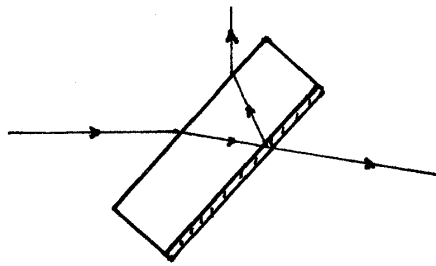


# Óptica electromagnética

---

~~~~~1.1.0





OE

ÓPTICA ELECTROMAGNÉTICA

535.13

ALQ

† lomo para ediciones impresas



---

<http://alqua.org/libredoc/OE>

Álvaro Tejero Cantero [alvaro@alqua.org](mailto:alvaro@alqua.org) <http://alqua.org/people/alvaro>

# Óptica electromagnética

---

versión 1.1.0  
10 de abril de 2004



alqua, **madeincommunity**



---

c o p y l e f t

---

Copyright (c) 2004 Álvaro Tejero Cantero.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/1.0/> or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Copyright (c) 2004 Álvaro Tejero Cantero.

Este trabajo cae bajo las provisiones de la licencia Atribución-No Comercial-Comparte Igual de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/1.0/> o escriba una carta a Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

---

**Serie** apuntes

**Área** óptica

**CDU** 535.13

**Editores**

Álvaro Tejero Cantero [alvaro@alqua.org](mailto:alvaro@alqua.org)

Notas de producción

Plantilla `latex-book-es-b.tex`, v. 0.1 (C) Álvaro Tejero Cantero.

▷compuesto con software libre◁

# Índice general

|                                                                                 |            |
|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Portada</b>                                                                  | <b>I</b>   |
| <b>Copyleft</b>                                                                 | <b>VI</b>  |
| <b>Índice general</b>                                                           | <b>VII</b> |
| <b>1. Ondas electromagnéticas en el vacío</b>                                   | <b>1</b>   |
| 1.1. Planteamiento . . . . .                                                    | 1          |
| 1.2. Ondas electromagnéticas en el vacío . . . . .                              | 2          |
| 1.2.1. Ondas armónicas . . . . .                                                | 2          |
| 1.2.2. Frentes de onda . . . . .                                                | 4          |
| 1.2.3. Ondas planas . . . . .                                                   | 4          |
| 1.2.4. Ondas armónicas planas . . . . .                                         | 5          |
| 1.3. Información contenida en la expresión de una onda armónica plana . . . . . | 7          |
| 1.4. Polarización de una onda armónica plana . . . . .                          | 7          |
| 1.4.1. Polarización lineal . . . . .                                            | 8          |
| 1.4.2. Polarización circular . . . . .                                          | 9          |
| 1.4.3. Luz no monocromática . . . . .                                           | 9          |
| 1.5. Intensidad . . . . .                                                       | 10         |
| 1.5.1. Vector de Poynting . . . . .                                             | 10         |
| 1.5.2. Promedio temporal del vector de Poynting . . . . .                       | 11         |
| 1.6. Sobre la notación: ondas armónicas y ondas armónicas planas . . . . .      | 12         |
| <b>2. Materia y su interacción con la radiación</b>                             | <b>13</b>  |
| 2.1. Introducción. Tipos de carga . . . . .                                     | 13         |
| 2.1.1. Cargas libres . . . . .                                                  | 13         |
| 2.1.2. Cargas ligadas: hipótesis . . . . .                                      | 13         |
| 2.2. Ecuación de movimiento de la carga . . . . .                               | 15         |
| 2.2.1. Formulación y discusión de sus aspectos . . . . .                        | 15         |
| 2.2.2. Solución para la carga ligada . . . . .                                  | 15         |
| 2.2.3. Solución para la carga libre . . . . .                                   | 18         |
| <b>3. Ecuaciones de Maxwell macroscópicas</b>                                   | <b>19</b>  |
| 3.1. Planteamiento . . . . .                                                    | 19         |
| 3.2. Medios ópticamente poco densos . . . . .                                   | 20         |

|           |                                                                                     |           |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3.      | Medios ópticamente densos . . . . .                                                 | 20        |
| 3.3.1.    | Hipótesis. El continuo óptico . . . . .                                             | 20        |
| 3.3.2.    | Promedios para llegar a las ecMm . . . . .                                          | 21        |
| 3.3.3.    | EcmM para ondas armónicas . . . . .                                                 | 23        |
| 3.3.4.    | Clasificación de los medios . . . . .                                               | 25        |
| <b>4.</b> | <b>Medios homogéneos e isotropos</b>                                                | <b>27</b> |
| 4.1.      | Planteamiento del problema . . . . .                                                | 27        |
| 4.2.      | Solución . . . . .                                                                  | 27        |
| 4.3.      | Medios transparentes . . . . .                                                      | 29        |
| 4.4.      | Medios absorbentes . . . . .                                                        | 30        |
| 4.5.      | Índice de refracción y propiedades microscópicas . . . . .                          | 32        |
| 4.5.1.    | Planteamiento . . . . .                                                             | 32        |
| 4.5.2.    | Cálculo de $\epsilon_{gen}$ . . . . .                                               | 32        |
| 4.5.3.    | Índice de refracción . . . . .                                                      | 35        |
| <b>5.</b> | <b>Refracción y reflexión en medios homogéneos e isotropos</b>                      | <b>41</b> |
| 5.1.      | Planteamiento del problema . . . . .                                                | 41        |
| 5.2.      | Dirección y frecuencia de las ondas . . . . .                                       | 42        |
| 5.2.1.    | Condiciones de frontera . . . . .                                                   | 42        |
| 5.2.2.    | Descripción y nomenclatura . . . . .                                                | 42        |
| 5.2.3.    | Escritura de las ondas incidente, transmitida y reflejada . . . . .                 | 43        |
| 5.2.4.    | Ley de SNELL . . . . .                                                              | 44        |
| 5.3.      | Amplitudes de las ondas . . . . .                                                   | 46        |
| 5.3.1.    | Deducción de las fórmulas de FRESNEL . . . . .                                      | 46        |
| 5.3.2.    | Fórmulas de FRESNEL . . . . .                                                       | 48        |
| 5.4.      | Relaciones energéticas: reflectancia y transmitancia . . . . .                      | 55        |
| 5.5.      | Dirección, frecuencia, amplitudes y energía cuando un medio es absorbente . . . . . | 58        |
| <b>6.</b> | <b>Óptica geométrica</b>                                                            | <b>61</b> |
| 6.1.      | Planteamiento . . . . .                                                             | 61        |
| 6.2.      | De las ondas a las trayectorias . . . . .                                           | 62        |
| 6.2.1.    | Objetivo . . . . .                                                                  | 62        |
| 6.2.2.    | Noción de trayectoria . . . . .                                                     | 62        |
| 6.2.3.    | Ecuación de las trayectorias . . . . .                                              | 64        |
| 6.2.4.    | Interpretación . . . . .                                                            | 65        |
| 6.2.5.    | Trayectorias en una discontinuidad de índice . . . . .                              | 65        |
| 6.3.      | Conclusiones: ondas y rayos . . . . .                                               | 66        |
| <b>7.</b> | <b>Medios anisótropos</b>                                                           | <b>69</b> |
| 7.1.      | Introducción . . . . .                                                              | 69        |
| 7.1.1.    | Justificación: anisotropía natural e inducida . . . . .                             | 69        |
| 7.1.2.    | Planteamiento . . . . .                                                             | 70        |
| 7.2.      | Matriz dieléctrica . . . . .                                                        | 71        |



|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3. Medios anisótropos transparentes. Clasificación . . . . .             | 72         |
| 7.4. Propagación de ondas armónicas planas . . . . .                       | 73         |
| 7.5. Medios uniáxicos . . . . .                                            | 74         |
| 7.5.1. Superficie de vectores de onda. Eje óptico . . . . .                | 74         |
| 7.5.2. Ondas <i>o</i> y <i>e</i> : fase y polarización . . . . .           | 76         |
| 7.5.3. Refracción y reflexión: doble refracción . . . . .                  | 78         |
| <b>8. Aplicaciones de los medios anisótropos . . . . .</b>                 | <b>81</b>  |
| 8.1. Transparentes . . . . .                                               | 81         |
| 8.1.1. Láminas retardadoras . . . . .                                      | 81         |
| 8.1.2. Prismas polarizadores . . . . .                                     | 83         |
| 8.2. Absorbentes; dicroísmo; polaroides . . . . .                          | 84         |
| 8.3. Matrices de JONES . . . . .                                           | 87         |
| 8.4. Luz natural . . . . .                                                 | 87         |
| 8.4.1. Definiciones . . . . .                                              | 87         |
| 8.4.2. Efectos de una lámina y de un polarizador . . . . .                 | 88         |
| <b>9. Interferencia . . . . .</b>                                          | <b>89</b>  |
| 9.1. Planteamiento . . . . .                                               | 89         |
| 9.1.1. Definición . . . . .                                                | 89         |
| 9.1.2. Descripción escalar . . . . .                                       | 90         |
| 9.2. Coherencia . . . . .                                                  | 90         |
| 9.3. División del frente de onda (YOUNG) . . . . .                         | 93         |
| 9.3.1. Montaje . . . . .                                                   | 93         |
| 9.3.2. Onda armónica escalar esférica . . . . .                            | 93         |
| 9.3.3. Formación de un patrón de interferencias . . . . .                  | 94         |
| 9.3.4. Estudio de la figura interferencial . . . . .                       | 94         |
| 9.3.5. Luz no monocromática . . . . .                                      | 97         |
| 9.4. División de amplitud (MICHELSON) . . . . .                            | 98         |
| 9.4.1. Principio de funcionamiento . . . . .                               | 98         |
| 9.4.2. El interferómetro de MICHELSON . . . . .                            | 99         |
| 9.4.3. Sustitución de todo el interferómetro por dos imágenes . . . . .    | 99         |
| 9.4.4. MICHELSON con luz blanca . . . . .                                  | 102        |
| 9.5. Reflexiones múltiples (FABRY-PEROT) . . . . .                         | 102        |
| 9.5.1. Conclusiones . . . . .                                              | 106        |
| 9.5.2. Tratamiento cuantitativo de la distribución de intensidad . . . . . | 107        |
| 9.5.3. Aplicaciones . . . . .                                              | 108        |
| <b>10. Difracción . . . . .</b>                                            | <b>111</b> |
| 10.1. Definición . . . . .                                                 | 111        |
| 10.2. Principio de HUYGENS-FRESNEL . . . . .                               | 111        |
| 10.3. Principio de BABINET . . . . .                                       | 112        |
| 10.4. Aproximaciones de FRESNEL y FRAUNHOFER . . . . .                     | 113        |
| 10.4.1. FRESNEL . . . . .                                                  | 113        |

## ÍNDICE GENERAL

|                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 10.4.2. Aproximación de FRAUNHOFER . . . . .                       | 115        |
| 10.5. Círculos. . . . .                                            | 117        |
| 10.5.1. Abertura circular . . . . .                                | 117        |
| 10.5.2. Poder resolutivo de los instrumentos ópticos . . . . .     | 121        |
| 10.6. Rectángulos. . . . .                                         | 122        |
| 10.6.1. Abertura rectangular . . . . .                             | 122        |
| 10.6.2. Rendija . . . . .                                          | 124        |
| 10.7. Doble rendija . . . . .                                      | 125        |
| 10.8. Red de difracción. Poder resolutivo . . . . .                | 130        |
| 10.8.1. Análisis del factor de interferencia . . . . .             | 131        |
| 10.8.2. Modulación de la interferencia por la difracción . . . . . | 132        |
| 10.9. Por hacer . . . . .                                          | 134        |
| <b>11. Ejercicios y problemas</b> . . . . .                        | <b>135</b> |
| 11.1. Resueltos . . . . .                                          | 135        |
| 11.2. Otros ejercicios y problemas (por resolver) . . . . .        | 172        |
| <b>Bibliografía</b> . . . . .                                      | <b>179</b> |
| <b>Historia</b> . . . . .                                          | <b>181</b> |
| <b>Creative Commons Deed</b> . . . . .                             | <b>183</b> |
| <b>Manifiesto de Alqua</b> . . . . .                               | <b>185</b> |
| <b>El proyecto libros abiertos de Alqua</b> . . . . .              | <b>189</b> |
| <b>Otros documentos libres</b> . . . . .                           | <b>193</b> |

# 1 Ondas electromagnéticas en el vacío

La óptica electromagnética estudia el comportamiento de la luz, considerando ésta como un ente de carácter ondulatorio. Para tal fin será necesario introducir algunos conceptos asociados a las ondas electromagnéticas, objeto de este capítulo. Se realizará un breve repaso de las ecuaciones de Maxwell, describiremos la forma más general de una onda electromagnética, entendida como una onda armónica plana, así como su forma compleja. Se revisarán conceptos tales como frente de ondas, vector y longitud de onda, velocidad de fase y de grupo, . . . Estudiaremos también el carácter transversal de las ondas electromagnéticas, y el fenómeno asociado de la polarización. Por último describiremos en este capítulo la energía que transporta una onda en términos del vector de Poynting.

## 1.1. Planteamiento

En esta sección repasaremos algunas cuestiones de electromagnetismo.

La óptica electromagnética parte de identificar la luz como fenómeno electromagnético. En consecuencia la luz está gobernada por las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell microscópicas (en el vacío) son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Estas ecuaciones diferenciales parciales vectoriales involucran materia (a través de  $\mathbf{j}$  y  $\rho$ ) y campos ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ). Además de estas ecuaciones necesitaremos una que nos dé la fuerza que ejercen los campos sobre las cargas

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \mathbf{B} \right) \quad (1.5)$$

Con este bagaje podemos estudiar la propagación de la luz en la materia. La luz es una solución de las ecuaciones de Maxwell en forma de onda electromagnética. Es decir<sup>1</sup> campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  acoplados y con forma de onda vectorial (un tipo especial

---

<sup>1</sup>El vector  $\mathbf{E}$  se llama *campo eléctrico* y el vector  $\mathbf{B}$  recibe el nombre de *inducción magnética*.

de dependencia espaciotemporal). El siguiente esquema resume la interconexión de los fenómenos electromagnéticos con la dinámica de las cargas y corrientes:

$$\begin{aligned} \rho, \mathbf{j} &\longrightarrow \mathbf{E}, \mathbf{B} \\ \{\mathbf{F}\} &\longrightarrow \rho', \mathbf{j}' \\ &\longrightarrow \mathbf{E}', \mathbf{B}' \\ &\longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Cargas y densidades de corriente no estacionarias generan campos (luz) variables en el tiempo (ondas que se propagarán en el vacío) que a su vez actuarán sobre otras cargas y corrientes mediante una fuerza. La aceleración inducida en estas últimas dará lugar a nuevas ondas que se superpondrán con las incidentes, etc.

Todo el proceso (generación, propagación, detección) estará sujeto a las ecuaciones de Maxwell. El primer gran problema al que nos vamos a enfrentar será el de la propagación en la materia. En primer lugar hablaremos de las ondas electromagnéticas en el vacío y después pasaremos al problema más complicado de su propagación en la materia.

## 1.2. Ondas electromagnéticas en el vacío

En el vacío no hay ni cargas ni corrientes:  $\rho = 0$  y  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Las ondas electromagnéticas obtenidas serán una solución particular de las ecuaciones de Maxwell. Si combinamos la tercera ecuación con la cuarta, podremos llegar a la siguiente expresión

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

una ecuación de ondas vectorial donde el parámetro  $c$  (velocidad de la luz) vale

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Entre las soluciones particulares que se pueden encontrar a la ecuación están las que estudiamos a continuación.

### 1.2.1. Ondas armónicas

Las ondas armónicas (también llamadas *monocromáticas*) tienen, por definición, la forma

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= A_x(\mathbf{r}) \cos(\omega t - g_x(\mathbf{r})) \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= A_y(\mathbf{r}) \cos(\omega t - g_y(\mathbf{r})) \\ E_z(\mathbf{r}, t) &= A_z(\mathbf{r}) \cos(\omega t - g_z(\mathbf{r})) \end{aligned}$$

Una onda armónica es una solución particular que tiene toda la dependencia temporal en  $\cos \omega t$ . Las otras funciones ( $A_i, g_i$ ) son funciones de punto, pero no del tiempo. La

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 1.1:** Espectro electromagnético - parte visible (IR-UV).

frecuencia angular se relaciona con la frecuencia y con el período de la onda según

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Las  $A_x, A_y, A_z$  son las *amplitudes* de cada una de las componentes de la onda. El argumento del coseno es lo que se llama *fase* de la onda. Por la naturaleza de su dependencia temporal, esta onda se extiende en el tiempo desde  $-\infty$  a  $\infty$ ; si restringimos su duración, ya no se puede considerar armónica ni tiene la expresión expuesta.

Las ondas armónicas constituyen una base de funciones para las ondas: a partir de ellas se puede construir cualquier onda por superposición de Fourier. La clasificación de las ondas en función de las frecuencias de las ondas armónicas que contienen constituye el *espectro electromagnético*. Dentro de él, la luz visible es una onda en el rango de frecuencias (figura 1.1)

$$4 \times 10^{14} \text{ Hz} < \nu < 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$IR < \nu < UV$$

Este tipo de ondas es el que estimula nuestro sistema visual. Aquellas cuyas frecuencias no pertenecen a este rango no provocan sensación visual pero se comportan muy similarmente. Las ondas armónicas se llaman también monocromáticas porque provocan sensación de un color definido.

Las ondas armónicas permiten introducir una herramienta muy útil: la *representación compleja*. Esta expresión es útil para no arrastrar cosenos y senos por los cálculos. De modo que *solamente para simplificar los cálculos* se escribe el coseno como la parte real de una exponencial compleja, función que tiene la ventaja de que su derivada es ella misma.

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

Reescribamos nuestras relaciones

$$E_x = \Re \left\{ A_x(\mathbf{r}) e^{+ig_x(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} \right\}$$

usaremos el convenio (indiferente: el coseno es par) de poner la propagación en  $e^{-i\omega t}$ , es decir, con el signo menos en el exponente<sup>2</sup>. En todo lo que sigue prescindiremos

---

<sup>2</sup>Observación a tener en cuenta cuando se acuda a la bibliografía.

de escribir  $\Re\{\dots\}$  y se habrá de entender que las amplitudes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  y  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  son vectores complejos, de los cuales *sólo la parte real tiene significado* (puede ser medida en laboratorio). La expresión de la onda queda, pues

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

Pero no siempre se puede utilizar: si bien para sumas, integrales, derivadas... la representación compleja es legítima (porque la parte real de la suma es la suma de las partes reales), para efectuar el producto de dos ondas armónicas ya no vale. Moraleja: cuando hagamos operaciones *lineales* y sólo entonces podremos utilizar la representación compleja.

### 1.2.2. Frentes de onda

Para el resto del curso admitiremos que

$$g_x(\mathbf{r}) = g_y(\mathbf{r}) = g_z(\mathbf{r}) \equiv g(\mathbf{r})$$

Ahora todas las componentes tienen la misma fase, con lo que la fase de la onda armónica queda

$$\text{fase}_{oa}(\mathbf{r}, t) = \omega t - g(\mathbf{r})$$

Para un tiempo fijo  $t_0$  un *frente de ondas* es el conjunto de puntos del espacio donde la onda tiene la misma fase.

$$\begin{aligned} \omega t_0 - g(\mathbf{r}) &= cte \\ g(\mathbf{r}) - \omega t_0 - cte &= 0 \end{aligned}$$

Ésta es la ecuación de un sistema de superficies (variando la constante)<sup>3</sup>. Si ahora permitimos la variación del tiempo concluiremos que los frentes de ondas cambian con el tiempo:

$$g(\mathbf{r}) + cte = \omega t_1$$

Los frentes de onda se propagan (ver figura 1.2), lo mismo que se propaga la perturbación, en el espacio y en el tiempo.

### 1.2.3. Ondas planas

Para un instante dado, las *ondas planas* son aquellas para las cuales el campo eléctrico toma el mismo valor sobre superficies que son planos. Es decir, para  $t = t_0$  se cumple que

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0) = cte \Rightarrow \mathbf{r} \in \Pi$$

donde  $\Pi$  es un plano. La ecuación de los planos de vector director  $\mathbf{k} = (a, b, c)$  es  $ax + by + cz = d$ , es decir,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = d$  (ver figura 1.3). Esta definición permite que la

<sup>3</sup>Por ejemplo,  $F(\mathbf{r}) = cte$  con  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2$  es la ecuación de una foliación del espacio por esferas de radio  $\sqrt{cte}$ .

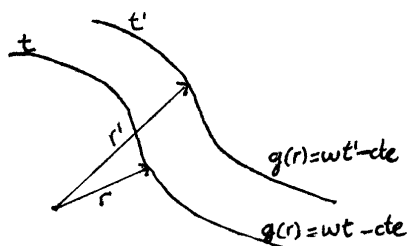


Figura 1.2: Frentes de onda para dos tiempos distintos.

