned}$$

en el desarrollo anterior se ha utilizado que

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^{k}}{\partial x^{s'}} &= \delta^{k}_{s'}\frac{\partial x^{s'}}{\partial x^{\beta'}} \\ &= \delta^{k}_{s'}\delta^{s'}_{\beta'} \\ &= \delta^{k}_{\beta'} + O\left(\varepsilon\right)\end{aligned}$$

y se ha denotado la derivación respecto a una variable precediéndola de una coma y ubicándola como subíndice.

Es conveniente para lo que sigue resumir el cambio de coordenadas por el que se define el sistema de coordenadas arrastrado. Es

$$x^{\mu'} = \delta^{\mu'}_{\mu}\left(x^{\mu} - \varepsilon v^{\mu}\right) \qquad (2.19)$$

$$x^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu'}x^{\mu'} + \varepsilon v^{\nu} \qquad (2.20)$$

con los jacobianos:

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu'}_{\mu}\left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \varepsilon v^{\mu}_{,\alpha}\right) \qquad (2.21)$$

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} = \delta^{k}_{\beta'}\left(\delta^{\nu}_{k} + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\right) \qquad (2.22)$$

(todo a $O\left(\varepsilon^{2}\right)$).

Definición de la derivada de Lie

Sean T un campo tensorial y v un campo vectorial contravariante. Se define la derivada de Lie de T a lo largo de v como:

$$\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{T} \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\mathsf{T}}\left[x^{\mu}\right] - \mathsf{T}\left[x^{\mu}\right]}{\varepsilon}$$

donde $\tilde{\mathsf{T}}$ es el campo tensorial arrastrado a lo largo del flujo μ_{ε} del campo v. Nótese que ambos campos son evaluados en el punto P (de coordenadas x^{μ}).

2.8.1. Derivada de Lie de un campo $(1,0)$

Sea w un campo vectorial contravariante. El campo vectorial arrastrado, $\tilde{\mathsf{w}}$, se define así:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{\mu'}\left[x^k+\varepsilon v^k\right] &= \delta^{\mu'}_{\mu} w^{\mu}\left[x^k\right] \\ \tilde{w}^{\mu'}\left[x^k\right] &= \delta^{\mu'}_{\mu} w^{\mu}\left[x^k-\varepsilon v^k\right] \end{aligned}$$

desarrollando Taylor:

$$\tilde{w}^{\mu'}\left[x^k\right] = \delta^{\mu'}_{\mu}\left(w^{\mu}\left[x^k\right] - \varepsilon w^{\mu}_{,k} v^k + O\left(\varepsilon^2\right)\right)$$

tenemos las componentes en el sistema prima, y las que queremos son las del sistema sin prima. La componente μ-ésima de la derivada de Lie es

$$(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{w})^{\mu} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{w}^{\mu}\left[x^k\right] - w^{\mu}\left[x^k\right]}{\varepsilon}$$

el campo vectorial arrastrado

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{\nu}\left[x^k\right] &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}}\tilde{w}^{\mu'}\left[x^k\right] \\ &= \delta^k_{\mu'}\left(\delta^{\nu}_k + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\right)\delta^{\mu}_{\mu'}\left(w^{\mu} - \varepsilon w^{\mu}_{,k} v^k\right) \\ &= \delta^k_{\mu}\left(\delta^{\nu}_k + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\right)\left(w^{\mu} - \varepsilon w^{\mu}_{,i} v^i\right) \\ &= \left(\delta^{\nu}_k + \varepsilon v^{\nu}_{,k}\right)\left(w^k - \varepsilon w^k_{,i} v^i\right) \\ &= \delta^{\nu}_k w^k + \varepsilon\left(-\delta^{\nu}_k w^k_{,i} v^i + v^{\nu}_{,k} w^k\right) \\ &= w^{\nu} + \varepsilon\left(-w^{\mu}_{,i} v^i + v^{\nu}_{,k} w^k\right) \end{aligned}$$

Finalmente, la componente ν-ésima de la derivada de Lie de w a lo largo de v se escribe

$$(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{w})^{\nu} = w^{\nu}_{,k} v^k - v^{\nu}_{,k} w^k$$

o, abusando peligrosamente de la notación, $\mathcal{L}_{\mathsf{v}} w^{\nu}$. El segundo término refleja la deformación de la base. La derivada de Lie de un campo vectorial a lo largo de otro es el conmutador de ambos:

$$\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{w} = [\mathsf{v},\mathsf{w}]$$

Idea geométrica: no sirven como coordenadas w y v a menos que su conmutador (derivada de Lie) sea nulo.

En general, arrastrando P primero según w y después según v no se obtiene el mismo resultado que operando en el orden opuesto (ver figura 2.5). La diferencia entre $\tilde{P}'$ y P'' es, a segundo orden, la derivada de Lie.

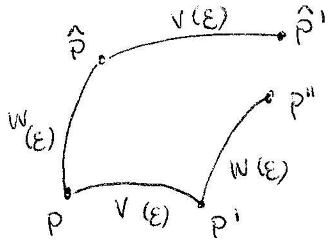


Figura 2.5: Interpretación geométrica de la derivada de Lie. $P \to P'$ curvas integrales de v. $P' \to P''$ curvas integrales de w.

2.8.2. Derivada de Lie de un campo $(1,1)$

La derivada de Lie es un campo tensorial del mismo tipo que su argumento. Su expresión para un tensor $(1,1)$ contiene dos términos correctivos:

$$(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{T})^\mu_\nu = T^\mu_{\nu,k}v^k - T^k_\nu v^\mu_{,k} + T^\mu_k v^k_{,\nu}$$

Para calcularla nos valemos de las relaciones de cambio al sistema arrastrado, 2.19,2.20,2.21 y 2.22:

$$\tilde{T}^{\mu'}_{\nu'}\left[x^k+\varepsilon v^k\right] = \delta^{\mu'}_\mu \delta^\nu_{\nu'} T^\mu_\nu \left[x^k\right]$$

con lo que

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{\mu'}_{\nu'}\left[x^k\right] &= \delta^{\mu'}_\mu \delta^\nu_{\nu'} T^\mu_\nu \left[x^k-\varepsilon v^k\right] \\ &= \delta^{\mu'}_\mu \delta^\nu_{\nu'}\left(T^\mu_\nu\left[x^k\right] - \varepsilon T^\mu_{\nu,k}v^k\left[x^k\right]\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{T}^r_s\left[x^k\right] &= \frac{\partial x^r}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial s}\tilde{T}^{\mu'}_{\nu'}\left[x^k\right] \\ &= \delta^\beta_{\mu'}\left(\delta^r_\beta + \varepsilon v^r_{,\beta}\right)\delta^{\nu'}_l\left(\delta^l_s - \varepsilon v^l_{,s}\right)\delta^{\mu'}_\mu \delta^\nu_{\nu'}\left(T^\mu_\nu - \varepsilon T^\mu_{\nu,k}v^k\right)\end{aligned}$$

utilizando las expresiones de los jacobianos del cambio de coordenadas y $\tilde{T}^{\mu'}_{\nu'}\left[x^k\right]$ hasta orden ε. Simplificando:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^r_s\left[x^k\right] &= \delta^\beta_\mu \delta^\nu_l\left(\delta^r_\beta + \varepsilon v^r_{,\beta}\right)\left(\delta^l_s - \varepsilon v^l_{,s}\right)\left(T^\mu_\nu - \varepsilon T^\mu_{\nu,k}v^k\right) \\ &= \left(\delta^r_\beta + \varepsilon v^r_{,\beta}\right)\left(\delta^l_s - \varepsilon v^l_{,s}\right)\left(T^\beta_l - \varepsilon T^\beta_{l,k}v^l\right)\end{aligned}$$

y desarrollando hasta orden ε:

$$\begin{aligned}\tilde{T}^r_s\left[x^k\right] &= \delta^r_\beta \delta^l_s T^\beta_l + \varepsilon\left(-\delta^r_\beta \delta^l_s T^\beta_{l,k}v^k + v^r_{,\beta}\delta^l_s T^\beta_l - \delta^r_\beta v^l_{,s}T^\beta_l\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \\ &= T^r_s + \varepsilon\left(-T^r_{s,k}v^k + v^r_{,\beta}T^\beta_s - v^l_{,s}T^r_l\right) + O\left(\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

debemos comprobar que tras las contracciones no sobran índices. Ahora tenemos que calcular la derivada de Lie, objetivo inicial.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{T})^r_s &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{T}^r_s - T^r_s}{\varepsilon} \\
&= T^r_{s,k}v^k - T^k_s v^r_{,k} + T^r_k v^k_{,s}
\end{aligned}
$$

Interpretación el primer término es la derivada direccional del tensor según v. Los otros términos tienen signo positivo si el término en que se corrige (aquel en que se suma) es covariante, y negativo si es contravariante. Si el campo vectorial es constante (por ejemplo, $\frac{\partial}{\partial x}$), entonces los términos correctivos (que llevan derivadas de sus componentes) se anulan.

2.8.3. Isometrías

La derivada de Lie nos da la variación del campo tensorial visto al moverse según un arrastre dado por un campo vectorial v. Cuando el tensor de partida es igual al de llegada se dice que el campo vectorial *deja invariante* el tensor arrastrado. Un caso particularmente interesante se produce cuando se trata de una métrica (campo tensorial simétrico, dos veces covariante, no degenerado y tal que la signatura es la misma en todos los puntos de la variedad). Supongamos que tenemos un campo vectorial v que la deja invariante,

$$\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g} = 0$$

entonces al movernos con el flujo los productos escalares y los ángulos no varían. A estos campos vectoriales tan interesantes se los denomina *isometrías* o *campos de Killing*. Estos campos dan bastante información sobre las propiedades de la métrica por lo que nos interesa obtener su forma más general para la métrica dada.

Siguiendo la regla mnemotécnica descrita en el apartado anterior,

$$(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,k}v^k + g_{k\nu}v^k_{,\mu} + g_{\mu k}v^k_{,\nu}$$

es igual a 0 para todo campo que deja invariante la métrica. La derivada de Lie, como tensor, debe tener todos sus elementos cero, lo que proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en v^k.

Ejemplo tomemos la métrica de la esfera:

$$ds^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$d\varphi^2$ significa producto tensorial simétrico de $d\varphi \otimes_{\mathsf{s}} d\varphi$. Esto nos dice simplemente que las componentes del tensor en estas coordenadas son:

$$
\begin{aligned}
g_{\theta\theta} &= a^2 \\
g_{\varphi\theta} = g_{\theta\varphi} &= 0 \\
g_{\varphi\varphi} &= a^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

el campo vectorial v lo escribimos como

$$\mathsf{v} \equiv v^{\theta}[\theta,\varphi]\frac{\partial}{\partial\theta} + v^{\varphi}[\theta,\varphi]\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

tenemos anulación de todas las componentes de la derivada de Lie:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\theta\theta} &= 0\\ &= g_{\theta\theta,k}v^{k} + g_{k\theta}v^{k}_{,\theta} + g_{\theta k}v^{k}_{,\theta}\end{aligned}$$

como $g_{\theta\theta}$ es una constante el primer término se anula. Además, $g_{k\theta} = g_{\theta k}$ por la simetría

$$\begin{aligned}0 &= 2g_{\theta k}v^{k}_{,\theta}\\ &= 2g_{\theta\theta}v^{\theta}_{,\theta} + 2g_{\theta\varphi}v^{\varphi}_{,\theta}\\ &= 2a^{2}v^{\theta}_{,\theta}\end{aligned}$$

En la otra coordenada.

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\theta\varphi} &= g_{\varphi\varphi}v^{\varphi}_{,\theta} + g_{\theta\theta}v^{\theta}_{,\varphi}\\ &= a^{2}\sin^{2}\theta v^{\varphi}_{,\theta} + a^{2}v^{\theta}_{,\varphi}\end{aligned}$$

la anulación de la componente $(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\theta\theta}$ nos dice que $v^{\theta}_{,\theta} = 0$ y por tanto $v^{\theta} = h[\varphi]$ y la de $(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\theta\varphi} = (\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\varphi\theta}$ que

$$\sin^{2}\theta v^{\varphi}_{,\theta} + v^{\theta}_{,\varphi} = 0$$

La anulación de la componente $(\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\mathsf{g})_{\varphi\varphi}$ implica:

$$\begin{aligned}0 &= g_{\varphi\varphi,k}v^{k} + g_{k\varphi}v^{k}_{,\varphi} + g_{\varphi k}v^{k}_{,\varphi}\\ &= g_{\varphi\varphi,k}v^{k} + 2g_{\varphi k}v^{k}_{,\varphi}\\ &= g_{\varphi\varphi,\theta}v^{\theta} + 2g_{\varphi\varphi}v^{\varphi}_{,\varphi}\end{aligned}$$

ya que $g_{\varphi\varphi,\varphi}v^{\varphi}$ y $g_{\varphi\theta}v^{\theta}_{,\varphi}$ son términos nulos. De aquí:

$$2a^{2}\sin\theta\cos\theta v^{\theta} + 2a^{2}\sin^{2}\theta v^{\varphi}_{,\varphi} = 0$$

como $a \neq 0$ se tiene

$$v^{\varphi}_{,\varphi} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}v^{\theta} = 0$$

el sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales que debemos integrar es

$$\begin{aligned}v^{\theta}_{,\theta} &= 0\\ v^{\theta}_{,\varphi} + \sin^{2}\theta v^{\varphi}_{,\theta} &= 0\\ v^{\varphi}_{,\varphi} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}v^{\theta} &= 0\end{aligned}$$

la primera condición nos dice que $v^{\theta} = h[\varphi]$. Por otra parte, $v^{\theta}_{,\varphi} = \dot{h}[\varphi]$ y $\sin^{2}\theta v^{\varphi}_{,\theta} + \dot{h} = 0$ de donde

$$\begin{aligned}v^{\varphi} &= -\dot{h}\int\frac{1}{\sin^{2}\theta}d\theta + g[\varphi]\\ &= \dot{h}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + g[\varphi]\end{aligned}$$

es la solución general. La tercera ecuación es

$$\begin{aligned}\ddot{h}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dot{g} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}h &= 0\\ \left(\ddot{h}+h\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dot{g} &= 0\end{aligned}$$

como esto ha de verificarse para todo θ lo anterior implica que

$$\begin{aligned}\ddot{h}+h &= 0\\ \dot{g} &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto $h = A\cos\varphi + B\sin\varphi$ y $g = C$. En conclusión,

$$\begin{aligned}v^\theta &= A\cos\varphi + B\sin\varphi\\ v^\varphi &= (-A\sin\varphi + B\cos\varphi)\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + C\end{aligned}$$

el campo vectorial es, agrupando las constantes:

$$\mathsf{v} = A\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + B\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + C\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

finalmente, los generadores son

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \xi_2 &= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

Si $\mathsf{v} = \frac{\partial}{\partial x}$ la derivada de Lie respecto a v es sólo la derivada respecto a x. El tercer generador deberíamos haberlo adivinado desde el principio, por la forma de la derivada de Lie. Que la métrica no dependa respecto a una variable, por ejemplo y implica que el campo vectorial $\frac{\partial}{\partial y}$ deja invariante la métrica.

Se puede intentar resolver el sistema de ecuaciones sustituyendo la primera en la tercera, pero es un poco más difícil. Uno puede preguntarse qué vale el conmutador en este caso. Comprobaremos que el conmutador, en este caso, deja invariante la métrica. El conmutador es un nuevo campo vectorial.

$$\begin{aligned}[\xi_1,\xi_3]\,f &= \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right] - \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left[\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\theta} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right]\\ &= \cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varphi} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - \left(-\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi\partial\theta} - \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi} - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)\end{aligned}$$

por igualdad de las derivadas cruzadas

$$[\xi_1,\xi_3] = +\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

contribuyen las derivadas sobre los coeficientes, porque las derivadas segundas se cancelan siempre. Ahora nos damos cuenta de un hecho curioso:

$$[\xi_1,\xi_3] = \xi_2$$

el conmutador es, efectivamente un campo vectorial. Vamos a calcular ahora este otro conmutador:

$$\begin{aligned}[\xi_1, \xi_2] &= \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} - \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ &= -\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \sin\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

con lo que

$$[\xi_1, \xi_2] = -\xi_3$$

análogamente se calcula que $[\xi_2, \xi_3] = -\xi_1$. El conmutador de dos campos que dejan invariante una métrica es un campo que la deja invariante. De hecho esta propiedad, que es general, permite afirmar que estos campos forman un grupo de Lie ($SO(3)$). "Se ve, o por lo menos, se intuye".

2.9. Definición axiomática de la derivada de Lie

Podemos abordar una definición alternativa de la derivada de Lie extrayendo de entre las propiedades de una derivada de arrastre las que determinan de modo completo y unívoco la operación.