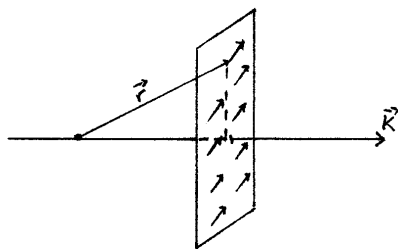


Figura 1.3: Plano de fase (frente de ondas) y vector  $\mathbf{k}$  para una onda plana. Explicación de la dependencia sólo en  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ .

dependencia espacial de la onda se pueda escribir mediante un producto escalar por un vector constante: la onda no depende de  $\mathbf{r}$  sino de su proyección sobre la dirección de propagación, ortogonal a los planos. Al vector constante  $\mathbf{k}$  se le llama *vector de ondas*.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$$

Estas ondas no son de gran utilidad por sí solas si no se combinan con las ondas armónicas.

#### 1.2.4. Ondas armónicas planas

Si tanto la dependencia armónica temporal como la dependencia espacial en forma de onda plana son impuestas a la ecuación de ondas vectorial 1.6 las ondas armónicas planas se ven obligadas a adoptar esta expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

Toda la dependencia espaciotemporal está en la exponencial compleja; tanto  $\mathbf{E}_0$  como  $\mathbf{B}_0$  son vectores complejos constantes. Cualquier onda se puede desarrollar como superposición de ondas armónicas planas.

Pero las soluciones no deben serlo sólo de la ecuación de ondas, deben cumplir también las ecuaciones de Maxwell. Eso introduce ligaduras entre las constantes preexponenciales.

## 1 Ondas electromagnéticas en el vacío

Si se impone el cumplimiento de las ecuaciones de Maxwell se desemboca en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0\end{aligned}$$

a partir de las dos divergencias nulas (ecuaciones 1.1 y 1.2 en el vacío). Y, si hacemos los dos rotacionales 1.3 y 1.4 obtenemos además

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{E}_0 &= -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0\end{aligned}$$

De estas condiciones se extraen cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{E} &= -\frac{c^2}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}\end{aligned}$$

que permiten obtener importantes conclusiones sobre la estructura de la onda: los campos son ortogonales entre sí, y cada uno de ellos al vector de ondas. Se forma pues un triedro directo<sup>4</sup>  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ . Si combinamos las dos últimas ecuaciones y se usa<sup>5</sup>

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

se obtiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}|^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \\ k &= \frac{\omega}{c} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

la última ecuación constituye la definición de  $\lambda$ , la longitud de onda. La condición

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\nu}{c} &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda\nu &= c\end{aligned}$$

permite clasificar las ondas también por su longitud de onda, puesto que conocemos la relación con la frecuencia. Lo que llamamos *luz* cumple aproximadamente

$$400nm < \lambda < 750nm$$

<sup>4</sup>en el sentido de que  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  está en la dirección de  $\mathbf{k}$ .

<sup>5</sup>Esta *magia* puede ser recordada como la regla “**bac** – **cab**” para el triple producto vectorial.



**Ejercicio** ¿Cómo son los frentes de onda de una onda armónica plana?

En primer lugar hay que identificar su fase: es  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ . Los frentes de onda vendrán dados por

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = cte$$

podemos escoger el vector de ondas particular  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$  y entonces

$$kz - \omega t = cte$$

Para ver que estos planos perpendiculares al eje  $z$  se desplazan con el tiempo podemos despejar la coordenada

$$z = \frac{\omega}{k}t + \frac{cte}{k} = ct + \frac{cte}{k}$$

los planos de la misma fase se mueven con velocidad  $c$ : la *velocidad de fase* es  $c$ .

### 1.3. Información contenida en la expresión de una onda armónica plana

Una onda armónica plana queda determinada por su frecuencia,  $\omega$ , su dirección,  $\mathbf{k}$  y su amplitud  $\mathbf{E}_0$ . Los frentes de onda se desplazan en la dirección de  $\mathbf{k}$  a velocidad  $c$ . En cuanto al campo magnético, está completamente determinado por las ecuaciones que lo expresan en función del eléctrico. A partir de ellas se puede escribir

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_0|$$

Lo que resta del capítulo está dedicado a la amplitud compleja,  $\mathbf{E}_0$ . Este vector contiene dos tipos de información:

1. Sobre la polarización de la onda.
2. Sobre su intensidad.

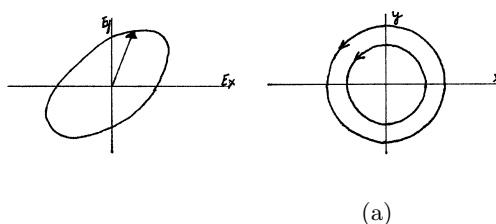
### 1.4. Polarización de una onda armónica plana

Ya que conocemos la estructura de la onda, elegimos los ejes de modo que  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{u}_z$ . En consecuencia,  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{u}_z$  y  $E_z = 0$ .

**Polarización** es la trayectoria que describe el vector campo eléctrico en el plano  $xy$ .

Vamos a demostrar que esta trayectoria se puede escribir siempre como una elipse.

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x}e^{i(kz-\omega t)} = |E_{0x}|e^{-i\delta_x}e^{i(kz-\omega t)} \\ E_y &= E_{0y}e^{i(kz-\omega t)} = |E_{0y}|e^{-i\delta_y}e^{i(kz-\omega t)} \end{aligned}$$



**Figura 1.4:** En el plano  $E_y, E_x$ , (a) elipse de polarización y (b) dos estados de polarización iguales.

donde el signo de la fase es arbitrario<sup>6</sup>. Nos interesa más la representación real

$$\begin{aligned} E_x &= |E_{0x}| \cos(\omega t + \delta_x - kz) \\ E_y &= |E_{0y}| \cos(\omega t + \delta_y - kz) \end{aligned}$$

Utilizando relaciones trigonométricas se puede eliminar el tiempo, con lo que queda la ecuación (correspondiente a una elipse en general):

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{|E_{0x}| |E_{0y}|} \cos(\delta_y - \delta_x) = \sin^2(\delta_y - \delta_x)$$

Para una onda armónica el vector campo eléctrico describe una elipse con frecuencia  $\omega$  (figura 1.4 (a)). El sentido de recorrido de la elipse puede ser dextrógiro (horario) o *dextro* o bien levógiro o *levo*. Precaución: hay que especificar cuál es la dirección de propagación, la misma elipse vista por una cara u otra da diferentes sentidos de giro. Nuestro convenio será suponer que la onda se propaga *hacia nosotros* (es el convenio más generalizado en la Óptica).

Un *estado de polarización* es una elipse particular. Recorridos en distinto sentido de la misma elipse son distintos estados de polarización. Sin embargo, dos elipses homotéticas no representan diferentes estados de polarización (figura 1.4 (b)). Es decir, que si la única diferencia entre dos elipses es el tamaño y no el sentido o la forma el estado de polarización se considera el mismo. Más formalmente: los vectores  $\mathbf{E}_0$  y  $\eta\mathbf{E}_0$ ,  $\eta \in \mathcal{C}$  representan el mismo estado de polarización.

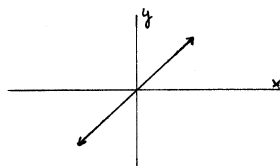
Hay que fijarse en que la forma de la elipse sólo depende de  $(\delta_x - \delta_y)$  y no de cada una de las fases  $\delta_x$  o  $\delta_y$  por separado.

### 1.4.1. Polarización lineal

Un caso particular de elipse es una recta que pasa por el origen (figura 1.5). Esto significa que el campo está vibrando en una misma dirección del espacio. Esta situación degenerada se produce cuando

$$\delta_y - \delta_x = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

<sup>6</sup>Hemos descompuesto el vector amplitud compleja en módulo y argumento y expresado su fase como  $-\delta_x$  o  $-\delta_y$ . El haber elegido fases  $\delta_x$  y  $\delta_y$  no cambiaría nada.



**Figura 1.5:** Una elipse puede degenerar en una recta.

o bien cuando  $|E_{0x}| = 0$  o  $|E_{0y}| = 0$ . Entonces diremos que la polarización es lineal y que la luz es *linealmente polarizada*. Podemos usar la notación

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_{0x}| e^{-i\delta_x} \\ |E_{0y}| e^{-i\delta_y} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\delta_y} \begin{pmatrix} |E_{0x}| e^{-i(\delta_x - \delta_y)} \\ |E_{0y}| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aprovechamos la condición de diferencia de fase 0 o  $\pi$  para poner

$$\mathbf{E}_0 = e^{-i\delta_y} \begin{pmatrix} \pm |E_{0x}| \\ |E_{0y}| \end{pmatrix} \propto \text{vector real}$$

es decir, siempre que haya proporcionalidad a un vector real (aunque el coeficiente sea complejo) se dirá que la luz está linealmente polarizada.

### 1.4.2. Polarización circular

Se dice que la luz está circularmente polarizada cuando la elipse se reduce a una circunferencia. Esto ocurre si se dan las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned} |E_{0x}| &= |E_{0y}| \\ \delta_y - \delta_x &= \pm \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

donde  $+$   $\rightarrow$  dextro y  $-$   $\rightarrow$  levo. En otros términos,

$$\mathbf{E}_0 = e^{-i\delta_y} \begin{pmatrix} |E_{0x}| e^{i(\delta_y - \delta_x)} \\ |E_{0y}| \end{pmatrix} = e^{-i\delta_y} |E_{0x}| \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para este tipo de luz se tiene siempre que la amplitud es proporcional a un vector de componentes 1 y  $\pm i$ ; el orden y los signos darán el sentido.

### 1.4.3. Luz no monocromática

En el caso más general la luz es superposición de ondas monocromáticas. Entonces el vector campo eléctrico ya no describe una elipse, y en general, no sigue ninguna trayectoria reconocible (es lo que se llama luz no polarizada o *luz natural*). Pero puede ocurrir que la trayectoria *se aproxime* a una de las polarizaciones simples que hemos visto. Es lo que se conoce bajo el nombre de *polarización parcial*.

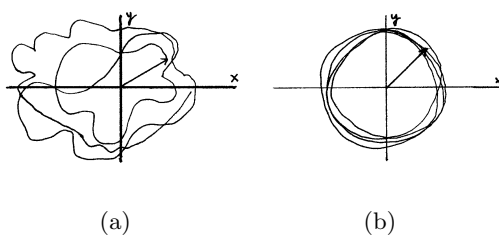


Figura 1.6: Luz natural y luz parcialmente polarizada.

## 1.5. Intensidad

### 1.5.1. Vector de Poynting

Es otra característica de la onda ligada a su amplitud,  $\mathbf{E}_0$ . La ecuación de Lorentz para la fuerza da idea de que una onda transporta energía en su propagación. Es necesario cuantificar la energía que una onda transporta. Para ello se define el *vector de Poynting*:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \quad (1.7)$$

$$[\mathbf{S}] = \frac{E}{T \times A} = \left\{ \frac{W}{m^2} \right\} \quad (1.8)$$

Describe un flujo de energía (energía por unidad de tiempo y superficie), y coincide con la magnitud *irradiancia* de la óptica geométrica. En los cálculos con esta magnitud nos está prohibido usar la representación compleja, porque hay un producto, que es una operación no lineal (la parte real del producto no es el producto de las partes reales). Un vector de Poynting imaginario es una señal de que hemos cometido este error. En adelante, el subíndice  $R$  subrayará el uso de la representación real.

**Ejemplo** Vector de Poynting para una onda armónica plana

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_R \wedge \left( \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_R \right) \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{\mathbf{k}}{\omega} \mathbf{E}_R^2 - \frac{1}{\omega} \mathbf{E}_R (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_R) \right] \end{aligned}$$

con lo que

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{E}_R^2 \mathbf{k} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathbf{E}_R^2 \mathbf{u}_k$$

El vector de Poynting va en la dirección del vector de ondas. Por lo tanto, para una onda armónica plana, fase y energía se propagan en la dirección del vector de ondas. La energía es proporcional al cuadrado del campo eléctrico: una estimación del cuadrado del campo nos aporta una estimación de la energía.

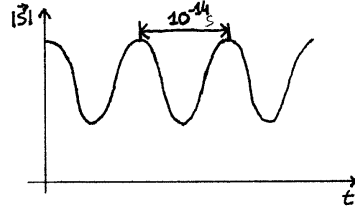


Figura 1.7:  $|\langle \mathbf{S} \rangle|(t)$ , función a oscilaciones muy rápidas.

### 1.5.2. Promedio temporal del vector de Poynting

Si partimos de la expresión para ondas armónicas planas:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{E}_R \cdot \mathbf{E}_R) \mathbf{k},$$

y representamos  $\mathbf{S}$  para la luz visible veremos una función oscilante de frecuencia  $\simeq 10^{14} \text{ Hz}$ , con un período tan breve que prácticamente ningún detector tiene resolución temporal para notar las oscilaciones. Si ponemos un detector y enchufamos un osciloscopio al detector sólo veremos promedios temporales (figura 1.7). Se requiera una magnitud que tenga en cuenta nuestra incapacidad de seguir las variaciones rápidas del vector de Poynting “instantáneo”,  $\mathbf{S}(t)$ . Entonces<sup>7</sup>

$$\langle \mathbf{S} \rangle(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t') dt'$$

donde  $\Delta t$  representa el intervalo sobre el que se promedia. Afortunadamente para las frecuencias que nos interesan el promedio temporal de energía no depende del tiempo de respuesta<sup>8</sup>,  $\Delta t$ . No hay más que hacer la integral, siempre recordando usar la representación real puesto que hay un producto de campos.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}) \\ \mathbf{B}_R &= \frac{1}{2} (\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^*(\mathbf{r}) e^{i\omega t}) \end{aligned}$$

llevamos esto a la expresión general para  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ , puesto que la onda no tiene por qué ser plana.

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0) \\ &\quad + \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0 e^{-i2\omega t} + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i2\omega t}) \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Habitualmente se utilizan los paréntesis angulares para denotar “promedio sobre las configuraciones posibles” y la barra superior para el promedio temporal. Éste no es el caso aquí.

<sup>8</sup>Para hacerse una idea, un tiempo de respuesta muy bueno, correspondiente a un detector muy rápido, sería del orden del nanosegundo,  $\Delta t \simeq 10^{-9} \text{ s}$ .

nos quedan cuatro integrales. Para el primer paréntesis no hay problema:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{4\mu_0} (\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^* + \mathbf{E}_0^* \wedge \mathbf{B}_0 + \dots)$$

pero en los puntos suspensivos tenemos las integrales

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{\pm i2\omega t'} = \frac{1}{i2\omega\Delta t} (e^{\pm i2\omega(t+\Delta t)} - e^{\pm i2\omega t})$$

en el rango óptico y con los detectores que utilizamos,  $\Delta t$  nunca es suficientemente pequeño como para que estas integrales sean relevantes: el denominador vale como mínimo  $10^5$  ya que  $\omega\Delta t \simeq 10^{14}\Delta t \simeq 10^5$  con un  $\Delta t \simeq 10^{-9}s$ , que es razonable. Así:

$$\langle \mathbf{S} \rangle (\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \} \quad (1.9)$$

para una onda armónica. Lo bueno de esta fórmula es que está escrita de modo que se puede sustituir la representación compleja. Es importante recalcar que esto *sólo vale para ondas armónicas*. Para otro tipo de ondas no somos capaces de dar una expresión explícita.

**Ejemplo** Particularizar la expresión hallada para la onda armónica plana

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \wedge \mathbf{B}_0^* e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \}$$

se desemboca en la siguiente expresión

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k$$

donde  $|\mathbf{E}_0|^2 = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*$ .

## 1.6. Sobre la notación: ondas armónicas y ondas armónicas planas

Representamos una onda armónica así:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (1.10)$$

(hay dependencia espacial en la función preexponencial). Pero para la onda armónica *plana*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.11)$$

Las notaciones se corresponden de la siguiente manera: escribimos una onda armónica plana como onda armónica usando el siguiente término de amplitud.

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

## 2 Materia y su interacción con la radiación

### 2.1. Introducción. Tipos de carga

Tenemos que dar dos especificaciones: cómo es la materia y cómo interacciona la radiación con ella. Para ser más precisos, deberíamos describir el aspecto “carga” de la materia, porque es el que afecta a y es afectado por los campos electromagnéticos. Utilizaremos una descripción clásica (no cuántica), que será suficiente para los fenómenos y la precisión que nos interesan.

Para empezar, hay que establecer una distinción entre cargas libres y cargas ligadas.

#### 2.1.1. Cargas libres

Son aquellas cargas o sistemas de cargas que vistos con el grado de precisión que tenemos no tienen ninguna estructura interna. Por ejemplo, los electrones.

Las cargas libres las supondremos puntuales, de modo que será suficiente para su especificación dar su carga, su masa y su trayectoria  $\mathbf{r}(t)$ . Ésta es solución de la ecuación dinámica de NEWTON (ecN):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

para nosotros la fuerza será exclusivamente la del campo em, dada por la ecuación de LORENTZ, 1.5.

#### 2.1.2. Cargas ligadas: hipótesis

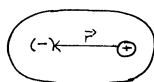
Son sistemas de cargas con estructura interna. Por ejemplo, átomos, moléculas o agregados de moléculas...

Para describir las cargas ligadas pensaremos en el ejemplo de un átomo. Tiene un tamaño característico de  $0.1nm$ . Para tratarlo la teoría clásica se demuestra insuficiente. Rigurosamente, necesitaríamos de la Física Cuántica. Pero vamos en su lugar a usar la Física clásica “parcheada” para evitar las dificultades de las que somos conscientes<sup>1</sup>. Basta con la teoría clásica completada con las hipótesis oportunas para describir los fenómenos de nuestro interés.

Primera hipótesis (no clásica): los átomos tienen un estado fundamental estable. Podemos imaginar una nube de carga alrededor del núcleo, una idea semicuántica del átomo. Esa nube de carga tendrá un centro de carga que puede coincidir o no con el núcleo. Pensaremos para simplificar el análisis en moléculas no polares, es decir, sin momento dipolar permanente. Para ellas, el centro de carga positiva y negativa está superpuesto.

---

<sup>1</sup>por ejemplo, la inestabilidad de los átomos si efectivamente los electrones radian en su trayectoria alrededor del núcleo.



**Figura 2.1:** Molécula perturbada (centros de carga separados). El origen de coordenadas está en la carga positiva y el vector  $\mathbf{r}$  está dirigido hacia la carga negativa.

De todos modos, la única dificultad extra de tratar con momentos dipolares permanentes es meramente calculatoria.

Un campo electromagnético perturbará el átomo, cambiando la forma de la nube electrónica en el estado fundamental. El centro de carga negativa ya no estará sobre el núcleo: se ha creado un pequeño dipolo. Esto corresponde a *excitar* el átomo. El átomo se intentará oponer a esta perturbación; aparecerá una fuerza de recuperación para reunir de nuevo los centros de carga. Dentro de una teoría clásica diríamos que aparecen fuerzas internas en el átomo que intentan compensar el efecto de la perturbación de los agentes externos. Para encontrar una expresión explícita para estas fuerzas que nos permita incluirlas en la ecuación de movimiento vamos a hacer la suposición de que la separación inducida entre centros de carga es muy pequeña, lo que nos permitirá usar una expresión lineal en la separación<sup>2</sup>, el primer término del desarrollo en serie de  $\mathbf{F}_{int}$ :

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{r}) \simeq m\omega_0^2\mathbf{r}$$

donde  $m$  es la masa del electrón y  $\omega_0$  es lo que llamaremos *frecuencia de resonancia*.

Hay casos, como es el del campo debido a la radiación de un láser en los que habría que tener en cuenta o ( $\mathbf{r}^2$ ), un término de orden superior, ya que la separación entre las cargas es grande (y la aproximación lineal imprecisa) cuando el campo es muy fuerte.

Revisemos las hipótesis:

- Existe un estado fundamental estable.
- No hay momento dipolar permanente.
- Para las fuerzas internas de compensación vale una aproximación lineal, porque la separación de centros de carga es pequeña.

<sup>2</sup>La *óptica lineal* es aquella para la que vale la aproximación lineal para las fuerzas internas. La mayoría de las fuentes de luz se pueden caracterizar con el desarrollo sólo lineal de la fuerza recuperadora.

Un *medio (electromagnéticamente) isótropo* es un medio en el que no se pueden distinguir unas direcciones de otras a efectos de propagación de campos electromagnéticos. El que se haga una aproximación lineal no implica que el medio sea isótropo o deje de serlo. De hecho se puede hacer óptica lineal anisótropa utilizando para la fuerza recuperadora un coeficiente no escalar, sino tensorial.



## 2.2. Ecuación de movimiento de la carga

### 2.2.1. Formulación y discusión de sus aspectos

Estamos en condiciones de escribir la ecuación dinámica para la carga ligada

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\omega_0^2\mathbf{r}$$

Como vemos la fuerza recuperadora es la del oscilador armónico de frecuencia natural  $\omega_0$ . Hemos reducido el problema a este paradigma físico tan general y a la vez tan simple.

Pero tenemos que atender a las ecM: las cargas aceleradas generan ondas electromagnéticas que llevan energía que debe ser retirada de la energía del sistema de cargas en movimiento. Por tanto, debe tenerse en cuenta que el sistema de cargas tendrá pérdidas irreversibles de energía (la oem generada se va al infinito, no regresa). Otros mecanismos de pérdida de energía son las colisiones. Vamos a introducir un término de fricción *ad hoc*, que dé cuenta de modo fenomenológico de esas pérdidas de energía:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\omega_0^2\mathbf{r} - \gamma m\dot{\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

La dependencia en la velocidad la hemos elegido porque es la más simple posible.  $\gamma$  representa una constante<sup>3</sup>.

Para la carga libre, la ecuación de evolución es la misma pero con  $\omega_0 = 0$ , ya que no hay fuerza recuperadora. Basta pues resolver el problema de la carga ligada para después particularizar para frecuencia natural nula y obtener las soluciones de la carga libre.

La fuerza de fricción que hemos utilizado es la más sencilla que se puede proponer, pero no necesariamente es exacta. Nos limitaremos a un análisis elemental. Un tratamiento más avanzado utiliza un término en  $\dot{\ddot{\mathbf{r}}}$  en lugar de  $\dot{\mathbf{r}}$ , con conclusiones finales semejantes. En algunos textos, como el [Stone] o el [Cabrera] encontramos la expresión

$$\gamma = \frac{q^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$$

$\omega$  es la frecuencia del campo incidente sobre la carga ligada. Un valor para un átomo aislado es  $\gamma \simeq 10^8 s^{-1}$ . Los valores son mayores incluso cuando se considera la materia como agrupamiento de átomos próximos. Nótese que con una expresión de este tipo la fuerza de fricción no dependería de la masa de la partícula.

### 2.2.2. Solución para la carga ligada

Resolveremos la ecuación de movimiento para un caso particular de onda incidente muy significativo, que es el que nos interesará en el resto del curso: la onda armónica

<sup>3</sup>Detengámonos para examinar el problema siguiente: llega una onda, pone en movimiento la carga ligada y por lo tanto a la onda incidente se superpone la onda debida al movimiento de la carga ligada. Eso es algo que tendremos en cuenta *para el resto de las cargas y sistemas de cargas del universo*, pero no para la propia carga ligada que es foco de un nuevo campo. La razón de esta limitación, artificial, es que tener en cuenta la influencia del campo de una carga sobre sí misma constituye un problema formidable, que se aborda de forma interesante en [Jackson]. Pero si se hace esta consideración el término de rozamiento ya no puede tener la forma que hemos sugerido.

plana.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}\end{aligned}$$

no hay más que utilizar estos campos en la expresión de la ecuación 1.5. La ecuación resultante es muy complicada,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}) - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m \dot{\mathbf{r}}$$

de modo que vamos a introducir dos aproximaciones:

1. Para una oap sabemos que

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_0|$$

si esto se lleva a la ecuación

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B})$$

el segundo término va en  $\frac{v}{c}$ . Así, podemos aproximar la fuerza sólo por la fuerza eléctrica,  $\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}$ , lo que es como suponer que  $v \ll c$ . Si el campo em fuera suficientemente fuerte (por ejemplo, el debido a un laser) esto no sería cierto. En todo caso, dejamos pendiente de comprobación la sensatez de la hipótesis. La ecuación queda

$$\begin{aligned}m\ddot{\mathbf{r}} &= q\mathbf{E} - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m \dot{\mathbf{r}} \\ &= q\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} - m\omega_0^2 \mathbf{r} - \gamma m \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}$$

2. La ecuación 2.1 es no lineal en la medida en que la incógnita  $\mathbf{r}$  aparece en un exponente. Admitiremos que en la solución la separación entre cargas positivas y negativas cumple:

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \ll \lambda$$

El tamaño típico de los átomos es del orden del nm, y  $\mathbf{r}(t)$  cabe esperar que será como máximo el tamaño del átomo. La longitud de onda del visible es del orden de 500 veces mayor. Así,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t) \simeq \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(0) = cte$$

Entonces podemos incluir este factor constante en la amplitud  $\mathbf{E}_0$ . Con ello queda la siguiente expresión para la fuerza de LORENTZ

$$\mathbf{F} \simeq q\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

La ecuación que tenemos que resolver se reduce una vez admitidas ambas hipótesis a:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.2)$$

que es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado y forzado. La teoría de edos nos aporta

$$\mathbf{r}_{gi} = \mathbf{r}_{pi} + \mathbf{r}_{gh}$$

La solución general de la homogénea ( $\mathbf{r}_{gh}$ ) la tomamos con  $\mathbf{E}_0 = 0$ , ya que dependerá de algo parecido a  $e^{-\gamma t}$ . Siendo  $\gamma$  tan grande ( $\simeq 10^8 s^{-1}$ ) el tiempo del *transitorio* que es la solución de la homogénea es del orden del  $10ns$ . Aquí no nos interesaremos por esos transitorios rápidos. Nos quedaremos pues con una solución particular de la inhomogénea ( $\mathbf{r}_{pi}$ ), que dependerá del campo eléctrico.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$$

$\mathbf{r}_0$  se obtiene insertando esta solución en la ecuación 2.2. Se calculan las derivadas  $\dot{\mathbf{r}} = -i\omega \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$  y  $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$  y la ecuación queda

$$(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

despejando, la amplitud y la ecuación de la trayectoria de la carga ligada resultan ser

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.3)$$

En el caso de un átomo  $m$  y  $q$  son la masa y la carga del electrón, respectivamente.

### Comentarios a la ecuación de la trayectoria 2.3

1. El desplazamiento de las cargas es lineal en el campo.
2. La constante de proporcionalidad es compleja, lo que deriva del hecho de que hay pérdidas (profundizaremos en esto más adelante).
3. La constante de proporcionalidad depende de la frecuencia de forzamiento. Sabemos que si la frecuencia de forzamiento es muy próxima a la de resonancia, la respuesta será muy fuerte.

### Cumplimiento de las hipótesis

En cuanto al cumplimiento de las hipótesis que nos han conducido a 2.3, se darán dos situaciones:

- $\omega \neq \omega_0$  (aproximación muy buena) y
- $\omega = \omega_0$  (resonancia). En este segundo caso la aproximación de estos cálculos clásicos es peor, aunque suficiente. Para este caso se podría pasar al modelo cuántico de la materia.

**Ejercicio** verificar numéricamente estas dos afirmaciones sobre las aproximaciones.

**Ejemplo** Evaluar el cumplimiento de las hipótesis  $\dot{\mathbf{r}} \ll c$  y  $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \ll \lambda$  para luz solar y electrones como carga ligada.

Para la luz solar

$$|\mathbf{E}_0|_{solar} \simeq 10^3 \frac{V}{m}$$

una frecuencia típica del visible es

$$\omega \simeq 3 \times 10^{15} \frac{rad}{s}$$

utilizamos el valor de  $\gamma \simeq 10^8 s^{-1}$  y los datos de carga y masa del electrón. Puesta en forma real, la solución para una carga libre es una oscilación de amplitud

$$|\mathbf{r}_0| \simeq 2 \times 10^{-17} m = 2 \times 10^{-8} nm$$

y longitud de onda  $\lambda \simeq 600 nm$ . Vemos que la diferencia de orden de magnitud entre el tamaño del átomo ( $\simeq$  separación de las cargas) y la longitud de onda incidente justifica la primera aproximación tomada

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)| \leq 2 \times 10^{-8} nm \ll \lambda = 600 nm$$

En cuanto a la velocidad máxima, es del orden de

$$|\dot{\mathbf{r}}_0| \omega \simeq 6 \times 10^{-2} \frac{m}{s}$$

lo cual queda muy lejos de la velocidad de la luz, lo que justifica (son 10 órdenes de magnitud...) el haber despreciado el efecto del campo magnético.

### 2.2.3. Solución para la carga libre

La ecuación de la trayectoria para la carga libre es

$$\mathbf{r}(t) = \frac{-q}{\omega^2 + i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

donde  $q$  es la carga y  $m$  la masa (por ejemplo, de un ión).

# 3 Ecuaciones de Maxwell macroscópicas

## 3.1. Planteamiento

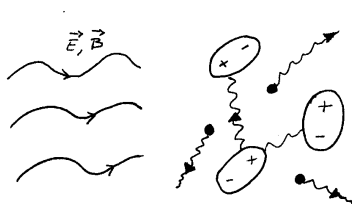
Éste es uno de los grandes bloques del curso: el estudio de la propagación de las ondas en la materia, los fenómenos relacionados con la interacción radiación-materia. Nos serviremos de los conceptos adquiridos sobre las ondas (capítulo 1) y sobre la materia (capítulo 2). El problema que se nos plantea es muy difícil, porque no tenemos que resolver las ecM (que ya son difíciles de por sí) sino las ecM acopladas a la materia (habría que describir el estado de movimiento de  $\sim 10^{2x}$  átomos por metro cúbico). Imposible: hay que hacer aproximaciones. Podemos considerar dos grandes tipos de aproximaciones:

1. Medios *ópticamente* poco densos (o diluídos).
2. Medios *ópticamente* densos.

En el resto del curso nos dedicaremos principalmente a los medios densos, que constituyen la situación más común. Pero antes vamos a tratar sucintamente los poco densos.

### Ejemplos

- Un gas es en general, desde el punto de vista de la óptica un medio denso. Por ejemplo, el aire es un medio *ópticamente* denso.
- Un medio poco denso es uno en que la distancia entre las partículas es mayor que la longitud de onda. En general, se pueden formar medios poco densos en el laboratorio. El medio interestelar podría considerarse un medio *ópticamente* poco denso.



**Figura 3.1:** Interacción radiación-materia: los campos de las cargas excitadas (libres y ligadas) se superponen al campo incidente.

## 3.2. Medios ópticamente poco densos

### Aproximación de partículas independientes

Si las partículas sólo interactúan con el campo incidente, podemos hacer la aproximación de partículas independientes. Esto será correcto sólo si las cargas están suficientemente separadas entre sí. No hay más que determinar la evolución de las cargas (independientemente unas de otras) en relación con el campo incidente.

### Procedimiento de solución

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \text{ como dato} \longrightarrow \mathbf{r}(t) \longrightarrow \mathbf{E}', \mathbf{B}$$

Normalmente se da el dato de los campos. Entonces se encuentra la ecuación de movimiento de una carga aislada, independiente (como si las demás no estuvieran). A partir de esto se pueden hallar los campos reemitidos por esa carga. El interés está ahí, porque los campos con prima (reemitidos) contienen información sobre la materia (cargas, masas, frecuencias naturales). Estos problemas se suelen llamar problemas de *scattering* (esparcimiento) y para ellos se define un parámetro que se llama *sección eficaz* y que condensa gran parte de la información: cuánta energía del campo incidente toma el proceso de esparcimiento, cuán eficaz es el proceso de propagación.

La traducción de *scattering* por *dispersión* puede llevar a la confusión, ya que en Óptica se llama en general dispersión a la dependencia de una magnitud respecto a la frecuencia de la radiación.

## 3.3. Medios ópticamente densos

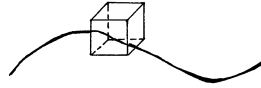
### 3.3.1. Hipótesis. El continuo óptico

Esta segunda aproximación nos conducirá a caracterizar cualquier sustancia por un parámetro llamado *índice de refracción*. Utilizaremos las ecuaciones de MAXWELL macroscópicas o en la materia, ecMm.

En la materia ordinaria puede haber del orden de  $10^{28}$  átomos por metro cúbico. La interacción electromagnética mutua de esta miríada de átomos constituye un problema formidable. Si consideramos el volumen de un cubo cuyas aristas sean longitudes de onda  $\lambda$  en el visible, encontraremos que en  $\lambda^3$  hay del orden de  $10^{10}$  átomos<sup>1</sup>. Esto nos indica que no podemos hacer la aproximación de partículas independientes. Pero sí

1. aprovecharemos lo próximos que se encuentran entre sí los átomos. Podemos aventurar que en todo el  $\Delta V$  las cargas verán el mismo campo, pues las variaciones espaciales de éste se producen en el orden de la longitud de onda, que es mucho mayor que  $\Delta V^{\frac{1}{3}}$ .

<sup>1</sup>en la atmósfera por ejemplo, tenemos  $10^7$  átomos.



**Figura 3.2:** En  $\Delta V \ll \lambda^3$  encontraremos muchísimas partículas, cargas libres y ligadas. La dinámica en su interior es muy complicada. Pero por su tamaño frente a  $\lambda$ , en el interior el campo se puede considerar homogéneo.

2. prescindiremos del carácter discreto de la materia. Esto lo haremos introduciendo promedios espaciales de las magnitudes implicadas:  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \rho, \mathbf{j}$ . Esto simplificará obviamente la descripción. El problema es que ahora no vamos a poder separar campo incidente de campo reemitido (debido a la proximidad de las cargas):  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  tendrán dos componentes indistinguibles.

Vamos a utilizar un pequeño volumen esférico  $\Delta V$  parametrizado de modo que  $\mathbf{r}$  sea la coordenada del centro de la esfera y  $\mathbf{r} + \mathbf{r}' \in \Delta V$ . Sobre este volumen los promedios se escriben como sigue:

$$\mathbf{E}_{mac}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}'$$

los subíndices distinguen campo microscópico de campo macroscópico (que por ser un promedio no hace caso de las variaciones a escala atómica).

La longitud de onda de la radiación es tan grande que ésta no “ve” el carácter discreto de la materia. De nuevo las hipótesis de la aproximación fenomenológica están pendientes de justificación mediante experimento.

Utilizaremos la notación siguiente para el promedio espacial

$$\langle \mathbf{E}_{mic} \rangle \equiv \mathbf{E}_{mac}$$

### 3.3.2. Promedios para llegar a las ecMm

Esperamos que el problema de las ecMm sobre un continuo sea más sencillo que el problema de las ecM sobre cargas discretas.

Como las derivadas  $\frac{\partial}{\partial x}$  de las ecuaciones de MAXWELL son respecto a  $\mathbf{r}$  y la integral es respecto a  $\mathbf{r}'$  se puede escribir

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial x} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{mic} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{E}_{mic} \rangle = \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} \end{aligned}$$

Tomamos promedios a ambos lados de las ecM:

$$\begin{aligned}\langle \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mic} \rangle &= \langle \rho \rangle \\ \langle \nabla \cdot \mathbf{B}_{mic} \rangle &= \langle 0 \rangle \\ \left\langle \nabla \wedge \mathbf{E}_{mic} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}}{\partial t} \right\rangle &= \langle 0 \rangle \\ \left\langle \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mic} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}}{\partial t} \right\rangle &= \langle \mathbf{j} \rangle\end{aligned}$$

Se convierten en

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} &= \langle \rho \rangle \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{mac} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E}_{mac} + \frac{\partial \mathbf{B}_{mac}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j} \rangle\end{aligned}$$

la segunda y tercera ecuaciones están ya en el formato que buscamos, mientras que las otras necesitan de algunos arreglos, para los que nos valdremos de los siguientes resultados del electromagnetismo

1.  $\langle \rho \rangle = \langle \rho_{lib} \rangle + \langle \rho_{lig} \rangle$ , donde  $\langle \rho_{lig} \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ . El vector

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \mathbf{r}_j \quad (3.1)$$

recibe el nombre de *vector polarización* (nada que ver con la polarización de una onda) y corresponde al momento dipolar por unidad de volumen.

2.  $\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}_{lig} \rangle + \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle$ , donde  $\langle \mathbf{j}_{lig} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M}$ . El vector

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{1}{2} q_j \dot{\mathbf{r}}_j \wedge \mathbf{r}_j$$

se llama *vector magnetización*, y corresponde a la magnetización por unidad de volumen.

Así las cosas las dos ecuaciones de MAXWELL que dependen de la materia quedan

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{mac} &= \langle \rho_{lib} \rangle - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \nabla \wedge \mathbf{B}_{mac} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{mac}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{M}\end{aligned}$$

Por concisión prescindiremos en lo que sigue de los subíndices *mac*; usaremos  $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_{mac}$  y  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{mac}$ . Definiendo unos nuevos vectores (llamados, respectivamente, vector *desplazamiento eléctrico* y vector *campo magnético*)

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}\end{aligned}$$



se reescriben las dos ecuaciones en cuestión

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \langle \rho_{lib} \rangle \\ \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle\end{aligned}$$

Las ecMm son ecuaciones en las que aparecen cuatro campos. Y eso es porque dos de ellos tienen en cuenta la materia, las  $\sim 10^{28}$  partículas por metro cúbico:  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$ . Éstas son las ecuaciones de MAXWELL macroscópicas:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \langle \rho_{lib} \rangle \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle \quad (3.5)$$

Las ecMm son las ecM de partida, pero con las densidades de carga y de corriente ligadas incluidas en los campos del lado izquierdo. Los resultados de la propagación en el vacío se pueden trasponer con ciertas precauciones, y resulta para la energía transportada por la onda

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

y el promedio temporal para ondas armónicas

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \}$$

La ecuación de continuidad es

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = 0$$

### 3.3.3. EcmM para ondas armónicas

La materia se puede polarizar de muchos modos, pero nosotros sólo estamos interesados en las  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  causadas en el material por los campos electromagnéticos que constituyen las oem que se propagan en el medio. De modo que los  $\mathbf{r}_j$  de la definición de  $\mathbf{P}$  son las separaciones entre carga positiva y negativa inducidas por los campos incidentes. A partir de ahora sólo utilizaremos ondas armónicas como agentes de perturbación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$$

y por lo dicho antes del único mecanismo de polarización que nos interesa,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ . En virtud de los razonamientos sobre la separación entre cargas cuando incide un campo (aproximación lineal)<sup>2</sup> y a partir de los resultados fenomenológicos se puede escribir que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

<sup>2</sup>Para justificar esta expresión conviene utilizar la ecuación 2.3 en la definición de  $\mathbf{P}$  (ecuación 3.1).

### 3 Ecuaciones de MAXWELL macroscópicas

donde  $\chi_e, \chi_m$  son, respectivamente la *susceptibilidad eléctrica* y la *susceptibilidad magnética* del material. Aprovechando esto podemos plantear una relación similar para la densidad de corriente, ya que

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \dot{\mathbf{r}}_j$$

y la velocidad para una onda armónica es proporcional a  $\omega \mathbf{E}$ , con lo que

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Donde  $\sigma$  se llama *conductividad*. Estas aproximaciones lineales serán suficientes para el trabajo que vamos a hacer.

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \end{aligned}$$

y podemos definir  $\epsilon$  la constante dieléctrica del material y  $\mu$ , su permeabilidad magnética de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

En general ocurrirá que

$$\chi_e, \chi_m, \sigma, \epsilon, \mu$$

serán funciones con valores complejos del punto  $\mathbf{r}$  y también de la frecuencia  $\omega$ . Además, si la fuerza recuperadora no fuera isótropa, todas estas funciones podrían ser tensores.

### Conclusiones

Sólo necesitamos dos campos,  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ . Para lo demás tendremos la información sobre el material condensada en los tensores  $\chi_e, \chi_m$  y  $\sigma$ , si logramos expresar la densidad de carga libre en función de alguno de ellos, lo que haremos por medio de la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \langle \rho_{lib} \rangle}{\partial t} = -\nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t})$$

debido a que las ondas son armónicas podemos integrar para obtener

$$\langle \rho_{lib} \rangle = \nabla \cdot \left( -\frac{i}{\omega} \sigma \mathbf{E} \right)$$

### Ecuaciones de Maxwell macroscópicas para ondas monocromáticas

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})) &= 0 \\ \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r})) &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - i\omega \mu \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + i\omega \epsilon_{gen} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) &= 0\end{aligned}$$

donde podemos llamar *constante dieléctrica generalizada* (que contiene el efecto de las cargas ligadas y también el de las cargas libres) a la cantidad

$$\epsilon_{gen} = \epsilon + \frac{i}{\omega} \sigma$$

Hemos reducido el problema de describir la materia al de especificar dos funciones,  $\epsilon_{gen}$  y  $\mu$ , que pueden ser complicadas. Nuestro trabajo es ahora el de dadas estas dos funciones resolver las ecuaciones para diversos medios, pues sus soluciones caracterizan completamente la propagación de la radiación en los medios ópticamente densos.