Sea v un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$ M entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si T es un campo tensorial de tipo (r, s) y clase $\mathcal{C}^\infty$ $\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T}$ es un campo tensorial de tipo (r, s) de clase $\mathcal{C}^\infty$.
2. $\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T}$ tiene las mismas propiedades de simetría o antisimetría que tiene T.
3. Dados dos campos tensoriales T, S del mismo tipo, $\mathcal{L}_\mathsf{v}[\mathsf{T} + \mathsf{S}] = \mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T} + \mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{S}$.
4. Para dos campos tensoriales de cualquier tipo $\mathcal{L}_\mathsf{v}[\mathsf{T} \otimes \mathsf{S}] = \mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T} \otimes \mathsf{S} + \mathsf{T} \otimes \mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{S}$ (propiedad tipo Leibniz).
5. $\mathcal{L}_\mathsf{v}$ conmuta con las contracciones.
6. $\mathcal{L}_\mathsf{v} f = \mathsf{v}[f]$ con $f \in \mathcal{F}^\infty[M]$.
7. $d[\mathcal{L}_\mathsf{v} f] = \mathcal{L}_\mathsf{v}[df]$ (derivada exterior, ver 3.3).
8. $\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{w} = [\mathsf{v}, \mathsf{w}]$ (w un campo vectorial contravariante $\mathcal{C}^\infty$).
9. $\mathcal{L}_{\mathsf{v}+\mathsf{w}}\mathsf{T} = \mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T} + \mathcal{L}_\mathsf{w}\mathsf{T}$, si λ es una constante, $\mathcal{L}_{\lambda\mathsf{v}}\mathsf{T} = \lambda\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T}$.
10. $\mathcal{L}_\mathsf{v}[\mathcal{L}_\mathsf{w}\mathsf{T}] - \mathcal{L}_\mathsf{w}[\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T}] = \mathcal{L}_{[\mathsf{v},\mathsf{w}]}\mathsf{T}$.

Si v, w son dos campos–killing y T es una métrica, $\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T} = 0$, $\mathcal{L}_\mathsf{w}\mathsf{T} = 0$ por la propiedad 10 $\mathcal{L}_{[\mathsf{v},\mathsf{w}]}\mathsf{T} = 0$. Por lo tanto, como hemos visto en el ejemplo, el conmutador de dos campos de killing es a su vez un campo de killing.

Ejemplo (propiedad 5) Vamos a comprobar para un tensor $(1,1)$, $\mathsf{T} = T_v^u$ que la derivada de Lie y la contracción conmuta (podemos hacerlo en cualquier orden), $(\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T})_\mu^\mu = \mathcal{L}_\mathsf{v}\left(T_\mu^\mu\right)$, ya que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mathsf{v} T_\mu^\mu &= \mathsf{v}\left[T_\mu^\mu\right] \\
&= T_{\mu,k}^\mu v^k \\
(\mathcal{L}_\mathsf{v}\mathsf{T})_\nu^\mu &= T_{\nu,k}^\mu v^k - T_\nu^k v_{,k}^\mu + T_k^\mu v_{,\nu}^k \\
(\mathcal{L}_\mathsf{v} T)_\mu^\mu &= T_{\mu,k}^\mu v^k - T_\mu^k v_{,k}^\mu + T_k^\mu v_{,\mu}^k \\
&= \mathcal{L}_\mathsf{v} T_\mu^\mu
\end{aligned}$$

El resto de demostraciones se hacen análogamente, con paciencia.

2.10. Por hacer

1. Completar la introducción.

2. Experimentar con la notación $\partial_i^{i'} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, que parece más clara y compacta; es preciso explicarla correctamente e introducirla poco a poco.

3. Introducir la contracción en notación funcional. ¿Alguna idea?.

4. En 2.4.4 introducir un enlace a la explicación de bases duales del capítulo 1.

5. Otra notación compacta:

$$\begin{aligned}
x &\equiv x^1 \ldots x^m \\
x' &\equiv x^{1'} \ldots x^{m'}
\end{aligned}$$

   con

$$x\left[x'\right] \equiv \left\{x^1\left[x^{1'} \ldots x^{m'}\right] \ldots x^m\left[x^{1'} \ldots x^{m'}\right]\right\}$$

   y tal vez

$$\frac{\partial x}{\partial x'} \equiv \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}$$

6. Introducir notación estándar para *el conjunto de todas las permutaciones de un conjunto de índices* (en el apartado 2.6.3).

7. Dar una definición correcta del concepto de *signatura*.

8. Resolver dudas sobre la naturaleza de los argumentos del producto antisimetrizado.

9. Explicar mejor la definición matemática de curva integral. Aclarar.

3 Formas diferenciales

En este capítulo trataremos de unos objetos de gran interés para la física: las formas diferenciales. En primer lugar daremos su definición, basada en los conceptos tensoriales que ya conocemos. En segundo lugar, explicaremos el concepto de producto exterior en este contexto, ejemplificando su uso, para después definir la derivada exterior y relacionarla con los operadores familiares del cálculo vectorial.

La segunda parte del capítulo está dedicada a describir las aplicaciones de la teoría de formas en la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales (teorema de Fröbenius) así como las nuevas perspectivas que aporta para entender la estructura del espacio de fases de la mecánica hamiltoniana.

3.1. Concepto de forma diferencial

r-**forma diferencial** la forma diferencial ω^s es un campo tensorial de tipo[1] $(0, s)$ (totalmente covariante) y totalmente antisimétrico de clase[2] $\mathcal{C}^k$.

Las formas diferenciales son los objetos que aparecen dentro de las integrales. En efecto, la integral de línea de un campo vectorial (P, Q, R) a lo largo de una curva γ es,

$$I_1 = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

y la forma diferencial correspondiente, $\omega^1 = Pdx+Qdy+Rdz$. Si se trata de una integral de superficie de un campo vectorial (P, Q, R),

$$I_2 = \int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

y la forma diferencial es $\omega^2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Para una integral de volumen

$$I_3 = \int_\Omega fdxdydz$$

es $\omega^3 = fdx \wedge dy \wedge dz$ (las tres formas presentadas están definidas sobre $\mathbb{R}^3$).

[1] Es importante aclarar un extremo de la notación: cuando quiera que escribamos ω^r debe leerse "forma diferencial ω de grado r" o "r-forma diferencial ω". Habitualmente reservaremos esta notación comprimida a los enunciados de las proposiciones mientras que en los cálculos usaremos simplemente ω; el grado de la forma podrá deducirse de los enunciados precedentes.

[2] En este capítulo, salvo indicación en contrario, todas las formas consideradas y las respectivas variedades sobre las que se definan, serán $\mathcal{C}^\infty$.

La regla de transformación de una forma diferencial frente a un cambio de coordenadas se puede deducir a partir de las de un integrando. Para una forma en dos dimensiones,

$$\begin{aligned} I &= \int_S f dx dy \\ &= \int_S f\left[x\left[u,v\right],y\left[u,v\right]\right]\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}\right| dudv \\ &= \int_S f\left[x\left[u,v\right],y\left[u,v\right]\right]\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) dudv \end{aligned}$$

la forma diferencial de esta integral es

$$\begin{aligned} \omega^2 &= f\left[x,y\right] dx\wedge dy \\ &= f\left[x\left[u,v\right],y\left[u,v\right]\right]\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du\wedge dv \end{aligned}$$

Nos percatamos aquí de la antisimetría de la forma diferencial.

Sobre estas formas diferenciales podemos definir diversas operaciones que nos permiten generalizar resultados del cálculo vectorial ya conocidos. En particular, llegaremos hasta el teorema de Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega$$

Gracias al teorema de Fröbenius y a la definición de la derivada exterior como una operación que cumple $d\left(d\omega\right)=0$ (condición equivalente a la igualdad de las parciales cruzadas), un sistema de ecuaciones en derivadas parciales podrá reescribirse por medio de la derivación exterior.

3.2. Producto exterior

3.2.1. Definición

producto exterior El producto exterior de α^r por β^s, denotado $\alpha\wedge\beta$ es la $(r+s)$-forma diferencial que tiene la siguiente expresión:

$$\alpha^r\wedge\beta^s\equiv\frac{(r+s)!}{r!s!}\left(\alpha\otimes\beta\right)_{\mathsf{a}} \tag{3.1}$$

donde el factor numérico obedece a una convención[3].

[3] Sean por ejemplo $\alpha=dx$ y $\beta=dy$. Su producto antisimétrico es $\left(\alpha\otimes\beta\right)_{\mathsf{a}}=\frac{1}{2}\left(dx\otimes dy-dy\otimes dx\right)$, sin embargo, su producto exterior según ha sido definido en 3.1 es:

$$\begin{aligned} \alpha\wedge\beta &= \frac{(1+1)!}{1!1!}\left(\alpha\otimes\beta\right)_{\mathsf{a}} \\ &= dx\otimes dy-dy\otimes dx \end{aligned}$$

Recordemos cómo se realiza la operación de antisimetrización sobre un tensor de s argumentos (vectores covariantes):

$$\mathsf{T}_{\mathsf{a}}\left[\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s\right] = \frac{1}{s!} \sum_{(1\ldots s)} (-1)^{\sigma}\, \mathsf{T}\left[\mathsf{v}_1 \ldots \mathsf{v}_s\right]$$

La definición de producto exterior como producto tensorial antisimétrico se extiende a un campo tensorial evaluándolo sobre todos los puntos de la variedad.

3.2.2. Propiedades

Sean $\alpha^r, \beta^r, \gamma^p, \delta^q$ formas diferenciales de los respectivos órdenes. Se verifican las siguientes propiedades

1. Asociativa: $\alpha \wedge (\gamma \wedge \delta) = (\alpha \wedge \gamma) \wedge \delta$
2. Distributiva: $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$
3. (Anti)conmutativa: $\alpha \wedge \gamma = (-1)^{rp}\, \gamma \wedge \alpha$

La tercera propiedad simplemente señala que dos formas cualesquiera conmutan salvo si ambas son de grado impar, en cuyo caso anticonmutan. Dos consecuencias destacables de la propiedad 3 son:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= -dy \wedge dx \\ dx \wedge dx &= 0 \end{aligned}$$

en efecto, multipliquemos α^r y β^p:

$$\left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right) \wedge \left(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}\right) = (-1)^{rp} \left(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}\right) \wedge \left(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}\right)$$

En ciertas referencias se definen axiomáticamente las formas diferenciales precisamente a partir de este comportamiento.

Esto será relevante cuando la forma actúe sobre dos campos vectoriales, $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] &= (dx \wedge dy)\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= dx\left[\frac{\partial}{\partial x}\right] dy\left[\frac{\partial}{\partial y}\right] - dy\left[\frac{\partial}{\partial x}\right] dx\left[\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

por la dualidad de las bases $\{dx, dy\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$. Constatamos que la convención que hemos adoptado (que se emplea en gran parte de la literatura) tiene sentido en la medida en que mantiene la propiedad de que al actuar la base covariante sobre la base contravariante el resultado es 1.

Ejemplo Sea $\dim[M] = 3$, $\omega = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3$ y $\alpha = \alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3$, entonces:

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \alpha &= (-1)^2 \alpha \wedge \omega = \alpha \wedge \omega \\
&= \left(\omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 + \omega_3 dx^3\right) \wedge \left(\alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3\right) \\
&= \omega_1 \alpha_{23} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \omega_2 \alpha_{13} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \omega_3 \alpha_{12} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&= (\omega_1 \alpha_{23} - \omega_2 \alpha_{13} + \omega_3 \alpha_{12}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
\end{aligned}$$

porque aplicando la propiedad 3 los términos con factores repetidos se anulan y las permutaciones circulares permiten agrupar los coeficientes de los restantes, introduciendo un signo negativo cuando la permutación es impar.

3.2.3. Base de formas

¿Cómo construimos las bases?. Sea una variedad de dimensión m, y un sistema de coordenadas en torno a $P \in M$, $x^1 \ldots x^m$. Para 1-formas diferenciales la base es $\{dx^1 \ldots dx^m\}$ y la expresión de un elemento cualquiera es $\omega = \omega_1 \left[x^1 \ldots x^m\right] dx^1 + \ldots + \omega_m \left[x^1 \ldots x^m\right] dx^m$. La dimensión del espacio de 1-formas es $\dim\left[\Lambda^1[M]\right] = m$.

La base de las 2-formas es

$$\left\{dx^i \wedge dx^j\right\}_{1 \le i < j \le m}$$

con $\binom{m}{2}$ elementos (dimensión del espacio). Las 2-formas se expresan en general así: $\alpha^2 = \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j$ asumiendo una ligera modificación para el convenio de índices: no se suma a todos los índices, sino sólo en aquellos que verifican el orden $1 \le i < j \le m$. Por ejemplo, con $m = 3$, $\alpha = \alpha_{12} \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{23} \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \alpha_{13} \wedge dx^1 \wedge dx^3$.

Para las 3 -formas se tiene la base

$$\left\{dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k\right\}_{1 \le i < j < k \le m}$$

y $\Omega = \Omega_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$. Si $m = 3$ se tiene en particular

$$\Omega = \Omega_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Nótese que toda forma diferencial de grado mayor que la dimensión de la variedad se anula, porque se repiten factores dx^i. Es decir, sobre una variedad de $m = 3$ no existen 4-formas.

base de una r-forma en el sistema de coordenadas $x^1 \ldots x^m$ para un punto P de la variedad M:

$$\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}\right\}$$

La expresión de una forma en esta base es $(1 \le i_1 < \ldots < i_r \le m)$:

$$\beta^r = \beta_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

y su número de componentes algebraicamente independientes (la *dimensión* de la forma) es $\binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$.

Ya que $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ las r-formas y las $(m-r)$-formas tienen exactamente el mismo número de componentes. Esto es claro en $m = 3$: las 1-formas y las 2-formas tienen ambas tres componentes. Esta relación entre formas de distinto grado se conoce como *dualidad de Hodge*: se puede establecer una aplicación biyectiva entre r-formas y $(m-r)$-formas.

3.3. Derivada exterior

La derivada exterior es una operación sobre formas diferenciales que, entre otras aplicaciones, permite recuperar las expresiones en coordenadas correspondientes a los conocidos operadores vectoriales gradiente, divergencia y rotacional. En primer lugar vamos a definirla a la manera clásica (en términos de coordenadas) y después daremos un conjunto (definición axiomática) de propiedades que se demostrará suficiente para volver a la definición en coordenadas.

3.3.1. Definición clásica

derivada exterior sea ω^p tal que en un sistema de coordenadas se puede escribir como $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$. Se define la derivada exterior de ω, denotada $d\omega$ como la $(p+1)$-forma diferencial de clase $\mathcal{C}^\infty$ que tiene la expresión

$$d\omega = d\left[\omega_{i_1 \dots i_p}\right] \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{3.2}$$

La forma de calcularla es hacer la diferencial total de los coeficientes y multiplicar por la componente correspondiente:

$$d\left[\omega_{i_1 \dots i_p}\right] = \omega_{i_1 \dots i_p, \alpha} dx^\alpha$$

donde

$$\omega_{i_1 \dots i_p, \alpha} = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^\alpha}$$

así que

$$d\omega = \left(\omega_{i_1 \dots i_p, \alpha} dx^\alpha\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Ejemplo sea f una 0-forma. En dimensión 3 su derivada exterior es la 1-forma

$$df = f_{,x^1} dx^1 + f_{,x^2} dx^2 + f_{,x^3} dx^3$$

(la divergencia de la función). Sea ω una 1-forma:

$$\begin{aligned}
d\omega &= d\omega_1 \wedge dx^1 + d\omega_2 \wedge dx^2 + d\omega_3 \wedge dx^3 \\
&= \left(\omega_{1,1} dx^1 + \omega_{1,2} dx^2 + \omega_{1,3} dx^3\right) \wedge dx^1 + \left(\omega_{2,1} dx^1 + \omega_{2,2} dx^2 + \omega_{2,3} dx^3\right) \wedge dx^2 + \left(\omega_{3,1} dx^1 + \omega_{3,2} dx^2 + \omega_{3,3} dx^3\right) \\
&= \left(\omega_{2,1} - \omega_{1,2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\omega_{3,1} - \omega_{1,3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\omega_{3,2} - \omega_{2,3}\right) dx^2 \wedge dx^3 \\
&= \left(\omega_{j,i} - \omega_{i,j}\right) dx^i \wedge dx^j
\end{aligned}$$

Esto se asemeja a la expresión del rotacional (con $1 \leq i < j \leq 3$).