#### 3.3.4. Clasificación de los medios

En esta sección vamos a dar la nomenclatura usual que clasifica los medios materiales en función de las propiedades de las funciones  $\epsilon_{gen}$  y  $\mu$ .

La permeabilidad magnética es casi siempre  $\mu \approx \mu_0$  (medios no magnéticos) y así lo supondremos en lo que sigue. En función de lo que valgan la conductividad y la constante dieléctrica generalizada tendremos diversos tipos de materiales, que etiquetamos con los siguientes nombres convencionales

- **conductores**  $\sigma \neq 0$ , **dieléctricos**  $\sigma = 0$  (no tienen cargas libres).
- $\epsilon_{gen}$  escalar: medio **isótropo**, si  $\epsilon_{gen}$  es un tensor: medio **anisótropo**.
- si  $\epsilon_{gen}$  es función de la posición el medio se dice **inhomogéneo**. Si no, el medio es **homogéneo**.
- si  $\epsilon_{gen}$  es función de la frecuencia, estamos frente a un medio **dispersivo**. Si no es así, el medio es no **dispersivo**.

Vamos a ver en el siguiente tema que si

- $\epsilon_{gen} \in \Re$  estamos frente a un medio **transparente** y si  $\epsilon_{gen} \in \mathcal{C}$  el medio es **absorbente**.

El tipo de preguntas que nos haremos en lo sucesivo es del tipo ¿cómo se propaga la luz en un medio dieléctrico, anisótropo e inhomogéneo?, etc, hasta agotar una serie de combinaciones significativas. El caso más general corresponde a un medio anisótropo, inhomogéneo, dispersivo y absorbente.



## 4 Medios homogéneos e isotrópos

### 4.1. Planteamiento del problema

En este capítulo nos preocuparemos por caracterizar adecuadamente los medios homogéneos e isotrópos cuando son iluminados por ondas armónicas planas inhomogéneas. pág. 29.

Vamos a ver qué soluciones ecMm existen cuando  $\epsilon_{gen}$  es un escalar (homogeneidad) y no depende de la posición (isotropía) tales que la forma de los campos sea

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

con  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{k}_c, \omega$  constantes. Lo que queremos saber es qué relaciones vamos a obtener entre los parámetros de la onda y con los del material ( $\epsilon_{gen}, \mu$ ) si imponemos el cumplimiento de las ecuaciones de MAXWELL sobre el tipo de soluciones que acabamos de escribir.

### 4.2. Solución

Vamos a aplicar las ecMm en secuencia.

1.  $\epsilon_{gen} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , pero si  $\epsilon_{gen} \neq 0$  (que es el caso que vamos a considerar en todo lo sucesivo) entonces se tiene  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Lo aplicamos al campo de onda plana de la sección anterior y obtenemos

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

2. La siguiente ecuación es lo mismo que decir  $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ , y por lo tanto,

$$\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{H}_0 = 0$$

3. Un rotacional da

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0$$

4. Y el otro:

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{\epsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{H}_0$$

#### 4 Medios homogéneos e isotrópicos

Ahora sólo tenemos que leer las ecuaciones. Ésta va a ser la estrategia para afrontar todos los problemas de propagación del curso. Combinando las (3) y (4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_0 &= -\frac{1}{\epsilon_{gen}\omega} \mathbf{k}_c \wedge \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0 \\
 &= -\frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} (\mathbf{k}_c \wedge \mathbf{k}_c \wedge \mathbf{E}_0) \\
 &= -\frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} [\mathbf{k}_c (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{k}_c)] \\
 &= \frac{1}{\mu\epsilon_{gen}\omega^2} \mathbf{E}_0 \mathbf{k}_c^2
 \end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{k}_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon_{gen} = \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

esto se utiliza más habitualmente en la forma

$$n_c^2 = c^2 \mu \epsilon_{gen} = \frac{\mu \epsilon_{gen}}{\mu_0 \epsilon_0}$$

este parámetro es el *índice de refracción complejo*. Cuando la constante dieléctrica sea compleja (medios absorbentes) el índice de refracción será complejo. Lo mismo ocurrirá al vector de onda, y ésta es la razón por la que hemos venido usando el subíndice  $c$ .

Descomponemos el vector de onda y el índice de refracción en

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_c &= \mathbf{k} + i\mathbf{a} \\
 n_c &= n + i\kappa
 \end{aligned}$$

con  $\mathbf{k}, \mathbf{a}, n, \kappa$  cantidades reales, que reciben los nombres respectivos de *vector de ondas*, *vector de atenuación*, *índice de refracción* e *índice de absorción*. Entonces la expresión de la oap es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

La constante  $\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}$  disminuye con la propagación, y tanto más cuanto mayor es el vector de atenuación  $\mathbf{a}$ . Las partes imaginarias del vector de onda y del índice de refracción vienen de las pérdidas por fricción en el proceso de absorción-reemisión.

De la relación

$$\mathbf{k}_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_c^2$$

se pasa fácilmente (raíz cuadrada compleja) a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2) \\
 \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} &= \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa
 \end{aligned}$$

que forman las condiciones que buscábamos.

**Dos comentarios importantes (mucho cuidado)**

- No deberíamos llamar ondas *planas* a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

porque no lo son (en general  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{a}$  no son paralelos y por lo tanto,  $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, t)$ ). Deberíamos llamarlas *ondas planas inhomogéneas*: los planos de amplitud constante no coinciden con los planos de fase constante. Por lo tanto, cuando las llamemos oap, estamos abusando del lenguaje (y lo haremos).

- A partir de la estructura de la onda que hemos encontrado al principio del capítulo, es tentador pensar que  $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{k}_c)$  forman un triedro ortogonal. No es así, ya que intervienen vectores complejos (v. ejercicio 18).

**4.3. Medios transparentes**

Como  $\kappa = 0$  se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} &= 0\end{aligned}$$

$\mathbf{k}$  no se puede anular, luego surgen dos casos: o bien  $\mathbf{a} = 0$ , o bien  $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$ .

- $\mathbf{a} = 0$ . La onda es plana y los vectores  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  son perpendiculares entre sí, como en el vacío. Pero hay diferencias importantes respecto al vacío. La longitud de onda cambia

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} n = \frac{2\pi}{\lambda_{medio}} = \frac{2\pi}{\lambda_{vacio}} n$$

con lo que  $\lambda_{medio} = \frac{\lambda_{vacio}}{n}$ . También cambia la velocidad de fase

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}|z - \omega t &= cte \\ v_f &= \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

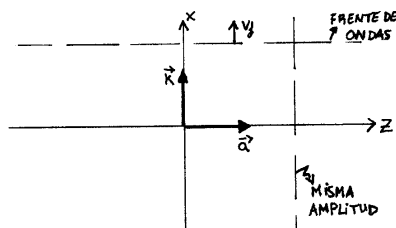
en algunos textos el índice de refracción que servirá para la óptica geométrica se define a partir de la última relación como:

$$n = \frac{c}{v_f}$$

En este tipo de onda todo se propaga con la velocidad de fase,  $\frac{c}{n}$ .

*Advertencia:* la velocidad de fase, etc. dependerán de la frecuencia (en general los medios son dispersivos,  $n = n(\omega)$ <sup>1</sup>).

<sup>1</sup>Como se ve, toda la clasificación que hicimos de los medios podríamos haberla escrito en términos del índice de refracción, en lugar de la constante dieléctrica generalizada  $\epsilon_{gen}$ , pero sólo porque tratamos medios no magnéticos.



**Figura 4.1:** Planos de misma amplitud y de misma fase y su velocidad de propagación en  $xz$ .

- $\mathbf{a} \neq 0$ . Podemos decir menos cosas. Poniendo  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$  y  $\mathbf{a} = a\mathbf{u}_z$  (figura 4.1), la onda se escribe

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-az} e^{i(kx - \omega t)}$$

la onda es armónica pero no plana. Los puntos con igual amplitud se sitúan sobre planos perpendiculares al eje  $z$ . Los frentes de onda (superficies equifase) son planos perpendiculares al eje  $x$ . Se puede obtener la siguiente expresión para la velocidad de fase

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n^2}}$$

y no podemos precisar más. No podemos decir qué ángulo forma  $\mathbf{E}$  con  $\mathbf{k}$  o  $\mathbf{a}$ . Sólo podemos decir que  $\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ . La importancia de esta solución se debe a

- que la veremos en el marco de reflexión–refracción como onda reflejada.
- que la propagación en el vacío es un caso particular de esa situación.

#### 4.4. Medios absorbentes

Ahora que  $\kappa \neq 0$ , la atenuación  $\mathbf{a}$  no será nula

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^2 - \mathbf{a}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (n^2 - \kappa^2) \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} &= \frac{\omega^2}{c^2} n\kappa \end{aligned}$$

tendremos que manejar inevitablemente ondas con vector de ondas complejo.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

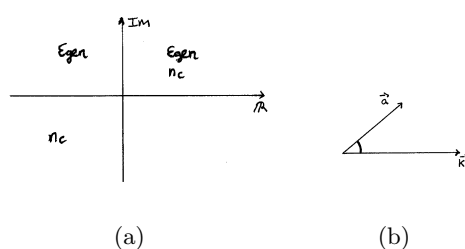
Se puede decir que

$$\Im\{\epsilon_{gen}\} \propto \gamma > 0$$

lo que quiere decir (ver figura 4.2) que la región accesible es sólo el semiplano superior del plano complejo. Pero si añadimos que  $\mu \simeq \mu_0$  y que

$$n_c^2 = \frac{\epsilon_{gen}}{\epsilon_0}$$





**Figura 4.2:** (a) Plano complejo (b) Dirección relativa de  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{a}$ : un ángulo agudo (atenuación). Un ángulo obtuso correspondería a amplitud creciente con el tiempo, que es el caso de un láser.

se puede decir que  $\epsilon_{gen}$  está en el primer o segundo cuadrantes, mientras que  $n_c$  está en el primero o en el tercero. O sea, que  $n$  y  $\kappa$  tienen siempre el mismo signo (la demostración deberá esperar). Eso hace que se pueda decir que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} = \frac{\omega^2}{c^2} \kappa n > 0$$

La condición que acabamos de escribir quiere decir que la onda se atenúa, pierde energía según se propaga (figura 4.2).

Como hemos visto “absorbente” no es una definición sino la enunciación de una propiedad. Un ejemplo de medio absorbente es el de los metales. Con los valores de  $\kappa$  en metales comunes ( $\kappa \sim 3$ ) la onda se extingue al cabo de pocas longitudes de onda (ver los problemas).

### Comentarios

(Sobre la noción intuitiva de absorción y su relación con el aspecto microscópico de la propagación de la luz en la materia).

1. En un dieléctrico las cargas que se pueden poner en movimiento son los electrones que están ligados a los átomos. Pero solo se ponen en movimiento cuando la frecuencia de la onda incidente es próxima a la frecuencia de resonancia. En esa circunstancia son muy opacos (por ejemplo, el vidrio normal al ultravioleta). Para el resto del espectro, ni se enteran de la presencia de la radiación: son muy transparentes.
2. En los metales el comportamiento de los electrones se aproxima más al de cargas libres. Eso hace que sean sensibles a un rango de frecuencias más amplio: los metales son muy absorbentes en una gran parte del espectro.

## 4.5. Índice de refracción y propiedades microscópicas

### 4.5.1. Planteamiento

Hemos visto que medios con distinto índice de refracción dan lugar a ondas de distinta naturaleza.

$$n_c^2 = \frac{\epsilon_{gen}\mu}{\epsilon_0\mu_0}$$

Estudiaremos ahora la relación entre índice de refracción y propiedades microscópicas del material para a partir de unas conocer el otro o viceversa (midiendo la absorción de energía, etc). El índice de refracción es una función observable y depende de parámetros que nos informan sobre la naturaleza microscópica del material:  $n_c(\omega, \omega_0, \text{densidad}, \gamma, \dots)$ .

Vamos a abordar una situación bastante simple: medios isotropos, no magnéticos ( $\mu \simeq \mu_0$  y por tanto  $n_c^2 = \epsilon_{gen}/\epsilon_0$ ) y no polares (no consideraremos momentos dipolares permanentes; ya los descartamos con ocasión del estudio microscópico de la interacción radiación materia en el cap. 2).

### 4.5.2. Cálculo de $\epsilon_{gen}$

Vamos a tener en cuenta por separado las cargas ligadas y libres. Si  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ :

$$\epsilon_{gen} = \epsilon + \frac{i}{\omega}\sigma$$

#### Contribución de las cargas ligadas: $\epsilon$

Nos vemos obligados a recuperar el subíndice  $_{mac}$ :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}_{mac}$$

es por definición el momento dipolar por unidad de volumen

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \mathbf{r}_j$$

Ahora vamos a *calcular* la constante de proporcionalidad  $\epsilon_0\chi_e$ , en lugar de limitarnos a decir que como  $\mathbf{r}_j \propto \mathbf{E}_{mic}$  entonces  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}_{mic}$ , es decir  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}_{mac}$ . La ecuación de la trayectoria de la carga ligada era

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_{mic} \quad (4.1)$$

y se puede escribir como

$$\mathbf{r} = \frac{1}{q}\alpha\mathbf{E}_{mic}$$

donde  $\alpha$  se llama *polarizabilidad*,

$$\alpha = \frac{\frac{q^2}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Ahora estamos preparados para escribir la polarización como suma sobre todos los átomos

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \alpha_j \mathbf{E}_{mic,j}$$

De momento vamos a suponer que todos los átomos son iguales, lo que implica que tienen la misma polarizabilidad

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \alpha \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{E}_{mic,j}$$

Aquí llegamos a la dificultad de este cálculo: ¿cuánto vale  $\mathbf{E}_{mic,j}$ ? Para calcularlo introducimos  $N$ , el número de átomos en  $\Delta V$ .

$$\mathbf{P} = \alpha \frac{N}{\Delta V} \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{j=1}^N \mathbf{E}_{mic,j}}$$

la cantidad señalada por una llave se parece mucho al campo macroscópico, pero en general no coincide con él. Eso es porque el campo macroscópico lo definíamos como integral a un volumen, y el promedio que hacemos aquí es sólo sobre *los átomos* contenidos en el volumen. El campo macroscópico se calcula también sobre *los espacios* entre átomos. Hay dos expresiones que relacionan  $\mathbf{E}_{mic}$  y  $\mathbf{E}_{mac}$ .

- La que vamos a utilizar efectivamente da<sup>2</sup>

$$\mathbf{P} = \alpha N_V \mathbf{E}_{mac}$$

(es decir, no hacer caso de la distinción entre integrar al volumen y sumar sobre los átomos del volumen). Esta expresión será buena en gases a baja presión y en general en medios que no tienen ninguna estructura ordenada. Es válida cuando

$$N_V \frac{\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$$

- Si se hicieran los cálculos, se encontraría esta expresión

$$\mathbf{P} = \alpha N_V \left( \mathbf{E}_{mac} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right)$$

que es de validez más general.

Salvo en los problemas usaremos la primera expresión, que es una aproximación de la segunda, pero que nos dará los mismos resultados cualitativos. Los aspectos fenomenológicos están recogidos en ambas ecuaciones.

<sup>2</sup> $N_V = \frac{N}{\Delta V}$  es el número de átomos por unidad de volumen. Parecido a la densidad.

Proseguimos el trabajo. Como

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{mac} \\ \epsilon &= \epsilon_0 (1 + \chi_e)\end{aligned}$$

se puede escribir, al ser  $\epsilon_0 \chi_e = N_V \alpha$

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_0 \left( 1 + N_V \frac{\alpha}{\epsilon_0} \right) \\ &= \epsilon_0 \left( 1 + N_V \frac{\frac{q^2}{m\epsilon_0}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right)\end{aligned}$$

esta expresión relaciona la constante dieléctrica con los parámetros microscópicos del medio, y admite una generalización si consideramos que los átomos son de diferente tipo ( $\omega_{0j}, \gamma_j$  varían de átomo a átomo). Volviendo al sumatorio que es la definición de  $\mathbf{P}$  y reconstruyendo los cálculos se obtiene

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 + \sum_j N_{Vj} \frac{\frac{q^2}{m\epsilon_0}}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right)$$

En la bibliografía encontraremos otra escritura, que se apoya en definir la magnitud *fuerza del oscilador*<sup>3</sup>

$$f_j = \frac{N_{Vj}}{N_V}$$

que representa la proporción de átomos de la especie  $j$  ( $\sum f_j = 1$ ). La expresión final adopta la forma

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right)$$

$q$  y  $m$  son comunes a todos los átomos, y para nosotros serán en general la carga y masa del electrón.

### Contribución de las cargas libres: $\sigma$

Para obtener el término con que contribuyen las cargas libres a la constante dieléctrica generalizada necesitamos calcular la conductividad.

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma \mathbf{E}_{mac}$$

nuestro objetivo es escribir la conductividad en función de la dinámica microscópica de las cargas. Promediamos a un volumen pequeño frente a la longitud de onda pero lo suficientemente grande como para contener un alto número de cargas

<sup>3</sup>En un tratamiento cuántico en el que se consideren varias frecuencias de transición, la fuerza del oscilador se interpreta como una magnitud que cuantifica lo predominante que es una transición (una frecuencia de resonancia).

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} q_j \dot{\mathbf{r}}_j$$

Derivando la posición  $\mathbf{r}_j$  (ecuación 4.1),

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \sigma \mathbf{E}_{mac} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \frac{q^2}{m} \frac{i}{\omega + i\gamma} E_{mic,j}$$

$q$  aparece sin índice alguno porque se trata siempre de la misma carga libre: los electrones. Al igual que para las cargas ligadas, introducimos un número de cargas libres en  $\Delta V$ ,  $N'_V$

$$\langle \mathbf{j}_{lib} \rangle = \frac{q^2}{m} \frac{i}{\omega + i\gamma} \frac{N'}{\Delta V} \frac{1}{N'} \underbrace{\sum_{j=1}^{N'} \mathbf{E}_{mic,j}}$$

La cantidad señalada, por razones ya discutidas, no es el campo macroscópico estrictamente, pero nosotros lo utilizaremos para los problemas que nos interesan, pues constituye una aproximación razonable (las cargas libres están tan dispersas que el sumatorio es buena aproximación numérica de la integral que se debería hacer en su lugar. No hay otras fórmulas de aproximación para las cargas libres, a diferencia de lo que ocurre para las cargas ligadas, donde hemos presentado una que será utilizada en los problemas). Por ello

$$\langle \mathbf{j}_{libre} \rangle = i N'_V \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega + i\gamma} \mathbf{E}_{mac}$$

con lo que

$$\sigma = i N'_V \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega + i\gamma}$$

### 4.5.3. Índice de refracción

Estamos llegando a nuestro objetivo declarado de expresar el índice de refracción en función de los parámetros microscópicos del material. Como  $n_c^2 = (n + i\kappa)^2 = \epsilon_{gen}/\epsilon_0$

$$n_c^2 = 1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} - N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

nuestro siguiente objetivo es despejar de ahí  $n$  y  $\kappa$ . Pero ya podemos decir dos cosas

- en general, los medios van a ser dispersivos: en este índice de refracción hay una marcada dependencia de la frecuencia en casi todos los términos.
- podemos decir lo mismo respecto al carácter complejo: en general habrá una parte compleja del índice de refracción. Lo absorbente que sea el medio dependerá de la frecuencia, pero en general en alguna parte del espectro el medio será absorbente.

- esta fórmula también contempla la posibilidad de medios inhomogéneos, a través de una dependencia espacial de las densidades de cargas libres y ligadas,  $N'_V$  y  $N_V$ .