Ejemplo Si hacemos la derivada exterior de una 2-forma $\alpha = \alpha_{12}dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13}dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23}dx^2 \wedge dx^3$, obtenemos

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\alpha_{12} \wedge dx^1 \wedge dx^2 + d\alpha_{13} \wedge dx^1 \wedge dx^3 + d\alpha_{23} \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\alpha_{12,1}dx^1 + \alpha_{12,2}dx^2 + \alpha_{12,3}dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \\ &\quad + \left(\alpha_{13,1}dx^1 + \alpha_{13,2}dx^2 + \alpha_{13,3}dx^3\right) \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \left(\alpha_{23,1}dx^1 + \alpha_{23,2}dx^2 + \alpha_{23,3}dx^3\right) \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\alpha_{12,3} - \alpha_{13,2} + \alpha_{23,1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

El resultado es exactamente la divergencia de un campo vectorial F de componentes $F^1 = \alpha_{23,1}, F^2 = -\alpha_{13,2}, F^3 = \alpha_{12,3}$: $\nabla \cdot F = (\alpha_{23}, -\alpha_{13}, \alpha_{12})$. En forma integral el resultado obtenido no es más que, de nuevo, un caso particular del teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot F\, dv &= \int_S F \cdot ds \\ \int_V d\alpha &= \int_{\partial V} \alpha \end{aligned}$$

3.3.2. Propiedades (definición axiomática)

Sean α^p, β^p y γ^q formas diferenciales. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $d\left[\alpha + \beta\right] = d\alpha + d\beta$.
2. $d\left[\alpha \wedge \gamma\right] = d\alpha \wedge \gamma + (-1)^p\, \alpha \wedge d\gamma$. AntiLeibniz[4].
3. $$df\left[\mathsf{x}\right] = \mathsf{x}\left[f\right] \tag{3.3}$$
   para todo campo vectorial x contravariante $\mathcal{C}^\infty$ y función (0-forma) f.
4. $d\left[d\alpha\right] = 0, \forall \alpha$.

Ejemplo Probemos a calcular $d\left[dx \wedge dy \wedge dz\right]$ (p2, p4):

$$\begin{aligned} d\left[dx \wedge dy \wedge dz\right] &= d\left[dx\right] \wedge dy \wedge dz + (-1)\, dx \wedge d\left[dy \wedge dz\right] \\ &= -dx \wedge \left(d\left[dy\right] \wedge dz - dy \wedge d\left[dz\right]\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Análogamente podemos entender $d\left[dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right]$ como la derivada exterior de un producto $\wedge$ de una 1-forma por una $(p-1)$-forma. Iterando en la aplicación de p2, p4:

$$\begin{aligned} d\left[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right] &= d\left[\left(dx^{i_1}\right) \wedge \left(dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right)\right] \\ &= d\left[dx^{i_1}\right] \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} - dx^{i_1} \wedge d\left[dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\right] \\ &= \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

[4] Cuando la diferencial (d) “pasa por encima” de una 1-forma se multiplica por -1. $(-1)^p$ corresponde a las p 1-formas que “salta” la diferencial hasta llegar a γ.

En general, si tenemos $\omega^p = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ la expresión de su derivada exterior se calcula aplicando este procedimiento, con el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} d\omega &= d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + (-1)^0 \omega_{i_1 \dots i_p} \wedge d\left[dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right] \\ &= d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

Constatamos que la definición en coordenadas de la derivada exterior se puede deducir de la axiomática que hemos presentado.

La propiedad 3 (p3) implica en coordenadas que

$$df\,[\mathsf{x}] = \mathsf{x}\,[f] = x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

es decir, que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \tag{3.4}$$

Observación La condición $d\,[df] = 0$ (p4 aplicada a una 0-forma f) se puede reescribir teniendo en cuenta que $df = f_{,i} dx^i$ (ecuación 3.4) y (p2) $d\,[df] = (f_{,ij} - f_{,ji})\, dx^i \wedge dx^j$. Como vemos, p4 sobre f equivale a la igualdad de las parciales cruzadas.

3.3.3. Definición intrínseca

Sea una 0-forma diferencial df. Su actuación sobre un campo vectorial es $\mathsf{x}\,[f]$. Si tenemos una ω^1, $d\omega$ será una 2-forma, y para definirla tendremos que especificar cómo actúa sobre *dos* campos vectoriales x, y cualesquiera, siguiendo el mismo procedimiento que para la definición intrínseca de un tensor cualquiera:

$$d\omega\,[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = \mathsf{x}\,[\omega\,[\mathsf{y}]] - \mathsf{y}\,[\omega\,[\mathsf{x}]] - \omega\,[[\mathsf{x}, \mathsf{y}]] \tag{3.5}$$

En esta fórmula tenemos representadas todas las posibilidades de actuación de una forma sobre los campos vectoriales x, y: sobre uno, sobre otro y sobre su conmutador. Se observa una relación entre la derivada exterior y el conmutador de los campos vectoriales x, y. Hay una cierta dualidad que será de interés al estudiar el teorema de Fröbenius sobre la integrabilidad de sistemas de 1-formas sobre campos vectoriales.

Para demostrar 3.5 en coordenadas, *sólo* hay que aplicar $d\omega = (\omega_{i,j} - \omega_{j,i})\, dx^j \wedge dx^i$ sobre los dos argumentos expresados en coordenadas.

3.4. Producto interior

El producto interior de una forma diferencial ω^p por un campo vectorial x dará como resultado una forma diferencial α^{p-1}, de grado uno menor que el de partida.

producto interior sea ω^p una forma y x un campo vectorial contravariante de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una variedad diferenciable M. Se define la $(p-1)$-forma diferencial *producto interior de* x *por* ω y se denota $i_\mathsf{x}\omega$ o bien $\mathsf{x}\rfloor\omega$ mediante la siguiente expresión:

$$\alpha^{p-1}[\mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_{p-1}] = i_\mathsf{x}\omega[\mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_{p-1}] \equiv \omega[\mathsf{x},\mathsf{v}_1,\ldots,\mathsf{v}_{p-1}]$$

para cualesquiera campos vectoriales contravariantes $\mathsf{v}_1\ldots\mathsf{v}_{p-1}$. Para 0-formas $i_\mathsf{x}f\equiv 0$, $\forall$ campo vectorial x.

Esta expresión debe entenderse como que una $p-1$ forma actuando sobre $p-1$ argumentos que se identifica con la actuación de una p-forma ω sobre sus habituales p argumentos, con la particularidad de que el primero de ellos es fijo: el campo vectorial x. El resto de los argumentos de ω son los mismos que los de la $(p-1)$-forma.

El producto interior de la forma ω con el campo vectorial x es $i_\mathsf{x}\omega=\omega[\mathsf{x}]=\omega_k x^k$, una generalización del producto escalar ya conocidos: contracción de un campo contravariante con un campo covariante (1-forma ω). También se denota $\langle\omega|\mathsf{v}\rangle$. Los *bras* en física cuántica son 1-formas, mientras que los *kets* son vectores.

Veamos cómo actúa el producto interior del producto exterior de dos 1-formas α^1 y β^1 con x:

$$\begin{aligned} i_\mathsf{x}[\alpha\wedge\beta][\mathsf{v}] &= \alpha\wedge\beta[\mathsf{x},\mathsf{v}] \\ &= (\alpha\otimes\beta-\beta\otimes\alpha)[\mathsf{x},\mathsf{v}] \\ &= \alpha[\mathsf{x}]\beta[\mathsf{v}]-\beta[\mathsf{x}]\alpha[\mathsf{v}] \\ &= (i_\mathsf{x}\alpha)\beta[\mathsf{v}]-i_\mathsf{x}[\beta]\alpha[\mathsf{v}] \end{aligned}$$

esto nos dice que

$$i_\mathsf{x}[\alpha\wedge\beta]=(i_\mathsf{x}\alpha)\beta-\alpha i_\mathsf{x}\beta$$

Esta operación tiene una propiedad análoga a la regla de Leibniz, es una *antiderivación*. Estas consideraciones dan paso a la siguiente propiedad general, para el producto exterior de formas de grado arbitrario. La regla es de gran utilidad práctica.

propiedad sean α^p y β^q y x. Entonces se cumple que

$$i_\mathsf{x}[\alpha\wedge\beta]=i_\mathsf{x}[\alpha]\wedge\beta+(-1)^p\,\alpha\wedge i_\mathsf{x}[\beta] \tag{3.6}$$

Ejemplo sea ω^2 sobre $\mathbb{R}^3$: $\omega=\omega_{12}dx^1\wedge dx^2+\omega_{13}dx^1\wedge dx^3+\omega_{23}dx^2\wedge dx^3$. El producto interior $i_\mathsf{v}\omega$ de $\mathsf{v}=v^i\frac{\partial}{\partial x^i}, i=1\ldots 3$ es una operación lineal:

$$i_\mathsf{v}\omega=i_\mathsf{v}\left[\omega_{12}dx^1\wedge dx^2\right]+i_\mathsf{v}\left[\omega_{13}dx^1\wedge dx^3\right]+i_\mathsf{v}\left[\omega_{23}dx^2\wedge dx^3\right]$$

Desarrollamos el primer término[5]:

$$\begin{aligned} i_\mathsf{v}\left[\omega_{12}dx^1\wedge dx^2\right] &= i_\mathsf{v}\omega_{12}\wedge dx^1\wedge dx^2+\omega_{12}i_\mathsf{v}\left(dx^1\wedge dx^2\right) \\ &= \omega_{12}\left(\left(i_\mathsf{v}dx^1\right)dx^2-dx^1 i_\mathsf{v}dx^2\right) \\ &= \omega_{12}\left(v^1dx^2-v^2dx^1\right) \end{aligned}$$

[5]estamos siguiendo la notación de no escribir explícitamente $\wedge$ cuando el producto involucra una 0-forma, como ω_{12}. Esto es porque $\omega_{12}\wedge dx^1=dx^1\wedge\omega_{12}=\omega_{12}dx^1$. Pero en este caso puede ser más claro escribir $i_\mathsf{v}\left[\omega_{12}\wedge\left(dx^1\wedge dx^2\right)\right]$, haciendo el mismo uso de la asociatividad que cuando la derivada exterior.

donde se ha usado que $i_{\mathsf{v}}\omega_{12} = 0$ y que

$$i_{\mathsf{v}} dx^1 = dx^1 [\mathsf{v}] = dx^1 \left[v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right] = v^1 dx^1 \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \right] + v^2 dx^1 \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \right] + v^3 dx^1 \left[\frac{\partial}{\partial x^3} \right] = v^1$$

por ser $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ y $\{dx^i\}$ bases duales. Análogamente, $i_{\mathsf{v}} dx^2 = v^2$. Extrapolando a los otros términos,

$$\begin{aligned} i_{\mathsf{v}}\omega &= \omega_{12}\left(v^1 dx^2 - v^2 dx^1\right) + \omega_{13}\left(v^1 dx^3 - v^3 dx^1\right) + \omega_{23}\left(v^2 dx^3 - v^3 dx^2\right) \\ &= -\left(\omega_{12} v^2 + \omega_{13} v^3\right) dx^1 + \left(\omega_{12} v^1 - \omega_{23} v^3\right) dx^2 + \left(\omega_{13} v^1 + \omega_{23} v^2\right) dx^3 \end{aligned}$$

Ejemplo recordemos que F es un campo vectorial cuyas componentes se pueden relacionar con las de una 2-forma, $d\alpha$ (v. 3.3.1 en la página 84). Lo que justifica esto es la utilización del producto interior sobre el elemento de volumen de la variedad.

elemento de volumen es la forma diferencial Ω de orden máximo no nula de la variedad (orden m) multiplicada cuyo coeficiente es el determinante de la métrica asociada. Es necesario contar con una métrica para garantizar que los elementos de la base $\left\{dx^1 \ldots dx^m\right\}$ son de norma 1.

En este caso F es el campo vectorial tal que $i_F\Omega = \alpha$. En $\mathbb{R}^3$–euclídeo la métrica tiene determinante 1, así que

$$\Omega = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

tomando $F = F^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + F^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + F^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$ y usando las propiedades 3.3 en la página 84 y 3.6 en la página anterior desarrollamos $i_F\Omega$:

$$\begin{aligned} i_F\left[dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\right] &= i_F\left[dx^1\right] dx^2 \wedge dx^3 - dx^1\left(i_F\left[dx^2\right] dx^3 - dx^2 i_F dx^3\right) \\ &= dx^1[F]\, dx^2 \wedge dx^3 - dx^1 \wedge \left(dx^2[F]\, dx^3 - dx^2 dx^3[F]\right) \\ &= F^1 dx^2 \wedge dx^3 - F^2 dx^1 \wedge dx^3 + F^3 dx^1 \wedge dx^2 \\ &= \alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

en la última línea hemos impuesto $i_F[\Omega] = \alpha$, con lo que la identificación de coeficientes del ejemplo de 3.3.1 en la página 84 permite encontrar el F tal que las componentes de $d\alpha$ sean su divergencia.

Es muy fácil ahora, utilizando la métrica definida sobre la variedad asociar una 1-forma a F: $\omega_j = g_{ij}F^i$. Si recordamos la observación sobre la dualidad de Hodge de la 3.2.3 en la página 83 podemos darnos cuenta de que mediante este proceso hemos llegado a la forma dual (la 1-forma ω) de α (una 2-forma). Este proceso de encontrar la forma dual de grado $m-p$ de una forma de grado p en una variedad de dimensión m se puede resumir del siguiente modo:

$$\alpha^p \overset{i_F\Omega}{\longrightarrow} F \overset{\mathsf{g}}{\longrightarrow} \omega^{m-p}$$

Se trata de una operación que puede realizarse en sentido contrario, ya que g por ser una métrica (vg. un tensor no degenerado) tiene inversa g^{-1}.

$$\alpha^p \overset{i_F\Omega}{\longleftarrow} F \overset{\mathsf{g}^{-1}}{\longleftarrow} \omega^{m-p}$$

3.5. Derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial

Hay algunas secuencias de derivaciones que podemos hacer con un campo vectorial x y una forma diferencial ω^p que dejan invariado el grado de ésta última.

- Derivada de Lie de la forma diferencial ω a lo largo del campo vectorial x: $\mathcal{L}_{\mathsf{x}}\omega$
- Producto interior por x de la derivada exterior de ω: $i_{\mathsf{x}}d\omega$.
- Derivada exterior del producto interior por x de ω: $d\left[i_{\mathsf{x}}\omega\right]$

¿Existe alguna relación entre estas tres operaciones?. Respuesta: sí. Vamos a enunciar una propiedad que sirve para calcular la derivada de Lie de manera más sencilla.

propiedad sea ω^p una forma y x un campo vectorial contravariante ambos $\mathcal{C}^\infty$ definidos sobre M. Se cumple que[6]:

$$\mathcal{L}_{\mathsf{x}}\omega = i_{\mathsf{x}}d\omega + d\left[i_{\mathsf{x}}\omega\right] \tag{3.7}$$

De esta propiedad de aquí se obtiene una propiedad adicional que verifican la derivada de Lie y la derivada exterior. Bajo las mismas hipótesis de la propiedad se cumple que ambas operaciones conmutan:

$$d\left[\mathcal{L}_{\mathsf{x}}\omega\right] = \mathcal{L}_{\mathsf{x}}\left[d\omega\right]$$

mediante la propiedad 3.7 probamos el carácter conmutativo

$$\begin{aligned} d\left[\mathcal{L}_{\mathsf{x}}\omega\right] &= d\left[i_{\mathsf{x}}d\omega\right] + d\left[di_{\mathsf{x}}\omega\right] \\ &= d\left[i_{\mathsf{x}}d\omega\right] \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathsf{x}}\left[d\omega\right] &= i_{\mathsf{x}}d\left[d\omega\right] + d\left[i_{\mathsf{x}}d\omega\right] \\ &= d\left[i_{\mathsf{x}}d\omega\right] \end{aligned}$$

3.6. Aplicaciones diferenciables entre variedades y formas diferenciales

¿Cómo actúan sobre las formas diferenciales las aplicaciones diferenciables entre variedades?, y en particular ¿cómo se transforman las formas bajo cambios de coordenadas?.

Consideremos la figura 3.1 en la página siguiente. Dada una forma diferencial sobre V_b ¿puedo inducir por medio de F^{-1} una forma diferencial del mismo orden sobre el dominio de F en M?. La expresión en coordenadas de F (teniendo en cuenta el dominio

[6] Las tres operaciones son lineales. Pero mientras que la derivada de Lie (como la derivada ordinaria) satisface una regla tipo Leibniz (es una operación de *derivación*), la derivada exterior y el producto interior son *antiderivaciones*. Que las tres operaciones sean (anti)derivaciones implica que dada su actuación sobre 0-formas y 1-formas queda completamente definida su actuación sobre formas de grados superiores.

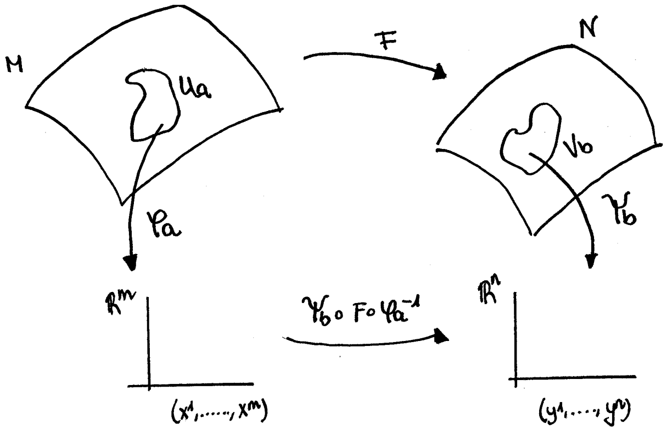


Figura 3.1: $\hat{F} \equiv \psi_b \circ F \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es la expresión en coordenadas de $F : M \to N$

en que está definida, v. tema 1) es:

$$\begin{array}{rcl} \hat{F} : \varphi_b \circ F \circ \varphi_a^{-1} : \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ \left(x^1 \dots x^m\right) & \mapsto & \left(y^1 \left[x^1 \dots x^m\right] \dots y^n \left[x^1 \dots x^m\right]\right) \end{array}$$

Dada una forma ω^p sobre N, $\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \left[y^1 \dots y^n\right] dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}$ podemos definir una p-forma en M, que se denota $F_\# \omega$ o $F_* \omega$:

$$F_\# \omega = \omega_{i_1 \dots i_p} \left[y^1 \left[x^1 \dots x^m\right] \dots y^n \left[x^1 \dots x^m\right]\right] d\left[y^{i_1} \left[x^1 \dots x^m\right]\right] \wedge \cdots \wedge d\left[y^{i_p} \left[x^1 \dots x^m\right]\right]$$

La transformación $F_\#$ lleva formas diferenciales de N a M ("tira para atrás") mientras que la aplicación iba de M a N, "tira para adelante". De ahí el nombre en inglés de $F_\#$: *pullback*.

Ejemplo $\omega = \sin[xy]\, dx \wedge dy + x^2 dz \wedge dy$. Véase la aplicación F en la figura 3.2 en la página siguiente

$$\begin{array}{rcl} \psi_b \circ F \circ \varphi_a : M & \to & N \\ (u, v) & \mapsto & \left(u + v, u^2, v^3\right) \end{array}$$

si $M \equiv \mathbb{R}^2$ y $N \equiv \mathbb{R}^3$ entonces las aplicaciones de carta φ, ψ son la identidad y la expresión en coordenadas de F es simplemente F. Construyamos el *pullback*:

$$\begin{aligned} F_\# \omega &= \sin\left[(u+v)\, u^2\right] d\left[u+v\right] \wedge d\left[u^2\right] + (u+v)^2\, d\left[v^3\right] \wedge d\left[v^2\right] \\ &= \sin\left[(u+v)\, u^2\right] (du + dv) \wedge 2u du + (u+v)^2\, 3v^2 dv \wedge 2v dv \\ &= -\left(2u \sin\left[(u+v)\, u^2\right] + 6uv^2 (u+v)^2\right) du \wedge dv \end{aligned}$$

Cómo cambia la forma diferencial bajo una transformación de coordenadas queda dado por el *pullback* entre dos variedades que son la misma. Si M es una subvariedad de N, la operación *pullback* consiste en restringir el dominio de la forma diferencial a la subvariedad M.

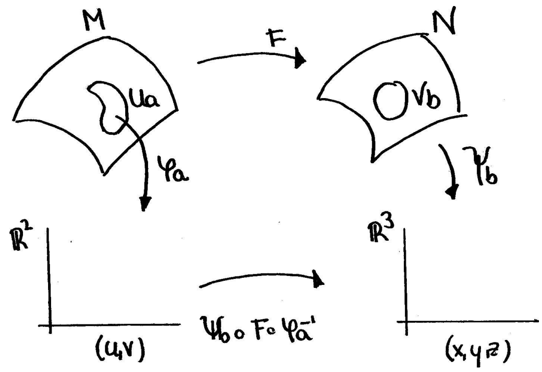


Figura 3.2: El pullback transporta la forma desde N hasta M

Ejemplo si $x = u, y = v, z = cte$ (M es un plano de N) se tiene $F_{\#}\omega = \sin[uv]\, du \wedge dv$ $(dz = 0)$.

Ejemplo sea $\omega = f[x, y]\, dx \wedge dy$ y $F = (x[u, v], y[u, v])$. Calcular $F_{\#}\omega$.

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (x[u, v], y[u, v]) \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_{\#}\omega &= f[x[u, v], y[u, v]]\, d[x[u, v]] \wedge d[y[u, v]] = \\ &= f[x[u, v], y[u, v]] \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ &= f[x[u, v], y[u, v]] \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv \end{aligned}$$

Como el *pullback* se realiza sobre la misma variedad no es más que un cambio de coordenadas donde aparece el jacobiano. Es la misma transformación que la que afecta al integrando de una integral de superficie en $\mathbb{R}^2$al realizar un cambio de coordenadas.

Cambiar el orden de las variables implica cambiar de carta. Por ello hay que asegurarse de que la variedad es orientable, es decir que podemos encontrar un atlas (no necesariamente máximo) tal que los jacobianos de todas las transformaciones de coordenadas tengan el mismo signo. Entonces se define como orientación positiva la correspondiente a un jacobiano positivo, por ejemplo. No todas las variedades son orientables (por ejemplo, la banda de Möbius o la botella de Klein no lo son).

Propiedades Sean α^p, β^p y γ^q formas diferenciales sobre N y sea F una aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$ entre dos variedades diferenciales M y N no necesariamente de la misma dimensión. Entonces el *pullback* cumple las siguientes propiedades:

1. $F_{\#}[\alpha + \beta] = F_{\#}\alpha + F_{\#}\beta$ (linealidad en la suma).
2. $F_{\#}[\alpha \wedge \beta] = F_{\#}\alpha \wedge F_{\#}\beta$ (linealidad en el producto exterior).
3. $F_{\#}[d\alpha] = d[F_{\#}\alpha]$ (conmuta con la derivada exterior).

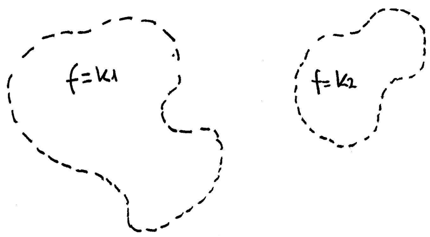


Figura 3.3: Una función sobre un dominio no conexo, $f = k_1, f = k_2$, $df = 0$.

3.7. Resultados de la teoría de formas

Esencialmente explicaremos el lema de Poincaré y el teorema de Fröbenius, útiles en el contexto de la teoría de ecuaciones diferenciales.

3.7.1. Lema de Poincaré

Para cualquier θ^p se cumple que $d\,[d\theta] = 0$. Por lo tanto si se cumple $\omega \equiv d\theta$ para algún θ, se tiene $d\omega = 0$. La pregunta es si el recíproco es cierto: ¿existe alguna θ tal que $\omega = d\theta$ si $d\omega = 0$?. La respuesta es que en general no. Si $f \in \mathcal{F}^\infty\,[M]$ la condición $df = 0$ no implica que $f = cte$ (véase la figura 3.3). En dimensiones bajas lo que nos preguntamos es si $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla\phi$. Para poder afirmarlo hay que exigir ciertas condiciones topológicas al dominio.

Lema de Poincaré Sea ω^p definida en un subconjunto en forma de estrella de la variedad M y tal que $d\omega = 0$. Existe una $(p-1)$-forma diferencial θ^{p-1} de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que se cumple que

$$\omega = d\theta$$

Si θ es una $p-1$ forma diferencial tal que $d\theta = \omega$, cualquier $\tilde{\theta} = \theta + d\beta$ también verifica que $d\tilde{\theta} = d\theta + d\,[d\beta] = \omega$, siendo β una $p-2$ forma diferencial arbitraria (una suerte de constante de integración).

dominio en forma de estrella se dice que un conjunto $H \in M$ tiene forma de estrella si existen un sistema de coordenadas y un punto $P \in H$ tal que para cualquier otro punto $Q \in H$ la recta que une P con Q está completamente contenida en H.

Lo que esto implica es que deben *existir* unas coordenadas tales que si se dibuja en ellas el conjunto se obtiene una figura tipo estrella alrededor de un cierto punto P dado (figura 3.4). Pero atención, en cualquier otro sistema de coordenadas la condición no tiene por qué cumplirse —H se deforma. Lo importante es que se cumpla en *algún* sistema de coordenadas: se trata de una condición topológica. Si $\omega = \omega_{i_1\ldots i_p}\left[x^1\ldots x^m\right]dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ y $d\omega = 0$, θ tal que $d\theta = \omega$ se calcula en coordenadas del siguiente modo:

$$\theta = \left(\int_{t=0}^{t=1} t^{p-1}\omega_{k\,i_1\ldots i_{p-1}}\left[tx^1\ldots tx^m\right]x^k dt\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p-1}} \tag{3.8}$$

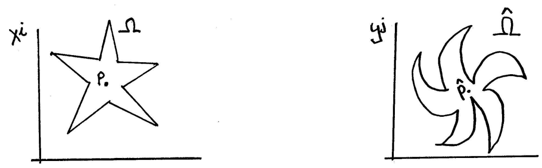


Figura 3.4: Dominio en forma de estrella $P = \left(x_0^1 \dots x_0^m\right)$ y $Q = \left(x_1^1 \dots x_1^m\right)$, $x^\mu = x_0^\mu + t\left(x_1^\mu - x_0^\mu\right)$ con $t \in [0,1]$

El ingrediente fundamental es que cuando $t = 0$ el recinto de integración colapsa a un punto. La garantía de independencia del resultado del camino es justamente la condición $d\omega = 0$. Una vez que sabemos que es así, escogemos la trayectoria de integración más sencilla: una recta. Esto nos obliga a imponer que el conjunto sea tipo estrella[7]. Para probar que esto es así sólo hay que calcular la derivada exterior de la expresión dada para θ.

forma cerrada ω es aquella que verifica $d\omega = 0$.

forma exacta ω es exacta si podemos expresarla como derivada exterior de otra: $\omega = d\theta$.

Nótese que mientras que es evidente que toda forma exacta es cerrada, el recíproco es en general falso. La condición para que una forma cerrada ($d\omega = 0$) sea también exacta ($\omega = d\theta$) es, como se deduce del lema de Poincaré, que su dominio de definición sea de tipo estrella.

El ejemplo siguiente muestra cómo realizar el cálculo de θ de una manera sencilla (evitando la fórmula).

Ejemplo Sea $\omega = -\hat{x}^2 d\hat{x} \wedge d\hat{y} + (\hat{x}^2 - 1) d\hat{y} \wedge d\hat{z} + 2\hat{x}\hat{y} d\hat{x} \wedge d\hat{z}$ una 2-forma en $\mathbb{R}^3$. Puesto que $d\omega$ se anula, es cerrada. Puesto que $\mathbb{R}^3$ es tipo estrella, ω es también exacta. Podemos pues buscar una forma θ tal que $\omega = d\theta$. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \gamma : M \times [0,1] & \rightarrow & M \\ (x^\mu, t) & \mapsto & \hat{x}^\mu = t x^\mu \end{array}$$

para cada valor de t, $\gamma_t : M \to M$ (alternativamente se puede decir que, para cada t, γ es un cambio de coordenadas sobre la variedad). En nuestro dominio, γ manda $(x, y, z, t) \mapsto (tx, ty, tz)$. La forma está definida en el espacio de llegada, es decir, en términos de las variables *con gorro*. Para encontrar θ es necesario hacer primero el pullback de ω: $\gamma_{t\,\#}\omega$.

$$\begin{array}{rcl} \gamma_{t\,\#}\omega & = & -tx^2 d\,[tx] \wedge d\,[ty] + \left(t^2x^2 - 1\right) d\,[ty] \wedge d\,[tz] + 2t^2xyd\,[tx] \wedge d\,[tz] \\ & = & -t^2x^2\,(xdt + tdx) \wedge (ydt + tdy) + \left(t^2x^2 - 1\right)(ydt + tdy) \wedge (zdt + tdz) + 2t^2xy\,(xdt + tdx) \wedge \\ & = & -t^2x^2\left(xtdt \wedge dy - tydt \wedge dx + t^2dx \wedge dy\right) + \left(t^2x^2 - 1\right)\left(ytdt \wedge dz - tzdt \wedge dy + t^2dy \wedge dz\right) + \\ & & +2t^2xy\left(xtdt \wedge dz - tzdt \wedge dx + t^2dx \wedge dz\right) \end{array}$$

[7] se podría dar una condición tal como que todo punto del dominio se pueda llevar a un mismo punto mediante una homotopía cualquiera (no necesariamente por rectas), pero entonces habría que asegurar esto para todo sistema de coordenadas y no está claro que esta reformulación sea más general que la presentada en términos de “dominio estrella”.

Como para hallar θ debemos integrar sobre t (ecuación 3.8 en la página 91) eliminamos[8] de la expresión anterior todos los términos que no incluyen dt y factorizamos cada término en dt:

$$\alpha = -t^3x^2dt \wedge (xdy - ydx) + \left(t^3x^3 - t\right) \wedge dt \wedge (ydz - zdy) + 2t^3xydt \wedge (xdz - zdx)$$

Ahora sólo falta integrar entre cero y uno:

$$\theta = -\frac{1}{4}x^2\,(xdy - ydx) + \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}\right)(ydz - zdy) + \left(\frac{1}{2}xy\right)(xdz - zdx)$$

3.8. Teorema de Fröbenius

Este teorema está relacionado con la teoría de integrabilidad de sistemas, y en particular con la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden homogéneas para una función de varias variables. Sea M de clase $\mathcal{C}^\infty$ y dimensión m. Sobre ella definimos r 1-formas diferenciales[9], $\left\{\theta^1, \ldots, \theta^r\right\}$:

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \theta^1_1 d\hat{x}^1 + \ldots + \theta^1_r d\hat{x}^r + \theta^1_{r+1} d\hat{x}^{r+1} + \ldots + \theta^1_m d\hat{x}^m \\ &\vdots \\ \theta^r &= \theta^r_1 d\hat{x}^1 + \ldots + \theta^r_r d\hat{x}^r + \theta^r_{r+1} d\hat{x}^{r+1} + \ldots + \theta^r_m d\hat{x}^m \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde todos los coeficientes θ^i_j son funciones de $x^1 \ldots x^m$. La pregunta es si dada cierta $F : N \to M$ podemos en torno a un punto P encontrar una subvariedad $N \subset M$ definida por la aplicación F de modo que $F_\#\theta^a = 0$ con $a = 1 \ldots r$. Si tomamos una subvariedad definida por una serie de ecuaciones,

$$\begin{aligned} g^1\left[x^1 \ldots x^m\right] &= K_1 \\ &\vdots \\ g^r\left[x^1 \ldots x^m\right] &= K_r \end{aligned}$$

donde las K son constantes. Bajo ciertas condiciones se pueden despejar:

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= h^1\left[x^{r+1} \ldots x^m\right] \\ \hat{x}^r &= h^r\left[x^{r+1} \ldots x^m\right] \\ \hat{x}^{r+1} &= x^{r+1} \\ \hat{x}^m &= x^m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Las coordenadas en la variedad M son $\left\{\hat{x}^1 \ldots \hat{x}^m\right\}$. Y las $m - r$ de N vienen dadas por ese cambio explícito. Estas ecuaciones conducen a N:

$$\begin{aligned} F_\#\theta^1 &= \theta^1_1\left[x^{r+1} \ldots x^m\right] = 0 \\ F_\#\theta^r &= \ldots = 0 \end{aligned}$$

[8]Truco mnemotécnico aquí no demostrado pero eficaz.

[9]Nótese que en esta sección los superíndices numeran las formas y no indican su grado (que siempre es 1).

(http://fig.alqua.org)

Figura 3.5: $z^a \; vs. \; x^\mu$

Normalmente se relaja la notación y se dice que se busca $x^1 \dots x^r$ en función de $x^{r+1} \dots x^m$, sacar unas variables en función de las que quedan libres.

Las r 1-formas de 3.9 se pueden reescribir matricialmente como $\Theta = \mathsf{A}\mathbf{dx}^{1\dots r} + \mathsf{B}\mathbf{dx}^{r+1\dots m}$

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^1_1 & \dots & \theta^1_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^r_1 & \dots & \theta^r_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta^1_{r+1} dx^{r+1} + \dots + \theta^1_m dx^m \\ \vdots \\ \theta^r_{r+1} dx^{r+1} + \dots + \theta^r_m dx^m \end{pmatrix}$$

Suponiendo que en torno al punto P las r 1-formas diferenciales son linealmente independientes y por tanto en A hay un menor de tamaño $r \times r$ no nulo, se cumple que $\det[\mathsf{A}] \neq 0$. Así que puedo multiplicar por la izquierda por A^{-1} con el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}^1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}^r \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta^1_{r+1} dx^{r+1} + \dots + \beta^1_m dx^m \\ \vdots \\ \beta^r_{r+1} dx^{r+1} + \dots + \beta^r_m dx^m \end{pmatrix}$$

lo que he hecho ha sido reducir el problema a la anulación de otras formas diferenciales que es más fácil de tratar. Lo que tengo es que se debe anular:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^a &= dx^a + \beta^a_\mu dx^\mu \\ &= dz^a + \beta^a_\mu dx^\mu \end{aligned} \tag{3.11}$$

con $a = 1 \dots r$, $\mu = r+1 \dots m$. Para distinguir las coordenadas de la subvariedad de las que no lo son, adoptamos la siguiente notación: $\left(dx^1 \dots dx^r, dx^{r+1} \dots dx^m\right) \equiv \left(dz^1 \dots dz^r, dx^{r+1} \dots dx^m\right) \equiv (dz^a, dx^\mu)$. Recordemos (ecuación 3.10) que para especificar la subvariedad N, debemos hallar la expresión explícita de las z^a en función de las x^μ.