Ya estamos listos para demostrar la afirmación que hicimos de que

$$\Im \{\epsilon_{gen}\} \propto \gamma_j, \gamma > 0$$

esto se deduce multiplicando y dividiendo por los complejos conjugados de los denominadores en los dos últimos términos. Como ambos parámetros  $\gamma_j, \gamma$  describen pérdidas, son constantes positivas por definición, por lo que se encuentra la relación expuesta y, consecuentemente  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ . Proseguiremos tratando de separar parte imaginaria y real del índice de refracción, y para ello abordaremos dos casos simples

### Dieléctrico: no hay cargas libres

Para un dieléctrico sólo tenemos la primera contribución:

$$n_c^2 = 1 + N_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

Esta expresión proviene de aproximar el campo eléctrico macroscópico por un sumatorio, lo que sólo se podía hacer si  $\frac{N_V\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$  (normalmente gases diluïdos). Podemos aprovechar este dato y utilizar la aproximación lineal de la raíz cuadrada

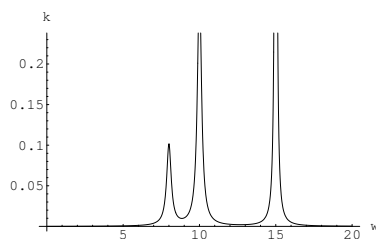
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Después extraemos parte real e imaginaria

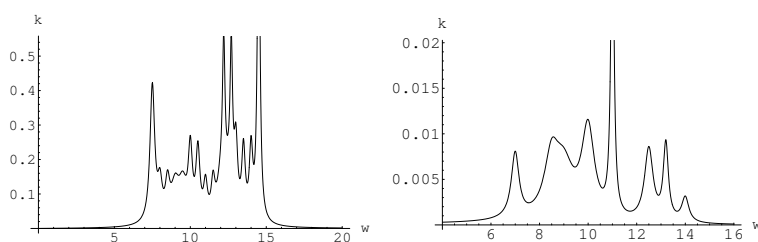
$$\begin{aligned} n + i\kappa &= 1 + N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \\ n &= 1 + N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{(\omega_{0,j}^2 - \omega^2) f_j}{(\omega_{0,j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega} \\ \kappa &= N_V \frac{q^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{\omega\gamma_j f_j}{(\omega_{0,j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2\omega} \end{aligned}$$

La parte imaginaria vale 0 a no ser que estemos en las proximidades de las resonancias, zonas denominadas *bandas de absorción*. La anchura de estos picos de  $\kappa$  es proporcional a  $\gamma_j$ . Una primera conclusión importante es que no existen medios transparentes o absorbentes en todo el espectro electromagnético. Los vidrios de ventana por ejemplo son muy opacos al ultravioleta.

Para átomos aislados (sin interacciones con el entorno) los picos se parecen a deltas de DIRAC. Si empezamos a considerar medios más densos (gases a presión creciente) la anchura de las bandas crece. Las bandas pueden estar próximas, y si es así, se superponen



**Figura 4.3:** Coeficiente de absorción de un material imaginario. Se han usado unidades arbitrarias y los datos siguientes  $f_j = \{0.1, 0.3, 0.6\}$ ,  $\omega_j = \{8, 10, 15\}$  y  $\gamma_j = \{1, 1, 0.5\}$ , respectivamente.



**Figura 4.4:** Banda ancha de absorción debida a la superposición de muchas bandas individuales (para la primera figura se utilizaron 20 de estas bandas; para la segunda, 8).

muchos picos para dar lugar a una verdadera banda ancha que puede cubrir todo el visible, como ocurre con los metales. En general, las bandas de absorción de una mezcla de gases son la superposición de las bandas de absorción individuales (figura 4.4).

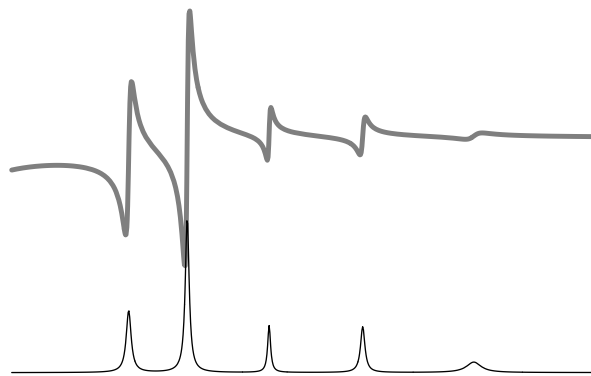
Como vemos, se puede obtener información sobre la materia estudiando cómo se propaga la luz en ella. El análisis espectral de una sustancia nos indica sus frecuencias de resonancia, y la anchura de las líneas de absorción nos da información sobre los parámetros  $\gamma$ . Las zonas donde  $\kappa$  vale cero son de transmisión perfecta, sin absorción.

De estos gráficos sólo se pide un conocimiento cualitativo.

Podemos representar también la parte real,  $n(\omega)$  (figura 4.5). Se trata de una cantidad creciente ( $\frac{dn}{d\omega} > 0$ ) para las zonas de transparencia, y cómo una buena condición para identificar las zonas de absorción es justo la contraria, ( $\frac{dn}{d\omega} < 0$ ). Las zonas así caracterizadas reciben la denominación, respectivamente, de zona de *dispersión normal* y zona de *dispersión anómala*<sup>4</sup>.

La dispersión normal se da en transparencia y es fácilmente observable, mientras que la dispersión anómala recibe ese nombre porque es raramente observable, ya que se encuentra en la zona de absorción.

<sup>4</sup>en dispersión anómala la velocidad de fase es mayor que  $c$ , el índice de refracción es  $< 1$  y las longitudes de onda cortas se refractan menos que las largas. Ver [Born].



**Figura 4.5:** Índice de refracción  $n(\omega)$  (arriba) y coeficiente de absorción  $\kappa(\omega)$  (abajo). Las escalas se han manipulado con objeto de mejorar la claridad de la presentación. La información cualitativa a retener concierne las zonas de dispersión normal y las zonas de dispersión anómala.

### Conductor: hay cargas libres

Las cargas libres contribuyen al índice de refracción complejo del siguiente modo:

$$n_c^2 = 1 - N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega(\omega + \gamma)}$$

Suponemos que sólo hay cargas libres aunque generalmente también hay cargas ligadas. Algunos valores para el caso particular del cobre son

$$\begin{aligned} N'_V &= 8 \times 10^{28} \frac{e^-}{m^3} \\ \gamma &= 4 \times 10^{13} s^{-1} \end{aligned}$$

Aunque  $\gamma$  es mayor que antes, todavía se cumple que  $\gamma \ll \omega$  y por eso podemos hacer la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} n_c^2 &\approx 1 - N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2} \\ &\approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{aligned}$$

donde se define la *frecuencia de plasma*

$$\omega_p \equiv \sqrt{N'_V \frac{q^2}{m\epsilon_0}}$$

para el cobre la frecuencia de plasma es  $\omega_p = 1.6 \times 10^{16} \frac{rad}{s}$  y corresponde al ultravioleta. Vamos a estudiar dos casos



#### 4.5 Índice de refracción y propiedades microscópicas

1. Visible  $\omega < \omega_p$  implica que  $n_c^2 < 0$  con lo cual  $n_c = i\kappa$  (hay una parte real, pero ha desaparecido por la doble aproximación que hemos hecho).

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega^2} - 1}$$

Para el cobre en el visible  $\omega \approx 3 \times 10^{15} \text{rad/s}$ , de modo que  $\kappa \approx 5$ . El cálculo no es muy exacto, pero da bien el orden del índice de refracción. El valor de  $\kappa$  es bastante grande, en consonancia con el hecho de que los metales son opacos a la radiación visible.

2.  $\omega > \omega_p$  de modo que  $n_c^2 > 0$ ; es decir  $n_c = n$ . El coeficiente de absorción es nulo. Lo que en el visible era fuertemente absorbente en el UV ( $\omega_p < \omega$ ) pasa a ser transparente y viceversa.



# 5 Refracción y reflexión en medios homogéneos e isótropos

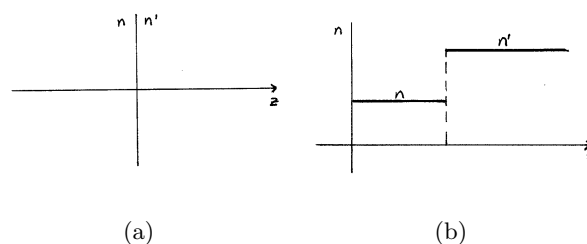
## 5.1. Planteamiento del problema

¿Qué le ocurre a la luz cuando pasa de un medio homogéneo e isótropo a otro medio homogéneo e isótropo diferente?. Ya sabemos resolver la propagación de la luz *dentro* de estos medios, pero no hemos afrontado la cuestión del paso de unos a otros.

### Suposiciones

- la superficie que separa ambos medios es un plano. Elegiremos los ejes de coordenadas de modo que sea el plano  $z = 0$ .
- Para nosotros cambio de medio significa automáticamente cambio de índice de refracción; Si los índices fueran iguales la propagación se produciría como si de un sólo medio se tratase.
- La discontinuidad de índice es una buena aproximación porque la interfase es de un tamaño del orden atómico, que es muy pequeño frente a la longitud de onda de la radiación que nos interesa. Un cambio de medio aire-vidrio queda, por ejemplo, bien modelado por esta discontinuidad.

Al llegar a la discontinuidad de índice se producirán dos ondas: la transmitida y la reflejada. Nuestro objetivo es en primer lugar demostrar este desdoblamiento de la onda incidente. Los datos son a) *el material* y b) *cómo lo iluminamos* y las incógnitas son



**Figura 5.1:** Dos medios ópticamente densos homogéneos e isótropos de índice  $n$  y  $n'$  respectivamente separados por una interfase plana,  $z = 0$ . En la segunda figura, escalón de índice en  $z = 0$ .

las características de la luz reflejada y la luz transmitida y, singularmente, su dirección (ley de SNELL), polarización (fórmulas de FRESNEL) y reparto energético (relaciones energéticas).

Insistamos un poco más sobre la interpretación microscópica. El haz de luz incide sobre las cargas del medio, que al ser aceleradas radian oem, que se superpondrán a la luz incidente formando la luz transmitida, por una parte, y retornarán al medio de origen, por otra<sup>1</sup>. El problema no es fácilmente abordable a esta escala microscópica (véase para ello el *teorema de extinción de la onda incidente* en [Born]); por ello recurriremos de nuevo a las ecMm. Hay que recordar que las ecMm funcionan tanto mejor cuanto más denso sea el empaquetamiento de materia; es decir, cuanto más infrecuentes sean los espacios vacíos entre átomos.

Vamos a resolver las ecMm para ambos medios, proponiendo unas soluciones que sean suficientemente generales pero que incorporen las condiciones iniciales (una onda incide sobre una superficie de discontinuidad). Como ambas soluciones no pueden ser independientes, estableceremos unas condiciones de frontera para los campos en la discontinuidad que aseguren el buen “contacto”.

Al final del capítulo trataremos brevemente el problema mucho más complicado que se presenta cuando en lugar de hacer el estudio para dos medios transparentes permitimos que uno de ellos sea absorbente. En esa sección se darán principalmente resultados; el método general de solución ya habrá sido explicado con ocasión del estudio de los medios transparentes y sólo restará ponerlo en práctica en la nueva situación.

## 5.2. Dirección y frecuencia de las ondas

### 5.2.1. Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera se derivan de modo sencillo a partir de las ecMm; se pueden encontrar en [Born]. Las condiciones de frontera nos dicen qué relaciones hay entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  a ambos lados de la discontinuidad. A los valores del segundo medio los denotaremos con primas. Nos es suficiente con las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{tg} &= \mathbf{E}'_{tg} \\ \mathbf{H}_{tg} &= \mathbf{H}'_{tg}\end{aligned}$$

donde el subíndice  $tg$  significa “la componente tangencial del vector sobre la superficie”.

### 5.2.2. Descripción y nomenclatura

Los índices son reales (medios transparentes) y  $\mu \simeq \mu_0$  (no magnéticos). Una oap de vector de ondas  $\mathbf{k}$  y frecuencia  $\omega$  incide desde el primer medio sobre la interfase  $z = 0$ ,

<sup>1</sup>A pesar de que presentamos todos estos fenómenos en secuencia temporal, se debe saber que, puesto que estamos trabajando con ondas armónicas monocromáticas, infinitamente extendidas en el tiempo, todas las ondas han estado y estarán siempre ahí (incidente, reflejada y transmitida). No se puede identificar un momento en el que aparezca la onda incidente y se produzca su escisión en dos: la convivencia de las tres ondas es consustancial a la descripción matemática que hemos dado del problema.

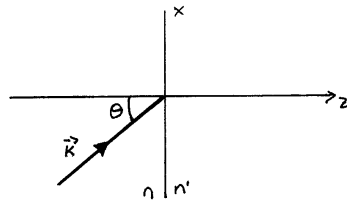


Figura 5.2: Diagrama del problema.

representada por el vector normal  $\mathbf{u}_n$  (dirigido hacia el primer medio).  $\mathbf{k}, \mathbf{u}_n$  definen (salvo cuando son paralelos) un plano, llamado *plano de incidencia* (lo identificaremos con el plano del papel). El otro eje lo llamamos  $x$ , de modo que el plano de incidencia es el  $xz$ . El ángulo que forman  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{u}_n$  se llamará *ángulo de incidencia*. Una vez hechas estas precisiones se puede escribir  $\mathbf{k}$  por componentes según los ejes  $x, y, z$ .

$$\mathbf{k} = n \frac{\omega}{c} (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Como se ve, la componente  $y$  de  $\mathbf{k}$  es nula.

### 5.2.3. Escritura de las ondas incidente, transmitida y reflejada

Vamos a utilizar el hecho de que la onda incidente es una oap, aplicando sobre ella las condiciones de frontera. Denotaremos la onda incidente por

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{A} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

donde  $\mathbf{A}$  es un vector complejo constante. Para las ondas transmitida y reflejada lo más general que sabemos escribir es una superposición de oap. En concreto, la onda reflejada es

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{R} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} + \dots$$

No sabemos nada de esta onda: ni los  $\mathbf{k}$  ni los  $\omega$  ni los  $\mathbf{R}$ , ni cuántos términos habrá. Afortunadamente las condiciones de frontera seleccionarán solamente una onda y precisarán los otros datos. Para la transmitida ocurrirá análogamente

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$$

Además hay que escribir los campos  $\mathbf{H}$ . La expresión general para calcular  $\mathbf{H}$  en cada uno de los tres casos es

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu \omega} \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}$$

Las ecMm imponen algunas condiciones sobre los parámetros de las ondas. Aparte de las relaciones de ortogonalidad  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{T} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{R} = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| &= n \frac{\omega}{c} \\ |\mathbf{k}'| &= n' \frac{\omega'}{c} \\ |\mathbf{k}''| &= n'' \frac{\omega''}{c} \end{aligned}$$

#### 5.2.4. Ley de Snell

##### Aplicación de las condiciones de frontera

En  $z = 0$  el campo a la izquierda es el incidente más el reflejado y el campo a la derecha es exclusivamente el transmitido

$$\begin{aligned} E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx} \\ E_{iy} + E_{ry} &= E_{ty} \\ H_{ix} + H_{rx} &= H_{tx} \\ H_{iy} + H_{ry} &= H_{ty} \end{aligned} \quad (5.1)$$

En la interfase  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  tenemos pues 4 ecuaciones de la forma<sup>2</sup>:

$$() e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + () e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} + \dots = () e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$$

Las cuatro ecuaciones responden a este esquema de dependencia en el espacio y el tiempo con valores en los paréntesis que son función de las amplitudes  $\mathbf{A}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$  y los vectores de onda  $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \dots, \mathbf{k}'', \dots$

Podemos extraer mucha información acerca de la solución sólo analizando la forma de las ecuaciones que hemos escrito.

Obsérvese que las exponenciales complejas son funciones linealmente independientes. O todo lo que está entre paréntesis es nulo o los argumentos de las exponenciales son todos idénticos. Como lo primero en general no es cierto, sólo queda la posibilidad de que todas las frecuencias sean idénticas (la misma conclusión puede alcanzarse por análisis de FOURIER).

$$\omega = \omega' = \dots = \omega'' = \dots$$

Lo mismo debe poder decirse de la dependencia espacial. Como no hay dependencia en  $z$  y la función en  $x$  e  $y$  debe ser la misma se puede escribir

$$k_x x + k_y y = k''_x x + k''_y y = \dots = k'_x x + k'_y y = \dots$$

<sup>2</sup>en adelante los puntos suspensivos representan los infinitos términos que no hemos escrito de la superposición de ondas planas que identificamos con la onda transmitida y la reflejada.

por un razonamiento análogo, como también  $x$  e  $y$  son funciones linealmente independientes podemos igualar tranquilamente la dependencia en  $x$  y la dependencia en  $y$

$$\begin{aligned} k_x &= k'_x = \dots = k''_x = \dots \\ k_y &= k'_y = \dots = k''_y = \dots = 0 \end{aligned}$$

en  $z$  no podemos decir nada porque no está. Esto se puede leer diciendo que la componente tangencial de  $\mathbf{k}$  es la misma para la onda incidente, para la onda transmitida y para la reflejada. En resumen:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega = \dots = \omega = \dots \\ \mathbf{k}_t &= \mathbf{k}'_t = \dots = \mathbf{k}''_t = \dots \end{aligned}$$

Observando la nulidad de la componente  $y$  de los vectores de onda podemos afirmar también que  $\mathbf{k}'$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{k}''$ ,  $\dots$  están en el plano de incidencia.

Como conocemos dos componentes del vector de ondas y también conocemos su módulo (por el cumplimiento de las ecMm), tenemos completamente determinado el vector de ondas de la onda transmitida. Y la solución es única. Fijada la onda incidente, sólo hay un  $\mathbf{k}'$  que verifique las condiciones que han de verificarse.

Si volvemos a las superposiciones de oap que hemos escrito para la onda transmitida y reflejada vemos que, teniendo misma fase, sólo hay una oap transmitida y una oap reflejada. Por lo tanto, podemos descartar todos los puntos suspensivos que hemos venido arrastrando hasta ahora y que representaban en principio una suma infinita de oap distintas.

### Ley de Snell

Tenemos resuelto el problema de la existencia de las ondas reflejadas y transmitidas y de su dirección. Pero ésta se suele expresar de otro modo; Supongamos que el ángulo entre  $\mathbf{k}''$  y  $\mathbf{u}_n$  es  $\theta''$ : sabemos que

$$\begin{aligned} k_x &= k''_x \\ n \frac{\omega}{c} \sin \theta &= n \frac{\omega}{c} \sin \theta'' \end{aligned}$$

es decir  $\theta = \theta''$ , el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Para la onda transmitida

$$\begin{aligned} k_x &= k'_x \\ n \frac{\omega}{c} \sin \theta &= n' \frac{\omega}{c} \sin \theta' \end{aligned}$$

de donde se obtiene la *ley de SNELL*

$$n \sin \theta = n' \sin \theta'$$

Todavía nos queda resolver las condiciones de frontera. Pero podemos hacer ya algunos comentarios:

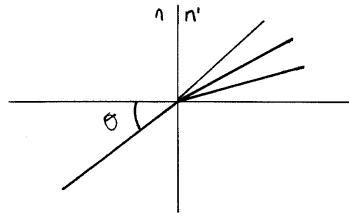


Figura 5.3: Dispersión de una onda con tres frecuencias  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

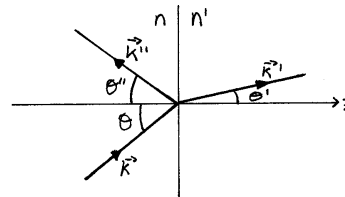


Figura 5.4: Los tres vectores de onda y sus ángulos respectivos con el vector normal  $\mathbf{u}_n$ .

- Desde el punto de vista microscópico lo que acabamos de encontrar es algo sorprendente: la luz generada por los átomos del medio es tan especial que *anula* la oap incidente y la sustituye por otra en distinta dirección.
- Una consecuencia de esto sobradamente conocida es que los índices de refracción se pueden medir simplemente cuantificando ángulos de refracción (mediante prismas, etc).
- Los índices de refracción en general dependen de la frecuencia. Tendremos tantas direcciones de propagación como frecuencias contenga el haz incidente. Esto puede servir a varios propósitos:
  - Hacer espectroscopía: averiguar qué frecuencias contiene una determinada onda.
  - Construir ondas monocromáticas a partir de ondas que no lo son. El medio separa espacialmente las frecuencias. El *monocromador* es un instrumento basado en esta idea: a partir de un haz no monocromático genera uno que contiene sólo un pequeño rango de frecuencias.