En la figura 3.5 la subvariedad está representada por el plano de las $z^a = 0$. Un punto $P_0 \in M$ se expresa así: $P_0 = \left(x^1_0 \equiv z^1_0, \dots, x^r_0 \equiv z^r_0, x^{r+1}_0 \dots x^m_0\right)$. Su proyección sobre N es $\tilde{P}_0 = \left(x^{r+1}_0 \dots x^m_0\right)$. Podemos construir una curva

$$\gamma : \{x^\mu[t] : t \in [0,1]\}$$

desde $\tilde{P}_0 \leftrightarrow x^\mu[0] = x^\mu_0$ $(t=0)$ hasta $\tilde{P}_1 \leftrightarrow x^\mu[1] = x^\mu_1$ $(t=1)$.

Voy a suponer que z^a y x^μ dependen únicamente de un parámetro, momento en el cual se hacen necesarias las curvas. Por fin el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

sustituyendo $x^\mu[t]$ y hallamos $z^a[t]$. Al operar sobre una curva estamos en condiciones de escribir la ecuación 3.11 en la página anterior utilizando que $d[z^a[t]] = \frac{\mathrm{d}z^a}{\mathrm{d}t}dt$ y $d[x^\mu[t]] = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}dt$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}z^a}{\mathrm{d}t}dt + \beta^a_\mu[z^a[t], x^\mu[t]]\frac{\partial x^\mu}{\partial t}dt \\ &= \frac{\mathrm{d}z^a}{\mathrm{d}t} + \beta^a_\mu[z^a[t], x^\mu[t]]\frac{\partial x^\mu}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pero queremos que el punto esté contenido en la curva:

$$z^a[0] = z^a_0 \equiv C^a$$

donde C^a son unas constantes. Tendremos una curva tal que sobre ella las r 1-formas se anulan. En principio uno puede escoger cualquier curva. La condición de integrabilidad es la que me garantiza que el punto final P_1 se corresponde con el punto final de abajo, $\tilde{P}_1$, que no depende de la trayectoria escogida para calcular. Cuando resuelva las ecuaciones 3.12, que en general no son lineales, se obtendrán funciones

$$z^a_1 = h^a[t, C^a \equiv z^a_0, x^\mu_0, x^\mu_1]$$

con $a = 1 \dots r$ y $\mu = r+1 \dots m$, soluciones dependientes de t, las constantes y los puntos inicial y final. En $t = 1$, punto final, tendremos:

$$z^a = h^a[C^a, x^\mu_0, x^\mu]$$

así que tenemos una serie de relaciones que nos definen la subvariedad sobre la que se anula la forma diferencial inicial, justo lo que buscábamos. Escribimos x^μ como variable y no x^μ_1 porque el método no depende del punto final; puede tratarse de cualquier punto.

La idea es resolver las ecuaciones en derivadas parciales sobre curvas apoyadas en la superficie, aprovechando que sí sabemos integrar ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos movemos por el "suelo" (figura 3.5 en la página anterior) hallando diversas soluciones (z^a), curvas de la variedad N que se busca, por lo cual el punto final x^μ debe ser variable. Pero como es independiente de la curva (como vamos a ver), escojo una recta.

Las condiciones de independencia del camino (integrabilidad) son que existan 1-formas ω^a_b tales que

$$d\theta^a = \omega^a_b \wedge \theta^b \tag{3.13}$$

Esto es un resultado local. Para un resultado global habrá que imponer alguna condición adicional. Es decir, localmente podemos construir la subvariedad, a menos que añadamos algún tipo de condición topológica.

Fröbenius (teorema) Sea M una variedad diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $\{\theta^1 \dots \theta^r\}$ 1-formas diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$ linealmente independientes en un entorno U de un punto $P \in M$ y tal que se cumple que existen $r \times r$ 1-formas diferenciales $\mathcal{C}^\infty$ ω^a_b con $a = 1 \dots r, b = 1 \dots r$ tales que $d\theta^a = \omega^a_b \wedge d\theta^b$. Entonces existen $r \times r$ funciones f^a_b y r funciones g^b tales que se verifica que $\theta^a = f^a_b dg^b$ en U.

Queríamos resolver $\theta^a = 0$ es decir, $\theta^a = f^a_b dg^b = 0$. pero recordemos que

$$\begin{aligned} 0 = \theta^1 &= f^1_1 dg^1 + \ldots + f^1_r dg^r \\ &\vdots \\ 0 = \theta^r &= f^r_1 dg^1 + \ldots + f^r_r dg^r \end{aligned}$$

para que esto se anule habiendo independencia lineal (es decir, un determinante $\det\left[f^a_b\right] \neq 0$ en U) necesariamente debe ser: $dg^1 = \ldots = dg^r = 0$, lo que a su vez implica que

$$\begin{aligned} g^1\left[x^1 \ldots x^m\right] &= cte_1 \\ &\vdots \\ g^r\left[x^1 \ldots x^m\right] &= cte_r \end{aligned}$$

de donde (localmente, por el teorema de la función implícita)

$$\begin{aligned} x^1 &= h^1\left[x^{r+1} \ldots x^m\right] \\ &\vdots \\ x^r &= h^r\left[x^{r+1}, \ldots x^m\right] \end{aligned}$$

para obtener las g^i hay que despejar de las siguientes ecuaciones:

$$z^a = h^a\left[C^a, x^\mu_0, x^\mu\right]$$

las C^a,

$$C^a = g^a\left[z^a, x^\mu, x^\mu_0\right]$$

Cuando nos den un sistema de 1-formas del tipo del teorema debemos comprobar la independencia lineal en torno al punto y ver si satisface o no la condición de integrabilidad, y después o bien integrar a mano (entonces no sería necesaria la condición de integrabilidad) o pasar a un sistema de ecuaciones ordinarias por el procedimiento explicado.

Ejemplo Decidir si es completamente integrable o no el sistema

$$\begin{aligned} (1-uy)\,dx + (1-ux)\,dy + (u-v)\,du &= 0 \\ (vy-1)\,dx + (vx-1)\,dy + (u-v)\,dv &= 0 \end{aligned}$$

Integrar hasta donde sea posible.

Tendríamos que comprobar si es integrable: se hace con la condición 3.13. Una vez comprobada la integrabilidad, el punto final será independiente de la curva escogida. Así que podemos intentar despejar, por ejemplo, dx, dy en término de u, v. Ponemos que x, y dependen de t y una curva de (u_0, v_0) a (u_1, v_1), etc . Tendríamos x, y en función de u, v: la subvariedad integrada.

3.9. Formulación simpléctica de la mecánica hamiltoniana

Vamos a estudiar una formulación geométrica de la mecánica hamiltoniana. Para ello se dota de una estructura simpléctica al espacio de fases: una 2-forma diferencial cerrada sobre él. Se dice entonces que el espacio de fases posee estructura de *variedad simpléctica.*

forma simpléctica sea M una variedad diferenciable $\mathcal{C}^\infty$. Se dice que una 2-forma diferencial $\mathcal{C}^\infty$ Ω es simpléctica si se cumple que

1. es cerrada ($d\Omega = 0$)
2. es no degenerada ($\forall \mathsf{x} \neq 0, \exists \mathsf{y} : \Omega[\mathsf{x},\mathsf{y}] \neq 0$) con campos vectoriales ξ, η. Es decir, tiene inversa.

No podemos utilizar cualquier variedad para definir formas con estas propiedades; son pues bastante exigentes.

Construimos el fibrado cotangente de una variedad de dimensión m asociando a cada punto de ésta su espacio cotangente. Pasamos a un espacio de tamaño $2m$. Sobre el espacio cotangente podemos definir de manera natural una estructura simpléctica.

Supongamos una variedad S y sobre ella unas coordenadas $\left\{q^1 \dots q^m\right\}$. En el fibrado cotangente de S, que llamaremos M (dimensión $2m$) podemos dar unas coordenadas

$$\left\{q^1 \dots q^m, p^1 \dots p^m\right\}$$

En la analogía del sistema mecánico el espacio de configuración es S, el de los grados de libertad q^i. El cotangente es el de los momentos generalizados, p^j. El fibrado cotangente, M, es lo que conocemos como "espacio de las fases". La forma simpléctica sobre M se construye así:

$$\Omega = dq^1 \wedge dp^1 + dq^2 \wedge dp^2 + \ldots + dq^m \wedge dp^m$$

Esta forma es obviamente cerrada, $d\Omega = 0$. Además es no degenerada, ya que si tenemos un campo $\xi \neq 0$ sobre M

$$\xi = \xi^{q^1}\frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots \xi^{q^m}\frac{\partial}{\partial q^m} + \xi^{p^1}\frac{\partial}{\partial p^1} + \ldots \xi^{p^m}\frac{\partial}{\partial p^m}$$

entonces alguna es distinta de cero, por ejemplo, $\xi^{q_1} \neq 0$. Análogamente se puede encontrar $\eta = \eta^{p^1}\frac{\partial}{\partial p^1}$. Operando, $\Omega[\xi,\eta] \neq 0$. Se dice que Ω *dota* de una *estructura simpléctica* a la variedad.

Esta estructura simpléctica nos permite asociar a cada campo vectorial v una 1-forma ω y a cada 1-forma ω un campo vectorial v:

$$\mathsf{v} \overset{\Omega}{\longleftrightarrow} \omega$$

Se hace así: $i_{\mathsf{v}}\Omega = \omega$. En componentes:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \\
\mathsf{v} &= v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\
\omega &= \omega_k dx^k \\
i_{\mathsf{v}}\Omega &= \Omega_{ij} v^i \\
&= \omega_j
\end{aligned}$$

La no degeneración permite viajar en sentido inverso:

$$v^i = \left(\Omega^{-1}\right)^{ij} \omega_j$$

Consideremos el caso particular de una forma diferencial $\omega = -dH$, igual a la diferencial de una función H (signo por conveniencia) sobre el fibrado cotangente. A esta 1-forma le podemos asociar un v mediante la forma simpléctica. En el caso de un sistema dinámico[10] $H = H[p, q]$:

$$i_{\mathsf{v}}\Omega = -dH$$

v define un flujo sobre el espacio cotangente, un flujo cuyas curvas integrales serán las trayectorias sobre el espacio de fases del sistema dinámico:

$$\begin{aligned}
H &= H\left[q^1 \ldots q^m, p^1 \ldots p^m\right] \\
dH &= \frac{\partial H}{\partial q^1} dq^1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q^m} dq^m + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p^1} dp^1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p^m} dp^m
\end{aligned}$$

las coordenadas de v son

$$\mathsf{v} = v^{q^1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \ldots v^{q^m} \frac{\partial}{\partial q^m} + v^{p^1} \frac{\partial}{\partial p^1} + v^{p^m} \frac{\partial}{\partial p^m}$$

y finalmente:

$$\begin{aligned}
i_{\mathsf{v}}\Omega &= v^{q^1} dp^1 + \ldots + v^{q^m} dp^m - v^{p^1} dq^1 - \ldots - v^{p^m} dq^m \\
&= - \frac{\partial H}{\partial q^1} dq^1 + \ldots - \frac{\partial H}{\partial p^m} dp^m
\end{aligned}$$

con lo que, identificando coeficientes:

$$\begin{aligned}
v^{q^1} &= -\frac{\partial H}{\partial p^1} \\
&\vdots \\
v^{q^m} &= -\frac{\partial H}{\partial p^m} \\
v^{p^1} &= \frac{\partial H}{\partial q^1} \\
&\vdots \\
v^{p^m} &= \frac{\partial H}{\partial q^m}
\end{aligned}$$

[10] Prescindimos de tratar hamiltonianos dependientes del tiempo por simplicidad.

¿Cuál es el flujo de este campo vectorial?, ¿cuáles sus curvas integrales?,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q^1}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial p^1} \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}q^m}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial p^m} \\
\frac{\mathrm{d}p^1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial q^1} \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}p^m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial q^m}
\end{aligned}$$

las curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Hamilton. Al estar la mecánica hamiltoniana en términos de ecuaciones de primer orden se pueden estudiar las ecuaciones como curvas integrales de un campo vectorial. Se puede comprobar que el hamiltoniano tiene que quedar invariante bajo este flujo, en la evolución del sistema mecánico:

$$\mathsf{v}\,[H] = 0$$

a partir de $dH\,[\mathsf{v}] = 0$. Se puede deducir también el teorema de Liouville: Ω queda invariante bajo la derivada de Lie en la dirección de v. Y el volumen del espacio de fases es Ω^m.

Liouville (teorema) El elemento de volumen del espacio de fases queda invariante bajo la evolución del sistema mecánico. El elemento de volumen es una $2m$-forma diferencial $\Omega \wedge \cdots (m\,veces) \cdots \wedge \Omega$.

$$\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\,[\Omega \wedge \cdots \wedge \Omega] = 0$$

Es una igualdad que puede probarse aplicando las propiedades de la derivada de Lie y la derivada exterior y sabiendo que Ω es cerrada: $\mathcal{L}_{\mathsf{v}}\Omega = d\,[i_{\mathsf{v}}\Omega] + i_{\mathsf{v}}d\Omega = -d\,[dH]$. Reformulamos así el teorema de Liouvile: $\mathsf{v}\,[H] = 0$. H es invariante bajo la evolución del sistema mecánico (v): $\mathsf{v}\,[H] = dH\,[\mathsf{v}] = -\,(i_{\mathsf{v}}\Omega)\,[\mathsf{v}] = -\Omega\,[\mathsf{v},\mathsf{v}] = 0$ ya que Ω es antisimétrica.

Sean f, g dos funciones y $\{f, g\}$ su corchete de Poisson. Asociamos a una función f una 1-forma diferencial df

$$\begin{aligned}
f \longrightarrow df \longrightarrow i_{\mathsf{v}_f}\Omega = -df \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{v}_f\,[g] = \{f, g\} = 0 \\
g \longrightarrow dg \longrightarrow i_{\mathsf{v}_g}\Omega = -dg \quad &\Rightarrow \quad \mathsf{v}_g\,[f] = \{f, g\} = 0
\end{aligned}$$

Se cumple que $\Omega\,[\mathsf{v}_f, \mathsf{v}_g] = \{f, g\}$. El paréntesis de Poisson indica cómo varía g a lo largo del flujo de f, v_f. Esta reformulación permite aplicarlo a sistemas más generales.

3.10. Por hacer

1. Considerar una notación que, como en el capítulo de tensores, distinga entre el objeto y sus coordenadas. Así se podrá indicar el grado de una forma (ω^3 es una 3-forma) abreviadamente sin que parezca una componente. Por ejemplo: letras griegas $\boldsymbol{\omega}$ en negrita o con tilde, $\tilde{\omega}$.
2. Desplazar la parte del contenido más informal de la sección 3.1 a la introducción.
3. Introducir la relación entre $I_1 \ldots I_3$ en la sección 3.1 y las integrales de línea (circulaciones), superficie (flujos) y volumen.
4. Insertar en la subsección 3.2.1 citas a la sección de simetrización del capítulo 2 y a las bases duales explicadas en el capítulo 1.
5. Citar en la sección 3.6 el capítulo 1 para una discusión sobre el dominio de F.
6. Reformar la exposición de la sección 3.8; mucho cuidado al estudiarla en su forma actual, es confusa.
7. Insertar la figura 3.5.

4 Geometría riemanniana o pseudo–riemanniana

La geometría riemanniana se dedica a estudiar la estructura de la que dota un campo tensorial, denominado *métrica* a una variedad.

La métrica g es un campo tensorial totalmente simétrico, $(0,2)$ y $\mathcal{C}^\infty$ tal que la signatura[1] de la forma cuadrática $\mathsf{g}[\mathsf{u},\mathsf{v}]$ permanece constante en todos los puntos de la variedad. En el caso de que la forma sea definida positiva o negativa se dice que es riemanniana o propiamente riemanniana. En caso de que no sea definida, se la llama pseudo–riemanniana (semi–riemanniana entre los matemáticos). Cuando la diagonal sólo tiene un signo distinto a los demás, se dice que la métrica es lorentziana. Además, g debe ser no degenerada (es decir $\forall \mathsf{u} \neq 0, \exists \mathsf{v} : \mathsf{g}[\mathsf{u},\mathsf{v}] \neq 0$). En consecuencia $\det[\mathsf{g}] \neq 0$ y existe un inverso, $\left(g^{-1}\right)^{ij}$, que abreviaremos por g^{ij}.