## 5.3. Amplitudes de las ondas

### 5.3.1. Deducción de las fórmulas de Fresnel

Si queremos obtener más información, deberemos explotar a fondo las cuatro ecuaciones de frontera que hemos escrito. Los vectores  $\mathbf{A}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$  son perpendiculares a los



---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 5.5:** Base (*paralela, perpendicular*)

correspondientes vectores de ondas. Nos interesa descomponer estos vectores en una base en la que tengan sólo dos componentes (ortogonales al vector de ondas), y luego relacionarlas con las componentes  $x$  e  $y$ . A esa base, representada en la figura 5.5 se la llama (*paralela, perpendicular*). La componente paralela  $A_{\parallel}$  está en el plano del papel y la perpendicular  $A_{\perp}$  es ortogonal al plano del papel; ambas son ortogonales al vector de ondas. Para relacionar las  $A_{\perp}, A_{\parallel}$  con las componentes  $x, y, z$  podemos valernos de relaciones trigonométricas sobre el diagrama. En  $z = 0$  las exponenciales son todas iguales, ya que por aplicación de las condiciones de frontera en la interfase, como hemos visto,

$$e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} = e^{i(k'_x x + k'_y y - \omega t)} = e^{i(k''_x x + k''_y y - \omega t)}$$

de modo que escribiremos simplemente  $e^{i()}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= (A_{\parallel} \cos \theta, A_{\perp}, -A_{\parallel} \sin \theta) e^{i()} \\ \mathbf{E}_r &= (-R_{\parallel} \cos \theta, R_{\perp}, -R_{\parallel} \sin \theta) e^{i()} \\ \mathbf{E}_t &= (T_{\parallel} \cos \theta', T_{\perp}, -T_{\parallel} \sin \theta') e^{i()}\end{aligned}$$

para escribir  $\mathbf{H}$  se necesitan los vectores  $\mathbf{k}$  involucrados

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= n \frac{\omega}{c} (\sin \theta, 0, \cos \theta) \\ \mathbf{k}' &= n' \frac{\omega}{c} (\sin \theta', 0, \cos \theta) \\ \mathbf{k}'' &= n \frac{\omega}{c} (\sin \theta, 0, -\cos \theta)\end{aligned}$$

haciendo los correspondientes productos vectoriales se encuentra

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i &= n \frac{1}{\mu c} (-\cos \theta A_{\perp}, A_{\parallel}, \sin \theta A_{\perp}) e^{i()} \\ \mathbf{H}_r &= n \frac{1}{\mu c} (\cos \theta R_{\perp}, R_{\parallel}, \sin \theta R_{\perp}) e^{i()} \\ \mathbf{H}_t &= n' \frac{1}{\mu c} (-\cos \theta' T_{\perp}, T_{\parallel}, \sin \theta' T_{\perp}) e^{i()}\end{aligned}$$

*Advertencia:* por ser los vectores de onda reales las relaciones trigonométricas  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{k}'' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{k}' = 0$  implican que tanto la parte real como la imaginaria de  $\mathbf{A}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$  son perpendiculares a  $\mathbf{k}$ .

Ya no hay más que llevar todo esto a las condiciones de frontera 5.1. Obtenemos un sistema de ecuaciones en las componentes  $\perp$  y  $\parallel$  de las amplitudes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned}(A_{\parallel} - R_{\parallel}) \cos \theta &= T_{\parallel} \cos \theta' \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp} \\ n(A_{\perp} + R_{\perp}) \cos \theta &= n' T_{\perp} \cos \theta' \\ n(A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= n' T_{\parallel}\end{aligned}$$

Son cuatro ecuaciones, dos para las componentes paralelas (la primera y la cuarta) y dos en las que sólo aparece la componente perpendicular (segunda y tercera). La evolución de ambas componentes es independiente.

### 5.3.2. Fórmulas de Fresnel

El coeficiente de reflexión perpendicular  $r_{\perp}$  es la magnitud que liga  $R_{\perp}$  con  $A_{\perp}$ . En concreto,

$$\begin{aligned}R_{\perp} &= \frac{n \cos \theta - n' \cos \theta'}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} A_{\perp} \\ &= \frac{\sin(\theta' - \theta)}{\sin(\theta' + \theta)} A_{\perp} \\ &= \frac{k_z - k'_z}{k_z + k'_z} A_{\perp} \\ &= r_{\perp} A_{\perp}\end{aligned}$$

la definición del *coeficiente de transmisión perpendicular*,  $t_{\perp}$ , es como sigue

$$\begin{aligned}T_{\perp} &= \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta + n' \cos \theta'} A_{\perp} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} A_{\perp} \\ &= \frac{2k_z}{k_z + k'_z} A_{\perp} \\ &= t_{\perp} A_{\perp}\end{aligned}$$

Para las magnitudes según la dirección paralela

$$\begin{aligned}R_{\parallel} &= \frac{n' \cos \theta - n \cos \theta'}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} A_{\parallel} \\ &= \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')} A_{\parallel} \\ &= \frac{n'^2 k_z - n^2 k'_z}{n'^2 k_z + n^2 k'_z} A_{\parallel} \\ &= r_{\parallel} A_{\parallel}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 T_{\parallel} &= \frac{2n \cos \theta}{n' \cos \theta + n \cos \theta'} A_{\parallel} \\
 &= \frac{2 \sin \theta' \cos \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} A_{\parallel} \\
 &= \frac{2nn'k_z}{n'^2k_z + n^2k'_z} A_{\parallel} \\
 &= t_{\parallel} A_{\parallel}
 \end{aligned}$$

No hay que memorizar estas relaciones (fórmulas de FRESNEL) pero sí qué operaciones llevan a ellas y las conclusiones que permiten establecer. Vamos a estudiar los diferentes casos que pueden presentarse.

### Incidencia normal

En incidencia normal  $\theta = 0$  y  $\theta' = 0$  y los coeficientes valen

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= \frac{n - n'}{n + n'} \\
 r_{\parallel} &= \frac{n' - n}{n + n'} \\
 t_{\perp} &= \frac{2n}{n + n'} \\
 t_{\parallel} &= \frac{2n}{n + n'}
 \end{aligned}$$

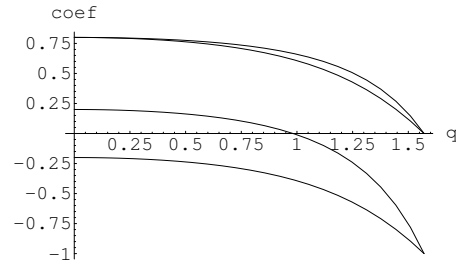
se puede observar que  $r_{\parallel} = -r_{\perp}$  y que  $t_{\parallel} = t_{\perp}$ . En la incidencia normal el plano de incidencia no está definido (el vector de ondas y el normal a la interfase coinciden en dirección) y las ecuaciones responden diciendo que no hay dirección privilegiada, lo que se refleja en los coeficientes de transmisión. El signo negativo de los coeficientes de reflexión depende de la forma de escoger el sistema de referencia (*paralelo*, *perpendicular*). Un dato: si  $n = 1$  y  $n' = 1.5$  en incidencia normal se tiene

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= -r_{\perp} = 0.2 \\
 t_{\parallel} &= t_{\perp} = 0.8
 \end{aligned}$$

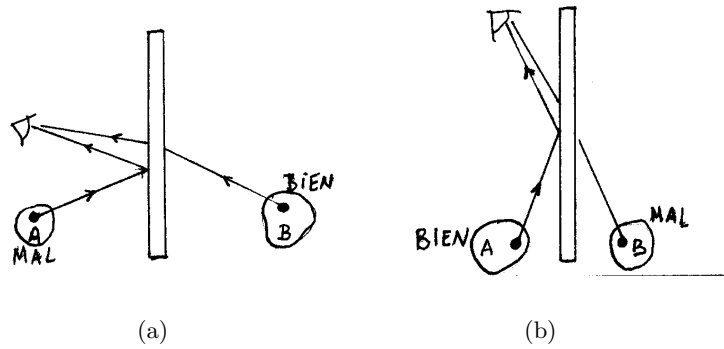
### Caso $n' > n$ de la incidencia oblicua, ángulo de Brewster

En este caso los coeficientes de reflexión y transmisión en función del ángulo de incidencia tienen el aspecto de la figura 5.6. El comportamiento complementario de los coeficientes de reflexión y transmisión es justificable en virtud de la conservación de la energía, y comprobable observando a través de un vidrio un objeto adyacente a nosotros y otro al otro lado, en los dos casos de la figura 5.7 (incidencia normal y rasante). Dicho de otro modo, un vidrio normal se puede utilizar como un espejo perfecto en incidencias próximas a la rasante (aunque es impráctico).

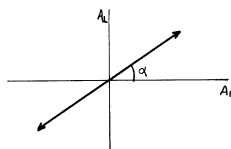
5 Refracción y reflexión en medios homogéneos e isotrópicos



**Figura 5.6:** De arriba a abajo,  $t_{\parallel}, t_{\perp}, r_{\parallel}, r_{\perp}$  (coef) en función de  $\theta$  ( $q$ ).  $\theta = \frac{\pi}{2}$  es la *incidencia rasante* (transmisión nula),  $\theta = 0$  es la *incidencia normal*. Para el gráfico se ha tomado  $\frac{n'}{n} = \frac{3}{2}$ .



**Figura 5.7:** La intensidad con que un observador percibe las imágenes de  $A$  y  $B$  depende del ángulo de observación.



**Figura 5.8:**  $A_{\perp}$  en función de  $A_{\parallel}$ . El ángulo  $\alpha$  se llama *acimut*.

Hay un coeficiente cuyo valor pasa por cero para cierto ángulo, que denominaremos *ángulo de BREWSTER* y denotaremos  $\theta_B$ . Es el ángulo para el que  $r_{\parallel}(\theta_B) = 0$ . Si retornamos a la expresión de  $r_{\parallel}$  obtenemos la siguiente condición para  $\theta_B$

$$n' \cos \theta_B = n \cos \theta'_B$$

que debe verificarse junto con la ley de SNELL. Si imponemos el cumplimiento de ambas obtenemos

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n}$$

Si  $r_{\parallel} = 0$  entonces  $R_{\parallel} = 0$ , de modo que en ángulo de BREWSTER la luz reflejada siempre tiene polarización rectilínea y completamente perpendicular al plano de incidencia, independientemente del estado de polarización de la luz incidente. Tenemos, por lo tanto, un método para construir luz rectilíneamente polarizada incluso a partir de luz natural. Por otra parte, la determinación del ángulo de BREWSTER equivale a la determinación de un índice de refracción conocido el otro.

En general, cuando  $n' > n$  los coeficientes de reflexión o transmisión son números reales, de modo que el desfase sólo puede ser de  $0$  o  $\pi$ . Como consecuencia, si la luz incide con polarización rectilínea, se transmite o se refleja con polarización rectilínea. Pero el acimut de la luz transmitida o reflejada será, en general, distinto del de la luz incidente, en virtud de las relaciones entre coeficientes perpendicular y paralelo. El cambio de acimut depende de los índices de refracción involucrados, por lo que se puede utilizar para diseñar dispositivos para la medida del índice de refracción.

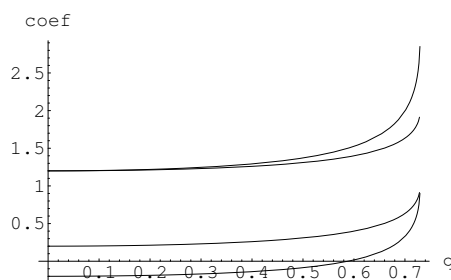
### Caso $n' < n$ de incidencia oblicua, reflexión total

En este caso los coeficientes de reflexión se hacen 1 antes de la incidencia rasante (para  $\theta = \theta_C$ ).  $\theta_C$  se llama ángulo crítico y se cumple  $n \sin \theta_C = n'$

El problema es que para  $\theta > \theta_C$  no podemos conocer  $\theta'$  y por lo tanto no podemos calcular los coeficientes de reflexión y transmisión con ayuda de las fórmulas de FRESNEL. Ya que se llama *reflexión total* al fenómeno, ¿se cumple  $\mathbf{T} = 0$ ? Las ecM y sus condiciones de frontera dicen que no, puesto que debería ser además de  $\mathbf{T} = 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{A} = 0$  y eso significa que no hay ondas por ningún lado.

Debemos retornar al planteamiento matemático del problema. Interpretemos la reflexión total desde el punto de vista de los vectores de onda; para  $\theta > \theta_C$

$$k'_x = k_x = \frac{\omega}{c} n \sin \theta > n' \frac{\omega}{c}$$



**Figura 5.9:** De arriba a abajo,  $t_{\parallel}, t_{\perp}, r_{\perp}, r_{\parallel}$ .

es decir, que *una componente del vector de ondas tiene que ser mayor que su módulo*. Esto sólo lo podemos abordar incrementando el módulo, es decir, adoptando un vector de ondas complejo.

$$\mathbf{k}'_c = \mathbf{k}' + i\mathbf{a}'$$

$$\mathbf{k}'^2 - \mathbf{a}'^2 = n'^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

Las ondas transmitidas y reflejadas no son superposición de ondas armónicas con vector de ondas real, sino complejo. Y las condiciones de frontera nos darán los valores de parte real y la imaginaria. Las ondas serán armónicas “planas”, con el sentido de “planas” que ya ha sido explicado y que aparece cuando el vector de ondas es complejo (ondas planas inhomogéneas). Matemáticamente para la onda transmitida y reflejada respectivamente:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{i(\mathbf{k}'_c \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{R} e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} + \dots$$

Hay que reconstruir toda la solución del problema, para lo que vamos a dar los principales pasos. Se llevan estas dos expresiones a las condiciones de frontera donde el  $\mathbf{k}'_c$  por ejemplo se determina a partir de la igualdad de las exponenciales sobre la superficie de discontinuidad (como antes). En  $z = 0$  se tiene

$$\mathbf{k}'_c \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

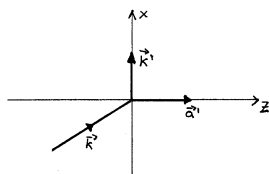
con lo que  $k_x = k'_{cx}$  y  $k_y = k'_{cy}$  (componentes tangenciales continuas). El plano de incidencia es  $xz$ . Por la elección de ejes  $k_{cy} = 0$  (el vector de ondas está en el plano  $xz$ ).

$$k'_y + ia'_y = 0$$

que vale por dos ecuaciones

$$k'_y = 0$$

$$a'_y = 0$$



**Figura 5.10:** Plano  $xz$  y vectores  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  y  $\mathbf{a}'$  en reflexión total.

de modo que se puede decir que  $k'$ ,  $a'$  están en el plano de incidencia. En lo que toca a  $k_{cx}$

$$k'_x + ia'_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta$$

de donde

$$\begin{aligned} a'_x &= 0 \\ k'_x &= n \frac{\omega}{c} \sin \theta \end{aligned}$$

Ya no podemos obtener más información de las condiciones de frontera. Además de esto sabemos que, por las ecMm, se ha de verificar

$$\mathbf{k}'^2 = n_c'^2 \frac{\omega^2}{c^2} = n'^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'^2 - \mathbf{a}'^2 &= n'^2 \frac{\omega^2}{c^2} \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}' &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{a}' = 0$  es solución, pero no nos sirve para la reflexión total. Pero  $\mathbf{a}'$  sólo puede tener componente  $z$  y  $\mathbf{k}'$  sólo puede tener componente  $x$  (se deriva de las condiciones)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= a'_z \mathbf{u}_z \\ \mathbf{k}' &= k'_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta \mathbf{u}_x \end{aligned}$$

de donde  $a'_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}$ . La expresión para la onda transmitida queda

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{-a'_z z} e^{i(kx - \omega t)}$$

Conclusiones de los resultados obtenidos para el caso de reflexión total:

- Hay onda transmitida ya que  $\mathbf{E}_t \neq 0$  del otro lado de la discontinuidad de índice: es una onda plana inhomogénea que *vive pegada* a la discontinuidad (*onda evanescente*), porque se atenúa exponencialmente con la distancia y no sobrevive más allá de unas pocas longitudes de onda. Si calculáramos la media del vector de

POYNTING obtendríamos que la fase y la energía se propagan *por* la superficie de discontinuidad.

$$\langle \mathbf{S}' \rangle_z = 0$$

(no hay ningún flujo de energía ortogonal a la interfase).

- Tenemos la dependencia espaciotemporal de la onda ¿qué hay de la amplitud  $\mathbf{T}$ ? Ahora tenemos una “ortogonalidad”: se verifica  $\mathbf{k}'_c \cdot \mathbf{T} = 0$ , pero no podemos aprovechar esto para decir que  $\mathbf{T} \perp \mathbf{k}'$ , ya que  $\mathbf{T}$  será en general un vector complejo. En general habría que aprovechar la condición expuesta en la forma  $(\mathbf{k}' + i\mathbf{a}') \cdot \mathbf{T} = 0$ , pero no lo vamos a hacer. Escribiremos directamente la solución (fórmulas de FRESNEL).

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{k_z - k'_{cz}}{k_z + k'_{cz}} \\ t_{\perp} &= \frac{2k_z}{k_z + k'_{cz}} \\ r_{\parallel} &= \frac{k_z n'^2 - k'_{cz} n^2}{k_z n'^2 + k'_{cz} n^2} \end{aligned}$$

su estructura es similar en los casos  $r_{\perp}, t_{\perp}, r_{\parallel}$ , pero poniendo el subíndice  $c$  a las componentes de la onda transmitida. Sin embargo  $t_{\parallel}$  se escribe en función de los campos magnéticos (a diferencia de los otros 3) y su escritura sí varía:

$$t_{\parallel} = \frac{H_{\perp t}}{H_{\perp i}} = \frac{2n'^2 k_z}{n'^2 k_z + n^2 k'_{cz}}$$

los detalles de este cálculo se encuentran en [Cabrera]. Utilizaremos principalmente las relaciones para los coeficientes de reflexión.

- Los coeficientes de reflexión son complejos, ya que  $k'_{cz}$  es complejo:

$$k_z = n \frac{\omega}{c} \cos \theta$$

y

$$k'_{cz} = i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}$$

Las cosas quedan

$$r_{\perp} = \frac{n \cos \theta - i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}{n \cos \theta + i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - n'^2}}$$

como el numerador y el denominador son complejos conjugados se cumple la importante relación

$$|r_{\perp}| = |r_{\parallel}| = 1$$



lo que permite escribirlos como<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= e^{i\delta_{\parallel}} \\ r_{\perp} &= e^{i\delta_{\perp}} \end{aligned}$$

con  $\delta_{\parallel}$  y  $\delta_{\perp}$  por determinar

$$r_{\perp} = \frac{e^{i\frac{\delta_{\perp}}{2}}}{e^{-i\frac{\delta_{\perp}}{2}}} = \frac{\cos \frac{\delta_{\perp}}{2} + i \sin \frac{\delta_{\perp}}{2}}{\cos \frac{\delta_{\perp}}{2} - i \sin \frac{\delta_{\perp}}{2}}$$

lo que nos permite obtener la tangente

$$\tan \frac{\delta_{\perp}}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}}{\cos \theta}$$

pero lo que verdaderamente nos será útil es

$$\tan \left( \frac{\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}}{2} \right) = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n'}{n}\right)^2}}{\sin^2 \theta}$$

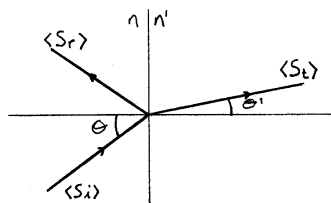
- Lo importante: números complejos de módulo unidad y cambio del estado de polarización: la luz con polarización rectilínea se convertirá en general en elípticamente polarizada, dependiendo de la diferencia de fases de la fórmula anterior (por eso la hemos deducido).
- Ya tenemos modos de obtener las polarizaciones que queramos: la incidencia en ángulo de BREWSTER nos da polarización rectilínea, la reflexión y transmisión normales nos dan cambios de acimut dentro de la polarización rectilínea y la reflexión total nos da polarización elíptica. Sin embargo, encontraremos métodos más cómodos para obtener el estado de polarización que se desee en el desarrollo posterior de la asignatura.

## 5.4. Relaciones energéticas: reflectancia y transmitancia

Esperamos obtener la conservación de la energía. Vamos a estudiar casos de no reflexión total: se cumple o bien  $n < n'$  o bien  $n > n'$  con  $\theta < \theta_C$ . Si estamos interesados en un balance de energías<sup>4</sup> debemos calcular promedios temporales del vector de POYNTING (potencia por unidad de área) y compararlos. Trabajamos con oap  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  y

<sup>3</sup>atención en la bibliografía al convenio de signos en la exponencial compleja: las fórmulas posteriores dependen de ese convenio.

<sup>4</sup>Como consideraremos un estado estacionario, la conservación de la energía debe entenderse como igualdad del flujo que entra en una zona con el que sale de ella, no como igualdad de la energía “antes” y “después”, sino como balance espacial: caracterización de la distribución de la energía en el espacio -rojo.



**Figura 5.11:** Paso de un medio caracterizado por  $n$  a uno caracterizado por  $n'$

para ellas hemos calculado ya una expresión de  $\langle \mathbf{S} \rangle$  (en medios homogéneos e isotropos de índice  $n$ ):

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}_k$$

Un detalle a tener en cuenta es que la variable relevante es sólo la *componente normal* a la interfase del vector de POYNTING. La energía que va a ser repartida entre onda transmitida y reflejada es la que incide sobre la superficie, y ésta es la que corresponde a la componente normal a la superficie. Lo que nos interesa es la *irradiancia* sobre la interfase, la potencia que incide sobre ella. Si  $\mathbf{N}$  es un vector unitario normal a la interfase:

$$\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{N} = \langle \mathbf{S} \rangle_z$$

no queda más que calcular. Para las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente:

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{S}_i \rangle_z| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \cos \theta |\mathbf{A}|^2 \\ |\langle \mathbf{S}_r \rangle_z| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n \cos \theta |\mathbf{R}|^2 \\ |\langle \mathbf{S}_t \rangle_z| &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n' \cos \theta' |\mathbf{T}|^2 \end{aligned}$$

### Reflectancia

$$\mathcal{R} = \frac{|\mathbf{R}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|\langle \mathbf{S}_r \rangle_z|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z|}$$

### Transmitancia

$$\mathcal{T} = \frac{n' \cos \theta' |\mathbf{T}|^2}{n \cos \theta |\mathbf{A}|^2} = \frac{|\langle \mathbf{S}_t \rangle_z|}{|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z|}$$

Tal como están definidas estas magnitudes dependen no sólo de  $n, n', \theta, \theta'$ , sino también del estado de polarización. Para encontrar magnitudes que sean independientes de él se definen reflectancias y transmitancias paralelas y perpendiculares de modo independiente. Por ejemplo, para la reflectancia, definimos el ángulo  $\alpha_i$  mediante las siguientes

dos ecuaciones ( $\alpha_i$  es un acimut, e indica la relación entre la cantidad de luz paralela y perpendicular que lleva un estado de polarización):

$$\begin{aligned} |A_{\parallel}| &= |\mathbf{A}| \cos \alpha_i \\ |A_{\perp}| &= |\mathbf{A}| \sin \alpha_i \end{aligned}$$

eso nos permite reescribir la reflectancia como

$$\mathcal{R} = \frac{|\mathbf{R}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{\frac{|A_{\parallel}|^2}{\cos^2 \alpha_i}} + \frac{|R_{\perp}|^2}{\frac{|A_{\perp}|^2}{\sin^2 \alpha_i}} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} \cos^2 \alpha_i + \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} \sin^2 \alpha_i$$

pero como la componente paralela reflejada es proporcional a la componente paralela incidente y lo mismo para la perpendicular, cada uno de los términos sólo depende de la discontinuidad de índices. De modo que se definen

**reflectancia paralela**

$$\mathcal{R}_{\parallel} = \frac{|R_{\parallel}|^2}{|A_{\parallel}|^2} = |r_{\parallel}|^2$$

**reflectancia perpendicular**

$$\mathcal{R}_{\perp} = \frac{|R_{\perp}|^2}{|A_{\perp}|^2} = |r_{\perp}|^2$$

**transmitancia paralela**

$$\mathcal{T}_{\parallel} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} |t_{\parallel}|^2$$

**transmitancia perpendicular**

$$\mathcal{T}_{\perp} = \frac{n' \cos \theta'}{n \cos \theta} |t_{\perp}|^2$$

La generalización a reflexión total depende de que el vector de POYNTING no tiene componente normal, luego no hay energía que abandone la superficie:

$$\langle \mathbf{S}_t \rangle_z = 0 \Rightarrow \mathcal{T} = 0$$

y  $\mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp} = 1$ . Toda la luz que incide se refleja<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>La aparente paradoja se resuelve si consideramos por una parte que se trata de una relación entre flujos de energía, y el flujo entrante (transportado por la onda incidente) iguala el flujo reflejado (transportado por la onda reflejada) y por otra, que se trata de un promedio temporal, luego funcionaría aproximadamente para ondas no armónicas, que son aquellas para las que existe verdaderamente un “proceso” de reflexión transmisión en el sentido de que llega una onda a la interfase y se divide en dos y todo acaba poco tiempo más tarde -rojo.

Ahora esperamos obtener alguna ligadura entre reflectancias y transmitancias que dé cuenta de la conservación de la energía: por cálculo directo se puede demostrar que se verifican estas dos leyes de conservación

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\parallel} + \mathcal{T}_{\parallel} &= 1 \\ \mathcal{R}_{\perp} + \mathcal{T}_{\perp} &= 1\end{aligned}$$

que se combinan para dar  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ , dicho de otro modo

$$|\langle \mathbf{S}_i \rangle_z| = |\langle \mathbf{S}_t \rangle_z| + |\langle \mathbf{S}_r \rangle_z|$$

## 5.5. Dirección, frecuencia, amplitudes y energía cuando un medio es absorbente

Hasta aquí todo lo que hemos hecho en este capítulo parte de la consideración de que los dos medios en que se propaga la onda son completamente transparentes,  $\kappa = 0$ .

En esta sección vamos a echar un vistazo a lo que ocurre cuando uno de los medios deja de ser transparente. Veremos que el problema se complica, y, aún así, es de capital importancia, pues sabemos que el proceso de radiación-absorción en los átomos implica pérdidas de energía. Intentaremos, como en las secciones precedentes del capítulo, caracterizar las ondas producidas al atravesarse la interfase, para lo cual es necesario conocer su dirección, frecuencia y amplitud.

El primer medio queda caracterizado por un índice  $n$  real y el segundo por uno complejo,  $n'_c$ . ¿Cómo se haría?. De modo parecido al caso anterior, pero esta vez no podemos buscar soluciones al problema en el segundo medio como ondas planas con vector de ondas real. Por ejemplo

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T} e^{i(\mathbf{k}'_c \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Esto lo llevamos a las condiciones de frontera, de donde por independencia lineal de las exponenciales se tiene que sobre la superficie de discontinuidad ( $z = 0$ ) se ha de verificar la igualdad

$$\mathbf{k}'_c \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

es decir

$$\begin{aligned}k'_{cx} &= k'_x + ia'_x = k_x \\ k'_{cy} &= k'_y + ia'_y = k_y = 0\end{aligned}$$

(sobre el plano de incidencia  $k_y = 0$ ). Usamos estas dos ecuaciones para precisar valores y obtenemos

$$k'_y = a'_y = 0$$

$k', a'$  están en el plano de incidencia.

$$k'_x = k_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia.  $a'_x = 0$ , y por tanto  $\mathbf{a}' = a'_z \mathbf{u}_z$ . En cuanto a  $\mathbf{k}'$ , tenemos

$$\mathbf{k}' = k_z \mathbf{u}_z + n \frac{\omega}{c} \sin \theta \mathbf{u}_x$$

Las ecMm aportan las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'^2 - \mathbf{a}'^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (n'^2 - \kappa'^2) \\ \mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}' &= \frac{\omega^2}{c^2} n' \kappa' \end{aligned}$$

que determinan los factores  $k'_z$  y  $a'_z$  (ver [Cabrera]). Lo que es importante es que el vector de ondas de la onda refractada queda especificado por completo y de manera única. Para resolver completamente el problema necesitaríamos calcular las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Es un cálculo trabajoso del que sólo comentaremos alguna consecuencia:

- Las expresiones para los coeficientes de reflexión siguen valiendo, si donde haya  $k'_z$  ponemos  $k'_{cz}$  y donde haya  $n'$  ponemos  $n'_c$ . El resultado es

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{n_c'^2 k_z - n^2 k'_{cz}}{n_c'^2 k_z + n^2 k'_{cz}} \\ r_{\perp} &= \frac{k_z - k'_{cz}}{k_z + k'_{cz}} \end{aligned}$$

estos coeficientes de reflexión son complejos (por culpa del vector de ondas y del índice de refracción). Esto ocurre para cualquier ángulo de incidencia. Lo interesante es que podemos cambiar estados de polarización añadiendo desfases por reflexiones con medios absorbentes. De hecho hay una técnica de medida de índices de refracción que se basa en el estudio de los cambios de polarización en las reflexiones de ondas sobre medios de índice desconocido.

- Para las reflectancias (pero no para las transmitancias) también valen las relaciones que ya hemos encontrado para los medios transparentes:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\parallel} &= |r_{\parallel}|^2 \\ \mathcal{R}_{\perp} &= |r_{\perp}|^2 \end{aligned}$$

### Caso particular: incidencia normal ( $\theta = 0$ )

Para la onda incidente  $\mathbf{k} = k_z \mathbf{u}_z = n \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$ . Con esta elección de ejes el plano de la discontinuidad es el  $xy$ . Las componentes  $x$  e  $y$  se conservan

$$\begin{aligned} k_x &= k'_{cx} = 0 \\ k_y &= k'_{cy} = 0 \end{aligned}$$

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 5.12:** Incidencia normal de un medio de índice  $n \in \mathbb{R}$  a otro de  $n'_c = n' + i\kappa'$ .

|    | $n'$ | $\kappa'$ |
|----|------|-----------|
| Al | 1.44 | 523       |
| Hg | 1.60 | 4.80      |

**Cuadro 5.1:** Un ejemplo con dos conductores (metales) para el doblete amarillo del Na:  $\lambda = 589.3nm$

lo que implica  $k'_x = k'_y = a'_x = a'_y = 0$ . El vector de ondas de la onda transmitida sólo puede tener componente  $z$ :  $\mathbf{k}'_c = (k'_z + ia'_z) \mathbf{u}_z$ . Para obtener las partes  $k'_z$  y  $a'_z$  nos valemos de las ecMm, de las cuales se obtiene

$$\mathbf{k}'_c{}^2 = n_c'^2 \frac{\omega^2}{c^2}$$

de donde separando en parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} k'_z &= n' \frac{\omega}{c} \\ a'_z &= \kappa' \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_{\parallel} = -r_{\perp} &= \frac{n' + i\kappa' - n}{n' + i\kappa' + n} \\ \mathcal{R}_{\parallel} = \mathcal{R}_{\perp} &= \frac{(n' - n)^2 \kappa'^2}{(n' + n)^2 + \kappa'^2} \end{aligned}$$

Si  $n = 1$  la reflectancia aire-aluminio es 0.83 (83% de energía reflejada) y la aire-mercurio 0.78.

- Hay que observar que incluso en incidencia normal los coeficientes de reflexión son complejos.
- Los coeficientes de reflexión son muy altos. A modo de ejemplo valga un vidrio de  $n = 1.5$ , que tiene coeficiente de reflexión de  $\sim 0.2$ , es decir, una reflectancia de en torno al 4%.
- Las reflectancias crecen con  $\kappa'$ . Es decir, los medios más absorbentes son también más reflectantes.

# 6 Aproximación de onda localmente plana: óptica geométrica

## 6.1. Planteamiento

El objetivo de este breve capítulo consiste en tender puentes entre la óptica electromagnética (OE) y la óptica geométrica (OG). La OE debe contener la OG como forma aproximada de resolver algunos problemas relativos a la propagación de la luz. Durante este capítulo nos limitaremos a medios isótropos y transparentes para dar un tratamiento sencillo. Por lo tanto,  $n \in \mathbb{R}$ . De otro lado, los medios serán en general inhomogéneos:  $n = n(\mathbf{r})$ . Consideraremos solamente la propagación de ondas armónicas, cuya expresión general es

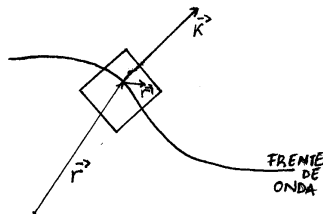
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{i(g(\mathbf{r}) - \omega t)}$$

en consecuencia podremos hablar de fase y frente de onda. Si en cada punto del espacio consideramos un pequeño volumen  $V$ , como muestra la figura, las condiciones de aplicabilidad de la OG se pueden resumir en lo siguiente:

- $n(\mathbf{r})$  aproximadamente homogéneo en  $V$ .
- $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  aproximadamente homogéneo en  $V$ .
- $\nabla g(\mathbf{r})$  (el gradiente de la fase) aproximadamente homogéneo en  $V$ .

Al pequeño volumen  $V$  le exigimos no obstante que respete  $V \gg \lambda^3$ , por lo que las condiciones se pueden expresar de otro modo diciendo que la longitud de onda debe ser pequeña frente a las distancias en las que  $n(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  y  $\nabla g(\mathbf{r})$  varían apreciablemente.

La OG funcionará tanto mejor cuanto menor sea la longitud de onda. Pero eso no impide que el modelo de la OG cubra una gran parte del espectro. Por ejemplo, la



**Figura 6.1:** El vector  $\mathbf{r}$  corresponde a un punto del volumen y el  $\mathbf{r}'$  parametriza todos los otros puntos del volumen de modo relativo a  $\mathbf{r}$ . Se cumple que  $\mathbf{r} + \mathbf{r}' \in V$ .

longitud de onda del visible, desde el pto de vista macroscópico es todavía muy pequeña. Las condiciones que acabamos de exigir se dan pues en un número elevado de situaciones prácticas. Si se cumplen las condiciones la OE conduce a la descripción geométrica de modo natural.

## 6.2. De las ondas a las trayectorias

### 6.2.1. Objetivo

La descripción geométrica está caracterizada por dos nociones fundamentales a las que vamos a tratar de llegar de modo deductivo partiendo de la descripción electromagnética:

- la idea de rayo. Nuestro primer objetivo será demostrar que podemos hablar de trayectorias para la luz. Relacionar ondas y rayos constituye un logro nada trivial.
- el índice de refracción determina completamente las trayectorias posibles. Nuestro segundo objetivo será comprobar que las trayectorias de la luz verifican el principio de FERMAT. Dicho de otro modo, convertiremos en teorema el principio de FERMAT. Lo que llamamos trayectorias son extremales de camino óptico. El teorema de FERMAT dice que allí donde el índice es continuo los rayos verifican la ecuación de las trayectorias y allí donde hay discontinuidades verifican la ley de SNELL, de modo que tenemos que probar estos dos hechos para dar por demostrado el teorema de FERMAT.

En síntesis, se trata de reducir una axiomática elegante, expresada en forma de principio variacional (principio de FERMAT), a un caso específico de una teoría de axiomática más complicada pero también más potente (las ecuaciones de MAXWELL).

### 6.2.2. Noción de trayectoria

Veamos cómo se comportan en el volumen  $V$  los parámetros  $\mathbf{A}$  y  $\nabla g$  si se cumplen las condiciones de validez de la OG:

- Empecemos con la amplitud  $\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$  por su homogeneidad,  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}(\mathbf{r})$  (no depende de  $\mathbf{r}'$ ).
- Para  $g(\mathbf{r} + \mathbf{r}')$  podemos hacer un desarrollo en serie de potencias de  $\mathbf{r}'$ , pues conocemos un dato de su gradiente: es homogéneo en  $V$

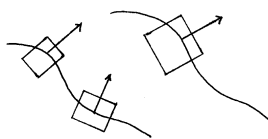
$$g(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = g(\mathbf{r}) + \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}' + \dots$$

La aproximación consiste en no considerar los términos que van en las derivadas del gradiente, pues éste es aproximadamente constante.

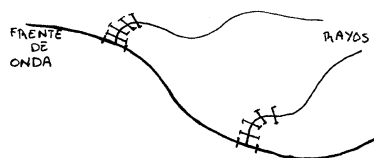
Por tanto en  $V$  se cumple

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) \simeq \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{ig(\mathbf{r})} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t)}$$





**Figura 6.2:** La aproximación depende del punto, pero en cada punto la onda es aproximable por una oap.



**Figura 6.3:** Rayos y frente de onda.

donde definimos el vector  $\mathbf{k} = \nabla g(\mathbf{r})$ . La expresión obtenida dice que dentro de  $V$  la onda es armónica y plana. La amplitud  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{ig(\mathbf{r})}$  de esta oap es constante en  $V$ , porque no depende de  $\mathbf{r}'$ . También se puede decir que  $\mathbf{k}$  es una función vectorial homogénea en  $V$ .

Las condiciones que estamos imponiendo equivalen a decir que la onda es aproximable por una onda plana, pero también que dentro del volumen el índice de refracción es aproximadamente homogéneo:  $n(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \simeq n(\mathbf{r})$ . El medio es localmente homogéneo y globalmente inhomogéneo.

Sabemos de las oap en medios homogéneos que tanto la fase como la energía se propagan según el vector de ondas. No habrá ambigüedad cuando digamos que la onda se propaga en la dirección del vector de ondas, puesto que todas sus propiedades así lo hacen. Con esto ya podemos decir qué es un rayo. Tomamos una sección transversal infinitesimal de frente de ondas y aproximamos la onda allí por una onda plana. Pero el vector de ondas va cambiando suavemente con el punto, manteniéndose siempre el carácter de onda plana.

**Rayo** lugar geométrico de la progresión de una sección transversal infinitesimal del frente de ondas.

La onda se convierte según esta definición en un haz de rayos. Al alcanzar la noción de rayo hemos cubierto el primer objetivo que nos habíamos fijado.

### Observaciones

1. Por construcción, los rayos son perpendiculares a los frentes de onda.

2. Por construcción las trayectorias tienen la propiedad de que en cada punto el vector de ondas  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  es tangente a ellas.

### 6.2.3. Ecuación de las trayectorias

Definimos una nueva cantidad,  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$ , a través de la relación

$$g(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \mathcal{L}(\mathbf{r})$$

con esta expresión para la fase el vector de ondas queda

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla g(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \nabla \mathcal{L}(\mathbf{r})$$

las ecMm aplicadas a una onda aproximadamente plana en un medio aproximadamente homogéneo dictan que

$$|\mathbf{k}(\mathbf{r})| = n(\mathbf{r}) \frac{\omega}{c}$$

de suerte que obtenemos la *ecuación eikonal*

$$|\nabla \mathcal{L}(\mathbf{r})| = n(\mathbf{r})$$

en muchos textos la aproximación que hemos explicado se encuentra bajo el nombre de *aproximación eikonal*. Estamos listos para demostrar la ecuación de las trayectorias, que es la ecuación diferencial siguiente sobre el parámetro de arco  $s$

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n$$

Para hacerlo hay que observar que  $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$  es tangente y unitario y por lo tanto debe ser proporcional a  $\mathbf{k}$ . Es decir

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\frac{\omega}{c} \nabla \mathcal{L}}{\frac{\omega}{c} n} = \frac{1}{n} \nabla \mathcal{L}$$

o bien

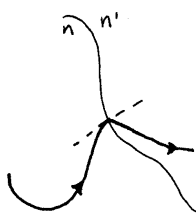
$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla \mathcal{L}$$

Derivamos respecto al parámetro de arco ambos miembros y

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla \mathcal{L}$$

intercambiando el orden de las derivadas

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla \left( \frac{d\mathcal{L}}{ds} \right)$$



**Figura 6.4:** Rayo que encuentra una curva que marca una discontinuidad de índice.

donde se puede aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{ds} &= \nabla\mathcal{L} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \frac{1}{n} (\nabla\mathcal{L})^2 \\ \frac{d\mathcal{L}}{ds} &= n \end{aligned} \quad (6.1)$$

queda demostrada la ecuación de las trayectorias según las hemos definido más arriba.

#### 6.2.4. Interpretación

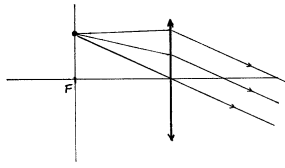
Vamos a integrar la última ecuación (6.1)

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_2) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n ds$$

En el lado izquierdo tenemos una función proporcional a la diferencia de fases de la onda. En el lado derecho tenemos lo que en el contexto de la OG se llama *camino óptico*. Lo que dice la ecuación es que en este nivel de aproximación diferencia de fase equivale a camino óptico. De modo que para calcular cambios de fase no hay más que calcular el camino óptico recorrido por el rayo. Otra forma de verlo es recordar que el camino óptico sirve para definir los frentes de onda en OG (como superficies de igual camino óptico). Ahora podemos tranquilamente, dentro de la aproximación que hemos tomado, identificar los frentes de onda electromagnéticos con los frentes de onda geométricos.

#### 6.2.5. Trayectorias en una discontinuidad de índice

Para acabar de demostrar el principio de FERMAT nos falta por comprobar qué ocurre en una discontinuidad de índice. El problema es que la discontinuidad de índice supone una variación de índice brusca en distancias del orden atómico  $\ll \lambda$ , lo que invalida las aproximaciones necesarias para la OG. La solución es hacer aproximaciones de onda localmente plana a ambos lados de la discontinuidad y “soldarlas”. Si la superficie de separación cumple las condiciones de diferenciabilidad que aseguran que es localmente aproximable por una recta, podemos echar mano del resultado del capítulo anterior. Se



**Figura 6.5:** Creación de una oap (haz de rayos paralelos) mediante una lente delgada infinita y una fuente puntual monocromática. El camino óptico es reversible (reparametrización).

formarán dos oap, una reflejada y otra transmitida. La ley de SNELL que allí encontramos es la misma que se verificaba en la OG. Lo que en OG era vector tangente a la trayectoria es aquí vector de onda.

### 6.3. Conclusiones: ondas y rayos

Los dos hechos demostrados equivalen completamente al principio de FERMAT, que queda demostrado a partir de la OE, es decir, a partir de las ecuaciones de MAXWELL.

#### Relación entre ondas y rayos

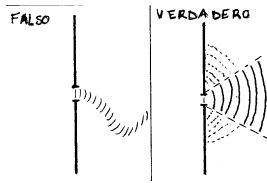
Siempre que se den las condiciones de aplicabilidad de la OG podemos pensar en la onda como una colección de rayos, lo que puede ser de utilidad práctica.