La expresión en coordenadas de la métrica es:

$$\mathsf{g} = g_{ij} dx^i \otimes_{\mathsf{s}} dx^j$$

g es simétrica: $g_{ij} = g_{ji}$. Haciendo uso de la notación para el producto tensorial simétrico, $dx^i dx^j = \frac{1}{2}\left(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i\right)$ llegamos a la forma más habitual de escribir su desarrollo en componentes

$$\mathsf{g} = g_{ij} dx^i dx^j$$

Ejemplo (dimensión 2)

$$\begin{aligned}
\mathsf{g} &= g_{xx} dx \otimes dx + g_{xy} dx \otimes dy + g_{yx} dy \otimes dx + g_{yy} dy \otimes dy \\
&= g_{xx} dx \otimes dx + g_{xy}\left(dx \otimes dy + dy \otimes dx\right) + g_{yy} dy \otimes dy \\
&= g_{xx} dx^2 + 2 g_{xy} dx dy + g_{yy} dy^2 \\
&= ds^2
\end{aligned}$$

El que la métrica sea definida positiva nos permite definir la norma y el ángulo sobre el espacio tangente a la variedad en un punto.

la norma de v se define como

$$||\mathsf{v}|| \equiv \sqrt{\mathsf{g}[\mathsf{v},\mathsf{v}]}$$

pero si la métrica no es propiamente riemanniana podemos definir una “magnitud” similar a la norma:

$$||\mathsf{v}|| \equiv \sqrt{|\mathsf{g}[\mathsf{v},\mathsf{v}]|}$$

[1] Al diagonalizar en cada punto la expresión matricial del tensor y en cada punto de la diagonal encontraremos un $+1$ o un -1.. La lista de todos estos valores es la signatura del tensor.

el ángulo entre vectores tangentes es

$$\cos[\mathsf{v},\mathsf{w}] \equiv \frac{\mathsf{g}[\mathsf{v},\mathsf{w}]}{||\mathsf{v}||\,||\mathsf{w}||}$$

Por otro lado, la métrica es el único objeto que permite establecer correspondencias entre tensores subiendo y bajando índices.

$$\begin{aligned} \hat{T}^{j}_{ik} &= g_{im} T^{mj}_{k} \\ \hat{\hat{T}}^{ijk} &= g^{km} T^{ij}_{m} \end{aligned}$$

Se puede mantener el mismo símbolo para denotarlos, aunque son formalmente tensores distintos: actúan sobre distintos espacios, pero sus componentes contienen la misma información. En la práctica la ubicación de los subíndices sirve para distinguirlos.

Ejemplo A un vector del espacio tangente $\mathsf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ podemos asociarle mediante g uno del espacio cotangente, $\omega_j = g_{ji} v^i$ con lo cual $\omega = \omega_j dx^j$, También podemos pasar del espacio cotangente al espacio tangente, utilizando $v^i = g^{ij}\omega_j$.

4.1. Conexión afín o lineal

Una métrica permite mucho más que estos cálculos algebraicos; nos permite, por ejemplo, dar una definición de transporte paralelo (derivada covariante). Es una manera de trasladar un vector de un punto de la variedad a otro a lo largo de una curva, manteniendo constante el ángulo vector–curva. Esto permite comparar vectores, mediante el proceso de trasladar el punto de aplicación de uno de ambos sobre el del otro a través de la curva.

Hasta aquí no hemos podido definir una noción de paralelismo entre vectores definidos en puntos distintos para una variedad diferenciable. La conexión afín es una regla gracias a la cual podremos definir alguna noción de paralelismo.

A este motivo para definir una derivada covariante (permitir el transporte paralelo) se añade la necesidad de encontrar una analogía a la derivada parcial de un tensor cuyo resultado también sea un tensor.

La métrica no aporta la única manera de definir una derivada covariante, una conexión. Hay modos no métricos de definir una conexión. Pero hay una sola conexión compatible con la métrica (que mantenga normas y ángulos).

La derivada parcial de una función (tensor $(0,0)$) es un tensor Supongamos $f \in \mathcal{F}^\infty[M]$.

$$\nabla_k f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

$\alpha_k = \nabla_k f$ sí se transforma como un tensor:

$$\alpha_{k'} = \frac{\partial f}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\alpha_k$$

A partir de una función (tensor del tipo $(0,0)$) $f \in \mathcal{F}^\infty[M]$ se obtiene un objeto $(0,1)$ mediante ∇_k.

Pero la derivada parcial de un tensor $(1,0)$ **no es un tensor** Consideremos ahora un campo vectorial contravariante, v. Denotemos por $T^i_j = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ las parciales de sus componentes. Veamos que *no* son las componentes de un tensor $(1,1)$:

$$\begin{aligned} T^{i'}_{j'} &= \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i\right] \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} v^i \end{aligned}$$

el segundo término causa que esto no sea un tensor bajo transformaciones de coordenadas arbitrarias. Nótese que si el jacobiano de la transformación, $\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i}$ fuese nulo, el resultado sí sería un tensor (porque se transformaría como dictan las leyes tensoriales).

. . . debemos modificar adecuadamente la derivada compensando los términos que impiden que el resultado de la operación sea un tensor, del siguiente modo:

$$(\nabla \mathsf{v})^i_j \equiv \nabla_j v^i \equiv v^i_{;j} \equiv \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} v^k \tag{4.1}$$

donde Γ^i_{kj} son m^3 funciones $\mathcal{C}^\infty$. Nótese que seguimos el convenio de contraer en Γ con el índice de dentro, k, mientras que la dirección de la derivada queda marcada por el índice exterior, j. Para que esta definición cobre sentido ha de ser válida en cualquier sistema de coordenadas. ¿Puedo encontrar una transformación para esos Γ tal que $v^i_{;j}$ sea efectivamente un tensor?.

$$\begin{aligned} \nabla_{j'} v^{i'} &= \frac{\partial v^{i'}}{\partial x^{j'}} + \Gamma^{i'}_{k'j'} v^{k'} \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i\right] + \Gamma^{i'}_{k'j'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} v^k \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} v^i + \Gamma^{i'}_{k'j'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} v^k \end{aligned}$$

despejando de 4.1:

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \nabla_j v^i - \Gamma^i_{kj} v^k$$

y sustituyendo

$$\nabla_{j'} v^{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \nabla_j v^i - \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{kj} v^k + \Gamma^{i'}_{k'j'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} v^k + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^i} v^i \tag{4.2}$$

Para que efectivamente se transforme como un tensor todos los términos de 4.2 menos el primero deben ser nulos:

$$\begin{aligned}\Gamma^{i'}_{k'j'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}v^k-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj}v^k+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j\partial x^k}v^k &= 0\\ \left(\Gamma^{i'}_{k'j'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}-\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j\partial x^k}\right)v^k &= 0\end{aligned}$$

(nótese que para sacar el factor común v^k hemos cambiado en el cuarto término de 4.2 el índice mudo i por k). Como esto tiene que valer para todo v^k, el paréntesis debe anularse. Multiplicando la expresión final por la $\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}$ y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{m'}}=\delta^{k'}_{m'}$$

se obtiene

$$0=\Gamma^{i'}_{k'j'}\delta^{k'}_{m'}-\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{kj}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j\partial x^k}$$

y por tanto

$$\Gamma^{i'}_{m'j'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^i_{kj}-\frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j\partial x^k}\tag{4.3}$$

es la regla de transformación de las m^3 funciones Γ que proporciona la conexión en el sentido clásico. Las componentes de la conexión no forman un tensor, como se deriva de la fórmula. Por ejemplo, podremos tener coordenadas en las que se anulen todas las componentes y coordenadas donde no (algo imposible en los tensores, debido a su definición intrínseca: nulo en un sistema de coordenadas, nulo en todos). Sí se transforman como un tensor en los casos en los que el cambio de coordenadas tenga jacobiano constante:

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j\partial x^k}=cte$$

Observación acerca de la fórmula 4.3: su primer término se corresponde con la transformación que seguiría un tensor, mientras que el segundo hace alusión al cambio de coordenadas (jacobiano).

Derivada covariante de una 1-forma Sea $\alpha=\alpha_i dx^i$. Queremos buscar la expresión $\nabla_k\alpha_i$. Imponemos para ello que la derivada covariante conmute con la contracción. Al hacerlo podemos tomar $\mathsf{v}=v^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ y en consecuencia podemos utilizar $\alpha[\mathsf{v}]=\alpha_k v^k=\alpha_i v^i$:

$$\nabla_k\left[\alpha_i v^i\right]=\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}v^i+\alpha_i\frac{\partial v^i}{\partial x^k}$$

donde hemos utilizado que derivada y contracción conmutan.

$$\begin{aligned}\nabla_k\left[\alpha_i v^i\right] &= \left(\nabla_k\alpha_i\right)v^i+\alpha_i\left(\nabla_k v^i\right)\\ &= \left(\nabla_k\alpha_i\right)v^i+\alpha_i\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{mk}v^m\right)\end{aligned}$$

igualando las dos expresiones para $\nabla_k \left[\alpha_i v^i\right]$

$$\begin{aligned}\nabla_k \left[\alpha_i v^i\right] &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} v^i + \alpha_i \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \\ &= \left(\nabla_k \alpha_i\right) v^i + \alpha_i \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} v^m\right)\end{aligned}$$

El hecho de que la derivada covariante y la contracción conmuten implica que

$$\nabla_k \left[\alpha_i v^i\right] = \left(\nabla_k \alpha_i\right) v^i + \alpha_i \nabla_k v^i \tag{4.4}$$

Para hallar la derivada covariante de una 1-forma operamos,

$$\begin{aligned}0 &= \left(\nabla_k \alpha_i\right) v^i - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} v^i + \alpha_i \Gamma^i_{mk} v^m \\ &= \left(\nabla_k \alpha_i\right) v^i - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} v^i + \Gamma^i_{mk} \alpha_i v^m\end{aligned}$$

cambiamos i por m para sacar factor común de v^m:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\nabla_k \alpha_m\right) v^m - \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^k} v^m + \Gamma^i_{mk} \alpha_i v^m \\ &= \left(\nabla_k \alpha_m - \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} \alpha_i\right) v^m\end{aligned}$$

como la expresión debe ser válida para cualquier v^m el paréntesis debe anularse:

$$\nabla_k \alpha_m - \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} \alpha_i = 0$$

La derivada covariante de una 1-forma diferencial α es, finalmente,

$$\nabla_k \alpha_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^k} - \Gamma^i_{mk} \alpha_i \tag{4.5}$$

donde el subíndice k de Γ es derivación respecto a k (recordemos que el índice de la derivada va detrás siempre).

A partir de la definición de derivada covariante para campos contravariantes e imponiendo la conmutación de la derivada y la contracción hemos calculado la derivada covariante de campos covariantes (entre ellos, las formas diferenciales).

Derivada covariante de un campo tensorial $(1,1)$ El siguiente paso es intentar definir una derivada covariante para campos tensoriales arbitrarios. Lo veremos con un campo tensorial $(1,1)$ y luego se generalizará.

Tenemos que imponer una regla de Leibniz para extender la derivada covariante a cualquier campo tensorial:

$$\nabla \left[\mathsf{S} \otimes \mathsf{T}\right] = \nabla \mathsf{S} \otimes \mathsf{T} + \mathsf{S} \otimes \nabla \mathsf{T} \tag{4.6}$$

La derivada covariante de una 1-forma (tensor $(0,1)$), $\nabla_k \alpha_m = (\nabla\alpha)_{km}$ es un tensor de tipo $(0,2)$. Al hacer la derivada covariante de un tensor (r,s) se obtiene un tensor $(r,s+1)$. Además de la regla de Leibniz, debe observarse la linealidad de la operación:

$$\nabla\left[\mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2\right] = \nabla\mathsf{S}_1 + \nabla\mathsf{S}_2 \tag{4.7}$$

Un campo tensorial $(1,1)$ se puede escribir como combinación lineal de un campo vectorial contravariante (tensor $(1,0)$) y de una forma diferencial (tensor $(0,1)$), expresándolo así: $T^i_j = v^i\alpha_j$ o $\mathsf{T} = \mathsf{v}\otimes\alpha$, donde $\mathsf{v} = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha = \alpha_j dx^j$. Así las cosas, y asumiendo 4.6 y 4.7,

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^i_j &= \nabla_k\left[v^i\alpha_j\right] \\
&= v^i\nabla_k\alpha_j + \alpha_j\nabla_k v^i \\
&= v^i\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^k} - \Gamma^m_{jk}\alpha_m\right) + \alpha_j\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk}v^m\right)
\end{aligned}$$

aplicando 4.1 y 4.5. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\nabla_k T^i_j &= \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\alpha_j + v^i\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk}v^m\alpha_j - \Gamma^m_{jk}v^i\alpha_m \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}\left[v^i\alpha_j\right] + \Gamma^i_{mk}v^m\alpha_j - \Gamma^m_{jk}v^i\alpha_m \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k}T^i_j + \Gamma^i_{mk}T^m_j - \Gamma^m_{jk}T^i_m
\end{aligned}$$

En suma, se obtiene el tensor $(1,2)$ siguiente

$$(\nabla T)^i_{jk} = T^i_{j;k} = \nabla_k T^i_j = \frac{\partial}{\partial x^k}T^i_j + \Gamma^i_{mk}T^m_j - \Gamma^m_{jk}T^i_m \tag{4.8}$$

tendremos tantos términos con Γ como índices haya en el tensor a derivar. En concreto, por cada índice covariante del tensor aparece un término negativo y por cada índice contravariante uno positivo.

Aplicando a un tensor de tipo (r,s), $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ la derivada covariante se obtiene un tensor $(r,s+1)$. Para ello empleamos 4.6, 4.7 y 4.4:

$$\nabla_k T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \frac{\partial}{\partial x^k}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \Gamma^{i_1}_{\underline{m}k}T^{\underline{m}i_2\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \ldots + \Gamma^{i_r}_{\underline{m}k}T^{i_1\ldots i_{r-1}\underline{m}}_{j_1\ldots j_s} - \Gamma^{\underline{m}}_{j_1k}T^{i_1\ldots i_r}_{\underline{m}j_2\ldots j_s} - \Gamma^{\underline{m}}_{j_sk}T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{s-1}\underline{m}}$$

En los términos debidos a los índices contravariantes, aparece un índice mudo que va sustituyendo a $i_1, i_2\ldots i_r$. En los términos debidos a los índices contravariantes ocurre análogamente, sustituyendo a los $j_1\ldots j_s$. Este índice se ha subrayado para resaltar su presencia. Otras notaciones posibles son

$$(\nabla T)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s k} = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;k} = \nabla_k T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

¿Conmutan las derivadas covariantes?. Vamos a ver qué pasa.

4.2. Torsión y curvatura

4.2.1. Tensor de torsión

Nos preguntamos ahora cuál es el resultado de $\nabla_i\nabla_k f - \nabla_k\nabla_i f = (\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[f]$.

$$\begin{aligned}
\nabla_i\nabla_k f &= \nabla_i[\nabla_k f] \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}[\nabla_k f] - \Gamma^m_{ki}\nabla_m f \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^m_{ki}\frac{\partial f}{\partial x^m} \\
\nabla_k\nabla_i f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \Gamma^m_{ik}\frac{\partial f}{\partial x^m}
\end{aligned}$$

de donde, suponiendo que $f \in \mathcal{C}^\infty$ y por tanto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}$,

$$(\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[f] = (\Gamma^m_{ik} - \Gamma^m_{ki})\frac{\partial f}{\partial x^m}$$

Se aprecia que en general la derivada covariante de una función no conmuta, pues el paréntesis no se anula. Para que así ocurra, Γ tiene que ser simétrico en los índices covariantes:

$$\Gamma^m_{ik} - \Gamma^m_{ki} = 0$$

A $\mathbf{T}$ ($\mathbf{T}^m_{ik} \equiv \Gamma^m_{ik} - \Gamma^m_{ki}$) se le denomina *tensor de torsión* y a los Γ, *coeficientes de conexión.* Cuando $\mathbf{T}$ es nulo, decimos que la conexión es *nula* o *simétrica.* Verificaremos que $\mathbf{T}$ es un tensor, sólo hay que hacer los cambios de coordenadas oportunos. En general:

$$(\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[f] = \mathbf{T}^m_{ik}\frac{\partial f}{\partial x^m}$$

Veamos cómo funciona el conmutador con campos vectoriales contravariantes. Basta con calcular uno de los dos términos de $\nabla_i\nabla_k v^m - \nabla_k\nabla_i v^m = (\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[v^m]$; ya sabemos que el otro será igual pero con el signo cambiado y los índices k e i permutados:

$$\begin{aligned}
\nabla_i[\nabla_k v^m] &= \frac{\partial}{\partial x^i}[\nabla_k v^m] + \Gamma^m_{li}\nabla_k v^l - \Gamma^l_{ki}\nabla_l v^m \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial v^m}{\partial x^k} + \Gamma^m_{rk}v^r\right] + \Gamma^m_{li}\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^k} + \Gamma^l_{rk}v^r\right) - \Gamma^l_{ki}\nabla_l v^m \\
&= \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{rk}v^r + \Gamma^m_{rk}\frac{\partial v^r}{\partial x^i} + \Gamma^m_{li}\frac{\partial v^l}{\partial x^k} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{rk}v^r - \Gamma^l_{ki}\nabla_l v^m \\
&= \frac{\partial^2 v^m}{\partial x^i \partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{rk} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{rk}\right)v^r + \Gamma^m_{rk}\frac{\partial v^r}{\partial x^i} + \Gamma^m_{li}\frac{\partial v^l}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}\nabla_l v^m
\end{aligned}$$

Estamos derivando un tensor $(1,1)$, $\nabla_k v^m$. Por lo tanto tenemos un término debido al índice contravariante (con signo $+$) y otro debido al índice covariante (con signo $-$). Este último no lo hemos desarrollado por conveniencia; nos permitirá progresar hacia el tensor de torsión. Nótese cómo en el primer término de la segunda ecuación $\Gamma^m_{lk}v^l$ se transforma en $\Gamma^m_{rk}v^r$, siguiendo las normas estudiadas. El paso a la última ecuación consiste simplemente en sacar factor común de v^r.

propiedad T es antisimétrico en sus índices covariantes: $\mathbf{T}^m_{ik} = -\mathbf{T}^m_{ki}$.

4.2.2. Tensor de curvatura

Ahora podemos escribir el conmutador:

$$\begin{aligned}
(\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[v^m] &= \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial x^i \partial x^k} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{rk} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{rk}\right)v^r + \Gamma^m_{rk}\frac{\partial v^r}{\partial x^i} + \Gamma^m_{li}\frac{\partial v^l}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}\nabla_l v^m\right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial x^k \partial x^i} + \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ri} + \Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ri}\right)v^r + \Gamma^m_{ri}\frac{\partial v^r}{\partial x^k} + \Gamma^m_{lk}\frac{\partial v^l}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ik}\nabla_l v^m\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^m_{rk} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^m_{ri} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{rk} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ri}\right)v^r + \left(\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki}\right)\nabla_l v^m
\end{aligned}$$

los únicos términos que no se contrarrestan son los que van multiplicando a v^r y los dos finales. El último paréntesis de la última expresión es el conocido tensor de torsión, $\mathbf{T}^l_{ik}$. El primer paréntesis se denomina *tensor de curvatura* (denotado **R**) y su expresión en componentes es:

$$\mathbf{R}^m_{rik} \equiv \Gamma^m_{rk,i} - \Gamma^m_{ri,k} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{rk} - \Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ri}$$

Se puede demostrar sin más que operar que este objeto es en efecto un tensor. También se puede demostrar que

propiedad R es antisimétrico en sus últimos índices covariantes: $\mathbf{R}^m_{rik} = -\mathbf{R}^m_{rki}$

Con todo esto la expresión del conmutador de un campo vectorial contravariante queda compacta, en lo que se conoce como *identidades de Ricci*:

$$(\nabla_i\nabla_k - \nabla_k\nabla_i)[v^m] = \mathbf{R}^m_{rik}v^r + \mathbf{T}^l_{ik}\nabla_l v^m$$

podemos proceder análogamente para un vector covariante o tensores de orden superior: $(1,1)$, $(2,2)$, ... La conclusión general es que la derivada covariante de estos objetos no conmuta. Ahora, si se consideran conexiones con $\mathbf{T}^l_{ik} = 0$ (simétricas) entonces el conmutador sólo es función de la curvatura, como ocurre en la teoría de la relatividad.

4.2.3. Identidades de Bianchi

Torsión nula

Supongamos la torsión **T** nula, y por lo tanto $\Gamma^m_{ik} = \Gamma^m_{ki}$. La *primera identidad de Bianchi* se sigue inmediatamente:

$$\mathbf{R}^i_{jkl} + \mathbf{R}^i_{klj} + \mathbf{R}^i_{ljk} = 0 \tag{4.9}$$

La *segunda identidad de Bianchi* (más importante) es

$$\mathbf{R}^i_{jlm;k} + \mathbf{R}^i_{jmk;l} + \mathbf{R}^i_{jkl;m} = 0 \tag{4.10}$$

Cuando la torsión nula, existe y podemos elegir un sistema de coordenadas tal que sea posible anular todos los coeficientes de la conexión en un punto P, es decir, $\Gamma^m_{ik}[P] = 0$. Pero atención, la derivada en ese punto $\Gamma^m_{ik;m}[P] \neq 0$ no tiene por qué anularse así como Γ^m_{ik} en cualquier otro punto P', $\Gamma^m_{ik}[P'] \neq 0$.

Las identidades de Bianchi son relaciones tensoriales, de manera que basta con encontrar un sistema de coordenadas en donde se cumplan 4.9 y 4.10. Escogemos pues un sistema de coordenadas que anule los coeficientes de conexión Γ en un determinado punto P. Entonces:

$$\mathbf{R}^i_{jkl} \triangleq \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l}$$

donde el triángulo indica que sólo es cierto en un determinado sistema de coordenadas. De aquí,

$$\mathbf{R}^i_{jkl} + \mathbf{R}^i_{klj} + \mathbf{R}^i_{ljk} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{kj,l} - \Gamma^i_{kl,j} + \Gamma^i_{lk,j} - \Gamma^i_{lj,k} = 0$$

se verifica para todo sistema de coordenadas.

Torsión no nula

Desarrollando la primera identidad (4.9)

$$\mathbf{R}^i_{jkl} + \mathbf{R}^i_{klj} + \mathbf{R}^i_{ljk} = \nabla_j \mathbf{T}^i_{kl} + \nabla_k \mathbf{T}^i_{lj} + \nabla_l \mathbf{T}^i_{jk} + \mathbf{T}^h_{jk}\mathbf{T}^i_{hl} + \mathbf{T}^h_{kl}\mathbf{T}^i_{hj} + \mathbf{T}^h_{lj}\mathbf{T}^i_{hk}$$

y haciendo lo propio con la segunda (4.10)

$$\nabla_l \mathbf{R}^h_{ijk} + \nabla_j \mathbf{R}^h_{ikl} + \nabla_k \mathbf{R}^h_{ilj} + \mathbf{T}^s_{jk}\mathbf{R}^h_{isl} + \mathbf{T}^s_{kl}\mathbf{R}^h_{isj} + \mathbf{T}^s_{lj}\mathbf{R}^h_{isk} = 0$$

4.3. Derivada covariante a lo largo de una curva

Vamos a ver cómo la derivada covariante permite definir el transporte paralelo. De ahí pasaremos a las geodésicas y, por último, a una interpretación geométrica de la torsión y la curvatura.

Sea T de componentes $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$. Podemos definir la derivada covariante de T, $\nabla_k T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$. Si además tenemos un campo vectorial $\mathsf{v} = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ podemos construir la derivada covariante del campo tensorial T a lo largo del campo vectorial v así[2]:

$$\nabla_{\mathsf{v}} T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \equiv v^k \nabla_k T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$$

un par de notaciones alternativas son $(\nabla_{\mathsf{v}}\mathsf{T})^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ y $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;k} v^k$.

Por ejemplo, la derivada covariante del vector w en la dirección del campo tensorial v es

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathsf{v}}\mathsf{w})^i &= v^k \nabla_k w^i \\ &= v^k \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} w^m\right) \\ &= v^k \frac{\partial w^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} w^m v^k\end{aligned}$$

[2]La notación ∇_k representaba en realidad ∇_{e_k}, un caso particularmente simple de derivada a lo largo de un campo vectorial.

v^k aparece sin derivar: sólo necesitamos evaluarla en el punto en el que calculamos la derivada. En cambio $\frac{\partial w^i}{\partial x^k}$ necesitamos evaluarlo en un entorno de P.

vector tangente Sea una curva γ que en cierto sistema de coordenadas viene dada por $\gamma = \left\{x^i [t] : t \in \mathbb{R}\right\}$. Su vector tangente es

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

con componentes $\dot{\gamma}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$ en el sistema de coordenadas elegido.

la derivada covariante de v a lo largo de γ se construye derivando w en la dirección del vector tangente, $\dot{\gamma}$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\dot{\gamma}} \mathsf{w})^i &= \dot{\gamma}^k \nabla_k w^i \\
&= \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \nabla_k w^i \\
&= \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} w^m \right) \\
&= \frac{\partial w^i}{\partial x^k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{mk} w^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{mk} w^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

En suma:

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \mathsf{w})^i = \frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{mk} w^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \tag{4.11}$$

Para definir las derivadas de campos tensoriales de orden mayor, se procede análogamente.

el transporte paralelo de un campo vectorial w a lo largo de una curva γ es una regla según la cual se puede llevar un vector asociado a un punto de la variedad a otro punto a lo largo de una curva. Se necesita exigir que la derivada covariante del campo vectorial a lo largo de γ (en la dirección de $\dot{\gamma}$) se anule:

$$\frac{\mathrm{d}w^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{mk} w^m \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.12}$$

Esto es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para v^i. Si conocemos el vector inicial en un punto de la curva, $w^i [0] = c^i$ entonces es un problema de valor inicial.

curva geodésica es aquella curva que transporta paralelamente su propio vector tangente, en consecuencia cumpliendo $(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i = 0$. En 4.12 basta con sustituir w^i por $\dot{\gamma}^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$. Más precisamente, siendo t el parámetro de la curva:

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{mk} \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales en general no lineales para $x^i[t]$. Dada la condición inicial

$$\begin{aligned} x^i[0] &= c^i \\ \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}[0] &= w^i \end{aligned}$$

disponemos de una solución única: una sola geodésica.

4.4. Interpretación geométrica de la torsión

4.4.1. Ecuación de las geodésicas

La ecuación de una curva geodésica γ viene dada por $(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})^i = 0$. Un caso trivial es una línea recta: al transportar paralelamente su vector tangente, éste se mantiene tangente a la recta.

Sea la curva $\mathcal{C}^\infty$ γ dada por $\gamma : \{x^\mu[t] : t \in \mathbb{R}\}$. La ecuación de la geodésica en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \text{con} \quad x^\mu[0] &= c^\mu \\ \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}[0] &= v^\mu \end{aligned}$$

Nótese que sólo la parte simétrica de la conexión contribuye a la ecuación de la geodésica.

4.4.2. Interpretación de la torsión de las geodésicas

La figura 4.1 ilustra la discusión que sigue.

1. Sea M una variedad diferenciable y P un punto perteneciente a ella.

2. Supongamos una geodésica g_1 que pasa por P y un vector u tangente a la curva en P.

3. Tómese una hipersuperficie R_P subespacio vectorial de T_P (por lo tanto de dimensión $m-1$), con R_P perpendicular a u.

4. Definimos un vector χ tangente a esa hipersuperficie en P.

5. Transportamos paralelamente u sobre la geodésica que tiene a χ por vector tangente, con la conexión simétrica, $\Gamma^\mu_{(s)\lambda\nu}$

$$\Gamma^\mu_{\mathsf{s}\,\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\lambda\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\right)$$

hasta $\dot{P}$.

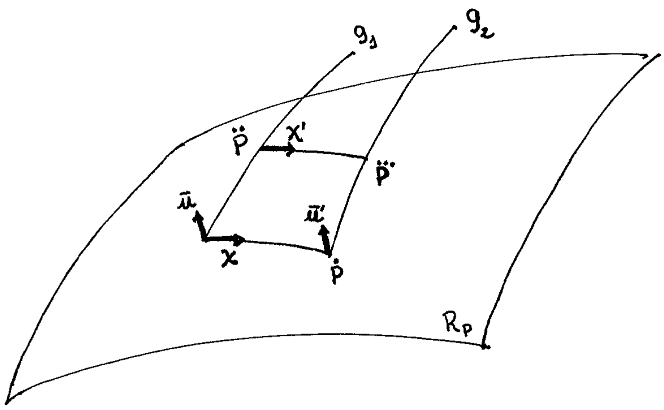


Figura 4.1: Dos geodésicas paralelas g_1 y g_2 y un vector χ (transportado paralelamente a lo largo de g_1) que las conecta en la hipersuperficie R_P.

6. En el punto $\dot{P}$ de llegada tenemos un u' (u transportado) paralelamente que utilizamos como vector tangente para construir una nueva geodésica g_2. Esta nueva geodésica será aproximadamente paralela a la primera (g_1). El procedimiento puede repetirse y así llenar M de geodésicas formando una *congruencia* (un conjunto de curvas que llenan M).

7. Transportamos paralelamente χ por la geodésica g_1, resultando χ'; el experimento consiste en ver si llegando a P' el vector χ' sigue uniendo ambas geodésicas. Es decir, comprobar si $\dot{P}'$ está sobre g_2 o no. χ' sólo seguirá uniendo geodésicas si $\mathbf{T} = 0$.

En suma:

1. Si $\mathbf{T} \neq 0$ entonces $\dot{P}'$ está fuera de g_2: una curva se retuerce (torsiona) respecto a otra.

2. Si $\mathbf{T} = 0$ las geodésicas se mantienen paralelas.

4.5. Interpretación geométrica de la curvatura

En función del transporte paralelo Sean v, w dos campos vectoriales.

$$\begin{aligned} \mathsf{v} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \\ \mathsf{w} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Si $[\mathsf{v}, \mathsf{w}] = 0$ podemos construir un paralelogramo (conectando P con $\dddot{P}$ por dos caminos diferentes) con las curvas integrales de v y w (figura 4.2).

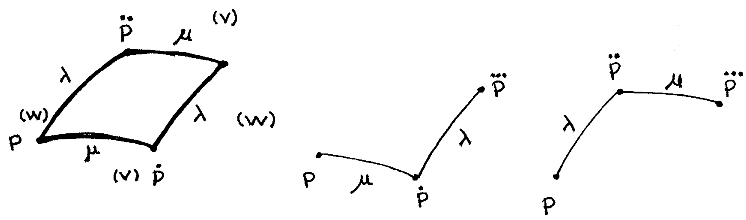


Figura 4.2: El hecho de que el conmutador de v y w sea nulo permite construir un paralelogramo cerrado con sus curvas integrales.

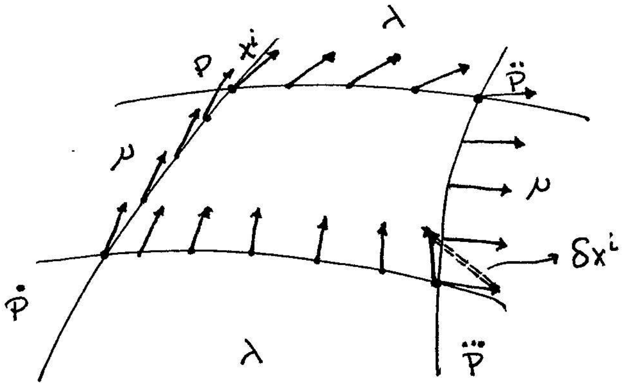


Figura 4.3: El transporte de un vector por dos caminos diferentes da vectores diferentes.

Sea el vector x^i en P. Lo transportamos paralelamente hasta $\dddot{P}$ por un camino y otro; el resultado en $\dddot{P}$ es dos vectores distintos (figura 4.3). Se verifica que

$$\delta x^i = (\mu\lambda)\, \mathbf{R}^i_{jkl} x^j v^k w^l$$

El tensor de curvatura cuantifica la diferencia entre los dos vectores transportados paralelamente por los dos caminos.

Interpretación en función de las geodésicas El grado de separación de las geodésicas es proporcional a la curvatura.

4.6. Conexión Levi–Cività

Buscamos una conexión tal que el producto escalar de dos vectores definido por la métrica, $g_{ij}v^i w^j$ se mantenga constante si transportamos los vectores paralelamente $\nabla_{\dot{\gamma}} v^i = 0, \nabla_{\dot{\gamma}} w^j = 0$ a lo largo de una curva γ (con el transporte paralelo dado por la conexión, figura 4.4). Esto supone que normas y ángulos quedan conservados tras un transporte por esta conexión, que recibe el nombre de conexión de Levi–Cività.

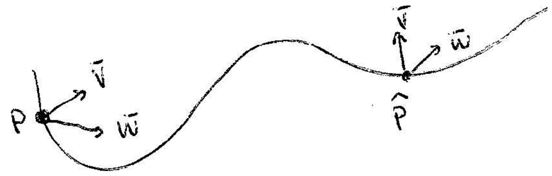


Figura 4.4: Transporte paralelo de dos vectores a lo largo de una curva.

Imponiendo que el producto escalar sea constante a lo largo de la curva γ:

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}} \left[g_{ij} v^i w^j \right] = \left(\nabla_{\dot{\gamma}} g_{ij} \right) v^i w^j + g_{ij} \left(\nabla_{\dot{\gamma}} v^i \right) w^j + g_{ij} v^i \left(\nabla_{\dot{\gamma}} w^j \right)$$

(los dos últimos términos se anulan porque las respectivas derivadas covariantes son cero: transporte paralelo). Como esto ha de verificarse $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w}$:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} g_{ij} = 0 \tag{4.13}$$

es decir, estamos buscando conexiones que mantengan constante el producto escalar a lo largo de γ.

En general la derivada covariante de g en cualquier dirección es nula. Esto no basta para definir la conexión de Levi–Cività: hay que imponer además que la torsión sea nula (es simétrica).

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{4.14}$$

$$\mathbf{T} = 0 \tag{4.15}$$

Teorema En una variedad riemanniana o pseudoriemanniana existe una única conexión que satisface 4.14 y 4.15. 4.14 implica que se conservan los productos escalares por transporte paralelo y 4.15 que $T^i_{jk} = 0$ y por tanto que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Vamos a buscar esa conexión única:

$$\nabla_k g_{ij} = g_{ij,k} - \Gamma^m_{ik} g_{mj} - \Gamma^m_{jk} g_{im} \tag{4.16}$$

y haciendo permutaciones cíclicas para intentar obtener los símbolos Γ:

$$\nabla_i g_{jk} = g_{jk,i} - \Gamma^m_{ji} g_{mk} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} \tag{4.17}$$

$$\nabla_j g_{ki} = g_{ki,j} - \Gamma^m_{kj} g_{mi} - \Gamma^m_{ij} g_{km} \tag{4.18}$$

Tomamos una combinación lineal: 4.16 + 4.17 −4.18= 0 :

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} - \Gamma^m_{ik} g_{mj} - \Gamma^m_{jk} g_{im} - \Gamma^m_{ji} g_{mk} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} + \Gamma^m_{kj} g_{mi} + \Gamma^m_{ij} g_{km}$$

donde se han usado las propiedades de simetría de los Γ y de la g, $g_{mk} = g_{km}$ y $\Gamma^m_{ji} = \Gamma^m_{ij}$. Llegamos a

$$g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j} - 2\Gamma^m_{ik} g_{mj} = 0$$

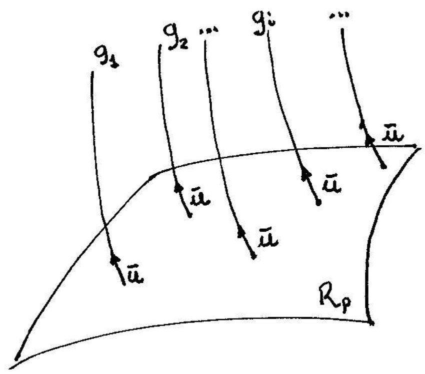


Figura 4.5: Congruencia de geodésicas atravesando R_P.

por lo que

$$\Gamma^m_{ik} g_{mj} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}\right)$$

símbolos de Christoffel de primera especie, $\Gamma_{jki} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}\right)$.

Multiplicando por g^{-1} la expresión anterior y teniendo en cuenta que $g_{mj} g^{jr} = \delta^r_m$ obtenemos

$$\Gamma^m_{ik} \delta^r_m = g^{jr}\left(\Gamma_{jki}\right)$$

finalmente

$$\Gamma^r_{ik} = g^{jr} \Gamma_{jki}$$

es la conexión única que satisface 1) que se mantenga el producto escalar y 2) que $\mathbf{T} = 0$. Es la conexión de Lévi–Civitá.

4.7. Interpretación métrica de la curvatura

Sea $\mathbf{u}$ un campo vectorial sobre una hipersuperficie R_P. En todos los puntos de la superficie construimos las curvas geodésicas g_i cuyo vector tangente es $\mathbf{u}$ (son las trayectorias de las partículas libres que se dejan evolucionar a lo largo del campo). Si construimos un vector $\mathbf{n}$ que une dos geodésicas sobre R_P (figura 4.5)y calculamos su derivada covariante dos veces tenemos:

$$\nabla_u \nabla_u \mathbf{n} = \mathbf{R}\left[\mathsf{u}, \mathsf{u}, \mathsf{n}\right]$$

en otras palabras

$$\frac{\mathrm{d}^2 n^i}{\mathrm{d}s^2} = \mathbf{R}^i_{jkl} u^j n^k u^l$$

la separación de las geodésicas viene dada por la curvatura.

4.8. Por hacer

Este capítulo necesita una revisión profunda; las expresiones matemáticas han sido revisadas pero no así la exposición y su sentido global.

1. Eliminar redundancias y editar exposición de la derivada de una 1-forma.
2. Pasar de notación con símbolos griegos (del capítulo de formas) a la notación recta del resto del documento para los covectores. $\alpha \to \mathsf{a}$.
3. Ampliar el tratamiento de la conexión de Levi–Cività.

Bibliografía

[Abraham] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T.: *Manifolds, tensor analysis and applications (2nd edition)*. Springer–Verlag. New York, 1988.

[Arnold] Arnold, V.I.: *Mathematical methods of classical mechanics (2nd edition)*. Springer–Verlag. New York, 1989.
5

[Bishop] Bishop, R. L., Goldberg, S. I.: *Tensor Analysis on manifolds*. Dover. New York, 1980.

[Chavel] Chavel, I.: *Riemannian geometry: a modern introduction*. Cambridge University Press. Cambridge, 1993.

[Choquet–Bruhat] Choquet–Bruhat, Y., de Witt–Morette, C., Dillard–Bleick, M.: *Analysis, manifolds and physics*. North Holland. Amsterdam, 1991.

[Crampin] Crampin, M., Pirani, F.A.E.: *Applicable differential geometry*. London Mathematical Society (Lecture notes series 59). Cambridge University Press. Cambridge, 1986.

[Eisenhart] Eisenhart, L. P.: *Riemannian geometry*. Princeton University Press. Princeton, 1997.

[Flanders] Flanders, H.: *Differential forms with applications to the physical sciences*. Dover. New York, 1990.

[Lovelock] Lovelock, D. Rund, H.: *Tensors, differential forms and variational principles*. Dover. New York, 1989.

[Misner] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A.: *Gravitation*. Freeman. San Francisco, 1973.

[Postnikov] Postnikov, M.: *Leçons de géometrie. Varietés différentiables.* Ed. Mir (col. traduit du russe). 1990.
1

[Ruiz-Gamboa] Ruiz, J. M., Gamboa, J.: *Introducción a las variedades diferenciables.*

[Sattinger] Sattinger, D.H., Weaver, O.L.: *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry and mechanics (3rd edition).* University of Bangalore Press. New Delhi, 1997.

[Schouten] Schouten, J. A.: *Ricci calculus (2nd edition).* Springer–Verlag. Berlin, 1954.

[Schutz] Schutz, B.: *Geometrical methods of mathematical physics*, 1997.
1

[Sternberg] Sternberg, S.: *Lectures on differential geometry (2nd edition).* Chelsea. New York, 1982.

Índice alfabético

Historia

0.0.1 - 28 de febrero de 2001

- Primera versión del documento, con la estructura del curso de geometría diferencial avanzada impartido por Luis Manuel Romero en la facultad de Física de la UCM entre febrero y junio de 2001.
- Agradecemos a Teresa Marrodán Undagoitia la realización de las figuras del capítulo de variedades.

1.0.0 - 13 de mayo de 2002

- Corrección de erratas –ATC, MBG.
- Gran homogeneización notacional en todo el documento –ATC, MBG.
- Nuevas figuras –ATC, MBG.
- Pequeñas reestructuraciones en algunos apartados –ATC, MBG.
- Eliminadas lista de figuras y de tablas -ATC.
- Numerosas correcciones de presentación (pies de las figuras, ejemplos) –ATC.
- Inserción de secciones Por Hacer al final de los capítulos –ATC, MBG.
- Eliminación de redundancias, sobre todo en los cap. de variedades y tensores –ATC, MBG.
- Reestructurado el ejemplo de la banda de Möbius (en el capítulo de variedades) –ATC.
- Cambios en la sección sobre la derivada de Lie –ATC, MBG.

1.1.0 - 15 de abril de 2004

- Cambio de licencia a la Attribution Share-Alike Non-Commercial de Creative Commons.
- Incorporación de la versión 2.0 del manifiesto y de la descripción del proyecto LibrosAbiertos.

Las siguientes tareas merecen atención, a juicio de los editores y autores:

- Mejorar las figuras.
- Escribir párrafos introductorios en los capítulos y en los apartados de primer nivel. En ellos debería hablarse de la importancia de lo que se va a explicar seguidamente, de cuál es su papel en la disciplina y su rango de aplicabilidad en las Matemáticas y la Física.

- En general en cada apartado podríamos intentar seguir un esquema de introducción informal apelando a nociones intuitivas, seguida de una explicación formal (definiciones, teoremas, pruebas) y por último ejemplos y aplicaciones, todo ello sin ser demasiado rígidos.
- Completar el uso de la notación funcional.
- Encontrar el lugar y el momento oportunos para introducir referencias a la física. En particular, hablar acerca de la diferencia entre espacio producto y fibrado en relación con el espacio de fases de la mecánica.
- Añadir un apéndice con ejercicios resueltos.
- Factorizar los términos comunes en el índice alfabético.
- Comentar la bibliografía.

Creative Commons Deed

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 1.0: Key License Terms

Attribution. The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees must give the original author credit.

Noncommercial. The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees may not use the work for commercial purposes – unless they get the licensor's permission.

Share Alike. The licensor permits others to distribute derivative works only under a license identical to the one that governs the licensor's work.

Whoever has associated this Commons Deed with their copyrighted work licenses his or her work to you on the terms of the Creative Commons License found here: Legal Code (the full license)

This is not a license. It is simply a handy reference for understanding the Legal Code (the full license) - it is a human-readable expression of some of its key terms. Think of it as the user-friendly interface to the Legal Code beneath. This Deed itself has no legal value, and its contents do not appear in the actual license.

Creative Commons is not a law firm and does not provide legal services. Distributing of, displaying of, or linking to this Commons Deed does not create an attorney-client relationship.

Learn how to distribute your work using this license

Manifiesto de Alqua

Origen y metas del proyecto

En 1999 fundamos el proyecto Alqua con el objetivo de promover la creación de un fondo de documentos libres de carácter científico que permita a cualquiera aprender con libertad.

Al constatar la duplicación de esfuerzos en la preparación de materiales didácticos para la física y con el deseo de compartir nuestros conocimientos, nos inspiramos en los principios de libertad que rigen el movimiento del software libre para establecer aquéllos de Alqua. Primero pensamos que lo que escribiésemos debería poder disfrutarse sin merma de libertad por las personas interesadas, y más tarde decidimos organizar nuestros esfuerzos para ayudar a otras personas que compartían nuestra visión a difundir sus saberes mediante un esfuerzo cooperativo.

Para hacer efectivos dichos principios decidimos que los documentos publicados deben ser libres en un sentido amplio: pueden reproducirse y distribuirse (gratuitamente o no, es irrelevante) pero también pueden modificarse y usarse como base para otros trabajos. A fin de evitar que estas libertades del lector-autor se restrinjan posteriormente, los documentos contienen una licencia que explica los derechos que posee y estipula que nadie que distribuya el documento, modificado o no, puede hacerlo de modo no libre.

Las ventajas de los documentos libres

Actualmente es ilegal compartir o modificar la mayoría del conocimiento científico en fuentes impresas, que suelen ser inaccesibles para la mayoría de los estudiantes y bibliotecas del mundo en virtud de su precio y se actualizan con poca frecuencia debido a su sistema de distribución tradicional.

En este contexto los documentos libres presentan ciertas ventajas.

Por una parte, en algunas disciplinas los documentos libres permiten facilitar el establecimiento de un sistema de mérito reduciendo las barreras de precio y disponibilidad. El modelo de desarrollo libre para la ciencia se apoya sobre las libertades de distribución y modificación. Éstas se ven favorecidas por el medio digital, así como por la concepción del conocimiento como un patrimonio comunitario. Todo lo anterior permite reducir el coste del documento a una cantidad marginal y anima a que lo mejor se combine con lo mejor para producir un resultado excelente a la vez que actualizado.

Por otra parte, en casos donde la evaluación del mérito es más subjetiva, los documentos libres pueden aportar una base sobre la que elaborar con un menor esfuerzo diferentes perspectivas doctrinales o estéticas, mutaciones, iteraciones y apuestas que incentivan la creación como un aspecto más del disfrute de la obra.

En suma, los documentos libres fomentan un acceso a la cultura más justo y completo. Para algunos dominios del conocimiento científico el proceso de desarrollo libre facilita la recombinación, lo que permite la producción de obras muy sofisticadas y completas mientras que en otros ámbitos facilita la difusión de perspectivas plurales y la experimentación creativa.

Una nueva dinámica de creación y aprendizaje

Algunas personas que hemos conocido están interesadas por este modelo de colaboración, pero se preguntan qué clase de control tienen sobre sus documentos libres. La respuesta es sencilla: la licencia está diseñada de modo que a cada cual se le atribuya aquello de lo que es responsable y nada más. Para ello, se incluye en el documento una sección en la que se explica quién hizo qué y cuándo lo hizo.

Uno de los efectos más interesantes de introducir los documentos libres en el aula es que difuminan la frontera entre quien aprende y quien enseña. Los documentos libres son un puente para establecer contacto con una comunidad de interés mucho más vasta que la del centro educativo, permitiendo el aprendizaje continuo y fomentando una experiencia plural y transformadora: el criterio para participar en un documento es, solamente, hacerlo bien.

Un autor puede pensar que distribuir su documento bajo un copyright que restringe la libertad de copia es *más rentable* que otorgar mayores libertades. Esto no es necesariamente así, por varias razones.

En primer lugar, libre no quiere decir gratuito. Una editorial puede publicar un documento libre obteniendo beneficio de ello. De hecho, es una buena idea hacerlo dado lo agradable que resulta manejar un libro bien encuadernado. También los autores pueden aceptar una compensación de los lectores por su trabajo en un determinado documento.

En segundo lugar, la mayor parte de los autores son primeramente lectores. Cabe esperar, pues, que para la mayoría el enorme ahorro derivado del acceso a *muchos* documentos libres supere holgadamente el beneficio económico obtenido de *unos pocos* documentos no libres. La experiencia del software libre lo avala.

Finalmente, no se puede poner precio al beneficio social derivado de la existencia de documentos libres. Gracias a los derechos que uno posee sobre un documento libre puede adaptarlo para un curso académico eliminando lo que no es pertinente o es demasiado avanzado y complementando el tema con nuevas aportaciones, desde ejercicios o diagramas hasta apartados enteros.

Pensamos que las universidades u otras instituciones educativas podrían cumplir mejor su función social poniendo a disposición de la sociedad que las financia, en condiciones de libertad, su patrimonio más importante: el conocimiento.

El modelo de cooperación que proponemos (que anima al trabajo en equipo aunque no lo impone) permite abrir todas estas perspectivas y algunas más. Alqua intenta ofrecer los medios para esta tarea y relacionar, a través de los documentos libres, a los que tienen saberes que comunicar y a los que sienten curiosidad por dichos saberes.

Conclusión

Alqua tiene una tarea muy ilusionante y tan ambiciosa que sólo es factible en comunidad. Por ello, pedimos a las personas que forman parte de instituciones o empresas que colaboren con Alqua para que éstas apoyen económicamente el proyecto o patrocinen ediciones impresas y donaciones a las bibliotecas públicas. Ciertamente, los medios materiales son necesarios, pero inútiles si, a nivel particular, no contamos con tu participación como individuo, aprendiendo y enseñando, para que los documentos libres en marcha y otros nuevos alcancen los altos niveles de calidad a los que aspiramos.

Te invitamos a construir un patrimonio científico que nos pertenezca a todos.

Versión 2.0, marzo de 2003

El proyecto libros abiertos de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el manifiesto de Alqua y las directrices para documentos libres de Alqua . Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.

Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.

- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.

- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.

- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, http://alqua.org

2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.

3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.

4. Si puedes, adjuntar al archivador una copia del CD-ROM de documentos libres de Alqua .

5. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a librosabiertos@alqua.org .

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el manifiesto de Alqua , persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

Variedades, tensores y física

[]

Álvaro Tejero Cantero y Marta Balbás Gambra

descripción

Curso avanzado de geometría diferencial, con una introducción a las variedades diferenciables, los campos tensoriales y la geometría riemanniana, orientado a familiarizar al lector con los métodos geométricos de la moderna física matemática. Contiene numerosos ejemplos y figuras.

requisitos

- Álgebra y cálculo de primero de carrera.
- Conveniente geometría diferencial de curvas y superficies.

http://alqua.org/libredoc/VTF

Aprende en comunidad - http://alqua.org ◁

otros documentos libres

Variedades, tensores y física - Óptica electromagnética - Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción a la física cuántica, segunda parte - Redes y sistemas - Sistemas Operativos - Geometría simpléctica - Física del láser - Análisis funcional - Geografía general de España (en preparación).

http://alqua.org/libredoc/

alqua,madeincommunity