Para una oap en medio homogéneo tenemos un haz de rayos paralelos. Esto es *exacto*, porque en un medio homogéneo el índice no varía, la amplitud de una oap es siempre constante, y el vector de ondas es constante. De modo que en este contexto “haz de rayos paralelos” y “oap” son completamente equivalentes. Esta consideración permite imaginar un procedimiento de generación de ondas planas como el de la figura. Podemos interpretarlo diciendo que las lentes delgadas establecen una correspondencia entre ondas planas y puntos. Por ejemplo, una lente delgada convergente permite contar el número de ondas planas en un haz de luz (= número de puntos en la pantalla).

#### ¿Existen los rayos?

Lo que hemos hecho nos permite considerar una onda como una colección de rayos. Pero hasta ahora no hemos dicho nada de la existencia *un* rayo. ¿Se pueden observar rayos en la práctica?. Podemos suponer que cuanto más pequeña sea la abertura (figura 6.6) más se parecerá la luz emergente a un verdadero rayo. Pues no. Cuanto más se cierra el orificio, *menos* se parece la luz emergente a un rayo: es el fenómeno de la *difracción*. El ángulo del cono de luz que se crea es  $\theta \propto \frac{\lambda}{R}$  donde  $R$  es el radio de la abertura. De modo que no se pueden conseguir rayos con precisión arbitraria<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>esto es, rayos matemáticos, o una buena aproximación de éstos. Si queremos un chorro de luz no divergente tenemos que transigir con el diámetro del orificio, pero entonces la sección transversal ya no es infinitesimal. . .



**Figura 6.6:** Pesquemos una sección transversal infinitesimal, es decir, un rayo.

La difracción ocurre porque debemos mutilar la onda: introducimos variaciones bruscas en los parámetros que caracterizan la onda, ya que si se observara un rayo matemático la amplitud detrás del agujero pasaría de un valor finito a cero, de modo que nos alejamos del ámbito de aplicación de la OG ( $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  homogéneo en  $\Delta V$ ).

En una interpretación microscópica, los átomos en el orificio reemiten formando una onda que ocupa toda la región posterior al orificio pero cuya amplitud sólo es significativa en el ángulo  $\theta$  que hemos señalado (por algún criterio que se especificará más adelante).



# 7 Medios anisótropos

## 7.1. Introducción

Éste es el tema más difícil del curso. El libro de la bibliografía que más se aproxima al desarrollo que vamos a hacer aquí es el [Fowles]. A continuación vamos a ver por qué es interesante (*justificación*) y cómo abordar el problema (*planteamiento*).

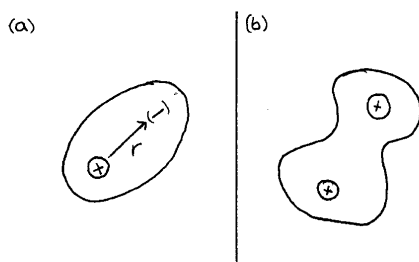
### 7.1.1. Justificación: anisotropía natural e inducida

Para medios isótropos supusimos la existencia de una fuerza recuperadora a nivel molecular proporcional a la separación entre cargas

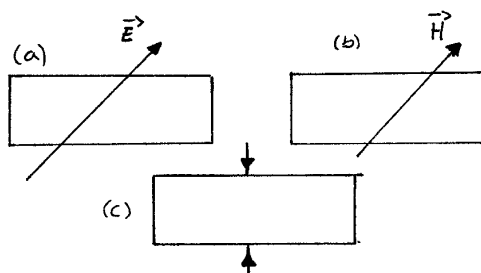
$$\mathbf{F}_{int} = m\omega_0^2\mathbf{r}$$

Ya dijimos que la linealidad no implicaba que  $\omega_0$  fuese un escalar. De hecho, sólo será un escalar si la dirección en que produzcamos la separación de cargas es indiferente, esto es, si los efectos de un campo eléctrico aplicado son igualmente eficaces separando cargas independientemente de su dirección. Si ocurre así, según la deducción que hicimos,  $\epsilon_0\chi_e$  será también un escalar en la expresión  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E}$ , y  $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$  implicará naturalmente  $\mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$ .

Imaginemos ahora el caso de una molécula biatómica. Vemos claramente que hay una dirección intrínsecamente privilegiada en un material cuya estructura microscópica es de este tipo (figura 7.1, b). Un mismo campo será más eficaz deformando la nube electrónica en una dirección que en otra.



**Figura 7.1:** Significado microscópico de la isotropía. a) la perturbación originada por un campo sobre un átomo es igualmente eficaz en todas las direcciones (isotropía microscópica). b) la perturbación sobre una molécula diatómica es más eficaz en unas direcciones que en otras (anisotropía microscópica).



**Figura 7.2:** Diferentes modos de inducir la anisotropía en un material. a) efecto electroóptico b) magnetoóptico c) fotoelástico.

Ahora se cumplen las siguientes relaciones, donde el gorro denota una matriz (que introduce la dependencia de la dirección).

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{int} &= \hat{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{P} &= \hat{\chi}_e\epsilon_0\mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0(\hat{1} + \hat{\chi}_e)\mathbf{E} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}\end{aligned}$$

los parámetros  $\hat{M}$ ,  $\hat{\chi}_e$  y  $\hat{\epsilon}$  tienen ahora carácter tensorial<sup>1</sup>. Como consecuencia de ello, los índices de refracción dependerán del estado de polarización (dirección del campo). Nos llevará un cierto tiempo (y muchos cálculos) cuantificar esta dependencia.

Imaginemos un medio hecho de moléculas anisótropas como las de la figura 7.1, (b). Si están distribuidas de modo aleatorio, los promedios espaciales harán que el medio sea macroscópicamente isótropo (pej, el aire). Para obtener medios *macroscópicamente* anisótropos debemos pensar en configuraciones más rígidas (que mantengan las moléculas orientadas en la misma dirección). Es decir, líquidos, pero, sobre todo, sólidos cristalinos.

La anisotropía de los cristales podríamos llamarla de *origen natural*. Pero nosotros podemos crear *anisotropías inducidas*. Por ejemplo, si aplicamos un fuerte campo eléctrico estacionario a ciertos medios, los convertiremos en anisótropos por alineación de momentos dipolares eléctricos. Lo mismo si se trata de un campo magnético estacionario. Pero también podemos causar anisotropía por medios mecánicos, como presiones o estiramientos (figura 7.2, c). En conclusión, la anisotropía se puede controlar a voluntad (siempre que no haya histéresis), por variados medios.

### 7.1.2. Planteamiento

Vamos a considerar sólo el caso de medio anisótropo más sencillo. Esperamos que el caso más general sea más complejo, pero no más complicado.

- medios no magnéticos,  $\mu = \mu_0$ .

<sup>1</sup>Omitiremos en lo que sigue la distinción notacional entre la matriz identidad,  $\hat{1}$  y el escalar 1.



- medios homogéneos.
- medios dieléctricos,  $\sigma = 0$ .
- medios transparentes.

Haremos una descripción en oap y caracterizaremos su propagación a partir de las ecMm. Para averiguar en qué se traduce la transparencia, tenemos que investigar el efecto de esta propiedad sobre la matriz dieléctrica.

## 7.2. Matriz dieléctrica

Si a un medio transparente isótropo le corresponde una constante dieléctrica que es un escalar real para caracterizar un medio transparente anisótropo se necesita una matriz hermítica. Veamos por qué.

*Transparente* significa que toda la energía que entra en un volumen  $V$  sale de él. Llamaremos  $\Sigma$  a la superficie cerrada que confina  $V$ . Para formular cuantitativamente que toda la energía que entra sale hacemos la integral de superficie

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle ds = 0$$

( $\mathbf{n}_{\Sigma}$  es el vector normal a la superficie y  $ds$  un elemento diferencial de ella). Cualquier superficie debe cumplir esta condición, que por el teorema de GAUSS se reduce a

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0$$

el promedio del vector de POYNTING vale, para ondas armónicas

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \}$$

Procedamos por partes. Utilizando una igualdad vectorial

$$\nabla (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \nabla \wedge \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla \wedge \mathbf{H}^*$$

y los rotacionales

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= -i\omega\mathbf{D} \end{aligned}$$

dados por las ecMm obtenemos

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = -\frac{i\omega}{4} \sum_{k,l} (\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{lk}) E_k E_l^*$$

donde  $k, l$  recorren las coordenadas  $x, y, z$ . Esto debe ser cero para toda onda, porque se trata de una propiedad intrínseca del material, lo que conduce a

$$\epsilon_{kl}^* = \epsilon_{lk}$$

es decir  $\epsilon^+ = \epsilon$ : la matriz dieléctrica es hermítica (puede tener elementos complejos, pero debe cumplir esas relaciones). Lo que sabemos es que por ser hermítica, la matriz se puede diagonalizar a una matriz con elementos sólo reales (autovalores reales) cuyos autovectores son ortogonales.

### 7.3. Medios anisótropos transparentes. Clasificación

- Si algún elemento de la matriz  $\epsilon_{kl}$  es complejo se dice que el medio tiene *actividad óptica*<sup>2</sup>.
- Si todos son reales se dice que el medio *no tiene actividad*.

Puede parecer que una propiedad física como es la actividad óptica depende de la base, pero no es así. En efecto, antes hemos dicho que toda matriz dieléctrica, por ser hermítica era diagonalizable a una matriz de elementos reales. Pero no hemos explicado que el cambio de base necesario puede involucrar operaciones que son algo más que un mero cambio de ejes en el espacio geométrico. En efecto, si la matriz dieléctrica que tenemos en una cierta base tiene elementos complejos para diagonalizarla será necesario multiplicar por una matriz unitaria, que a su vez tiene elementos complejos, y que representa un cambio de base no en el espacio geométrico, sino en el de las polarizaciones. Si la matriz de que disponemos es en origen real en todos sus elementos, un mero cambio de ejes en el espacio geométrico será suficiente para diagonalizarla.

En lo que resta sólo abordaremos el caso de medios sin actividad óptica. Para ellos siempre podemos encontrar un sistema de referencia en que la matriz sea diagonal. Diremos entonces que estamos haciendo la descripción en un *sistema de ejes principales*. Entonces, a los elementos de la diagonal (autovalores) se les llama *constantes dieléctricas principales*:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ . Se definen entonces toda una serie de magnitudes relativas a los ejes principales ( $\alpha = x, y, z$ ):

- índices de refracción principales:  $n_\alpha = \sqrt{\frac{\epsilon_\alpha}{\epsilon_0}}$
- velocidades de fase principales :  $v_\alpha = \frac{c}{n_\alpha}$

Las magnitudes principales no pueden ser las tres iguales (el medio sería isotrópico), de modo que se presentan dos casos

- medios *biáxicos*: las tres diferentes  $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$  y  $\epsilon_x \neq \epsilon_z$ .
- medios *uniáxicos*: dos iguales.

<sup>2</sup>que se traduce en el cambio del acimut de la luz linealmente polarizada que incide sobre él.

## 7.4. Propagación de ondas armónicas planas

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

con  $\mathbf{D}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0 \in \mathcal{C}$  constantes y  $\omega, \mathbf{k} \in \Re$  constantes (medios transparentes). Nuestro problema es determinar las relaciones que existen entre estos parámetros (por ejemplo, relación entre vector de ondas y frecuencia, o entre vector de ondas y vectores de intensidad de campo...).

Como siempre, acudimos a las ecMm y el resultado es

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 &= \mu\omega\mathbf{H}_0 \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 &= -\omega\mathbf{D}_0\end{aligned}$$

Es decir,  $\mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$  son mutuamente perpendiculares entre sí. Además,  $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ , pero eso no quiere decir  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ , que en general será falso. Esto implica que la energía no irá en la misma dirección que la fase. De modo que

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$$

no lleva la misma dirección que el vector de ondas. En lo que sigue estudiaremos siempre la propagación de la fase, porque luego a partir de  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  se obtiene de modo sencillo la propagación de la energía.

Si reescribimos el segundo rotacional y después sustituimos el valor de  $\mathbf{H}_0$  que nos da el primero

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_0 &= \hat{\epsilon}\mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{1}{\omega}\mathbf{k} \wedge \mathbf{H}_0 \\ &= -\frac{1}{\mu\omega^2}\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0)\end{aligned}$$

ejecutando el doble producto vectorial

$$\mathbf{D}_0 = -\frac{1}{\mu\omega^2} (\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) - \mathbf{E}_0 (\mathbf{k}^2))$$

finalmente el resultado de combinar los dos rotacionales es

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 + \mu\omega^2 \hat{\epsilon}\mathbf{E}_0 = 0$$

ésto es un conjunto de 3 ecuaciones, que queremos resolver para  $\mathbf{k}$  y para  $\mathbf{E}$ . Como son lineales en  $\mathbf{E}_0$ , las podemos reescribir con ayuda de una matriz,  $\mathbf{M}(\mathbf{k}, \hat{\epsilon})$ :

$$\mathbf{M}(\mathbf{k}, \hat{\epsilon}) \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$$

para escribir la matriz en la forma más sencilla posible hay que utilizar como ejes coordenados los ejes principales  $x, y, z$ . Entonces  $\mathbf{M}$  es:

$$\begin{pmatrix} (n_x \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & (n_y \frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_z \frac{\omega}{c})^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix}$$

El  $\mathbf{E}_0$  debe ser autovector de la matriz con autovalor nulo. Se debe producir que  $|\mathbf{M}| = 0$ , lo que limitará los vectores de onda posibles.

El proceso será obtener dichos vectores de onda y luego llevarlos a la ecuación de autovalores para despejar  $\mathbf{E}_0$ . Eso equivale a la resolución completa del problema que nos habíamos fijado: determinar la propagación de oap en medios anisótropos.

## 7.5. Medios uniáxicos

### 7.5.1. Superficie de vectores de onda. Eje óptico

A partir de ahora nos vamos a centrar en medios uniáxicos sin actividad óptica en los que, por ejemplo

$$\begin{aligned} n_x = n_y &= n_o \\ n_z &= n_e \end{aligned}$$

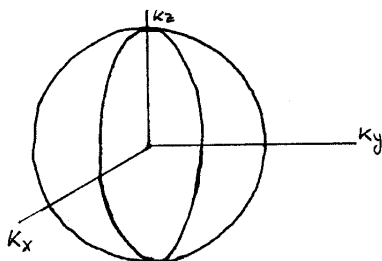
donde  $n_o$  se denomina *índice ordinario* y  $n_e$  *índice extraordinario*.

$$|\mathbf{M}| = \left( \mathbf{k}^2 - \left( n_o \frac{\omega}{c} \right)^2 \right) \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{\left( n_e \frac{\omega}{c} \right)^2} + \frac{k_z^2}{\left( n_o \frac{\omega}{c} \right)^2} - 1 \right)$$

Como  $|\mathbf{M}| = 0$ , se debe anular uno de los dos factores. Si es el primero, el vector de ondas debe estar sobre una esfera de radio  $n_o \frac{\omega}{c}$ ; si es el segundo, sobre un elipsoide de revolución de semiejes  $n_e \frac{\omega}{c}$ ,  $n_e \frac{\omega}{c}$ ,  $n_o \frac{\omega}{c}$  (también se pueden anular ambos factores a la vez). A las superficies dadas por la condición de anulación de  $|\mathbf{M}|$  las llamamos *superficies de vectores de onda*. Ambas coinciden (y comparten plano tangente) en el eje  $z$ . A ese eje se le denomina *eje óptico*. Es el eje donde la constante dieléctrica tiene un valor diferente al de los otros dos ejes principales.

Imaginemos una onda que se propague en una dirección del espacio. Para dicha onda, en un medio anisótropo uniáxico, tenemos dos vectores de onda distintos: el que está sobre la esfera (*onda ordinaria*) y el que está sobre el elipsoide (correspondiente a *la onda extraordinaria*). A partir de ahora todos los problemas se nos desdoblán, puesto que tenemos que caracterizar la propagación de ambas.

- Para la onda ordinaria, el módulo del vector de ondas  $|\mathbf{k}_o| = n_o \frac{\omega}{c}$  siempre será el mismo. Así ocurre, también con la velocidad de fase  $v_o = \frac{c}{n_o}$ .



**Figura 7.3:** Esfera y elipsoide de vectores de onda. Dependiendo de  $n_e$  y  $n_o$  el elipsoide estará dentro o fuera de la esfera.

- Para la onda extraordinaria, tomando coordenadas esféricas  $r, \varphi, \phi$  (radial, polar, acimutal)

$$\mathbf{k}_e = |\mathbf{k}_e| (\sin \phi \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \phi \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \phi \mathbf{u}_z)$$

Si llevamos esto a la condición de anulación del factor correspondiente tendremos

$$|\mathbf{k}_e| = \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \phi + n_e^2 \cos^2 \phi}} \frac{\omega}{c}$$

Este módulo tiene simetría de revolución en torno al eje óptico. Igualmente, podemos preguntarnos por la velocidad de fase

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_e|}$$

para la que

$$v_f^2 = v_e^2 \sin^2 \phi + v_o^2 \cos^2 \phi$$

donde  $v_e = \frac{c}{n_e}$  y  $v_o = \frac{c}{n_o}$ .

Hay dos vectores de onda en todas las direcciones del espacio salvo en la del eje óptico, donde sólo hay una onda. Para medios biáxicos esto ocurre para dos direcciones del espacio (los dos ejes ópticos); en el resto hay dos vectores de onda.

Lo que tenemos que hacer ahora es llevar los dos vectores de onda a la ecuación de autovalores y calcular los  $\mathbf{E}_0$  correspondientes. Para simplificar el problema (reduciéndolo en una dimensión) vamos a aprovechar la simetría en torno al eje  $z$  disponiendo los ejes  $x, y$  de modo que  $k_x = 0$ . Entonces  $\mathbf{M}$  queda

$$\begin{pmatrix} (n_x \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_y \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z k_y & (n_z \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix}$$

### 7.5.2. Ondas o y e: fase y polarización

#### Onda ordinaria

Si el vector de ondas está sobre la esfera (sobre el círculo) y no coincide con el eje  $z$  ( $k_y \neq 0$ ) entonces cumple  $k_y^2 + k_z^2 = (n_o \frac{\omega}{c})^2$

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

por la condición de onda ordinaria  $0 \times E_{0x} = 0$ , con lo que nos queda como subsistema

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

la condición necesaria para que tenga solución es que esta submatriz tenga determinante nulo, pero eso es contradictorio, porque equivale a decir que el vector de ondas está sobre el elipsoide (y por hipótesis está sobre la esfera). Por lo tanto se tiene que verificar

$$\begin{aligned} E_{0y} = E_{0z} &= 0 \\ E_{0x} &\neq 0 \end{aligned}$$

En otras palabras:

- *la onda ordinaria está linealmente polarizada, vibrando perpendicularmente al plano que contiene al vector de ondas y al eje óptico.*
- *Para la onda ordinaria,  $\mathbf{E}_0$  sí es perpendicular a  $\mathbf{k}$ : energía y fase se propagan en la misma dirección.  $\langle \mathbf{S} \rangle \propto \mathbf{k}$ .*

Esta onda sólo se distingue de la que atraviesa un medio isótropo en que está obligatoriamente linealmente polarizada del modo descrito.

#### Onda extraordinaria

$$\frac{k_y^2}{(n_e \frac{\omega}{c})^2} + \frac{k_z^2}{(n_o \frac{\omega}{c})^2} = 1$$

es la ecuación que la define. Vamos a apartar para más tarde el estudio de la propagación según el eje óptico, por lo que  $k_y \neq 0$ . Si llevamos la condición para  $\mathbf{k}_e$  a la ecuación de autovalores y aprovechando la simetría de revolución, tenemos dos subsistemas (primera fila y últimas dos, respectivamente, de la matriz)

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 - k_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ 0 & k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

se deduce que

$$E_{0x} = 0$$

el subsistema

$$\begin{pmatrix} (n_o \frac{\omega}{c})^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_y & (n_e \frac{\omega}{c})^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

tiene solución distinta de la trivial, porque su determinante vale, por hipótesis, 1. Resolviendo:

$$\mathbf{E}_0 \propto \begin{pmatrix} 0 \\ n_e^2 k_z \\ -n_o^2 k_y \end{pmatrix}$$

Conclusiones:

- *La luz es linealmente polarizada (campo proporcional a un vector real), y está en el plano determinado por  $\mathbf{k}$  y el eje óptico.*
- *En general  $\mathbf{E}_0 \not\perp \mathbf{k}$  ya que*

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \propto (n_{or}^2 - n_e^2) k_y k_z$$

*salvo en el caso  $k_z = k_x = 0$  ( $k_y$  lo estamos excluyendo de momento). Dicho de otro modo, siempre que  $\mathbf{k}$  sea perpendicular al eje óptico,  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$ , pero sólo en ese caso. La energía y la fase se propagan cada una por su cuenta.*

### Eje óptico

Cuando el vector de ondas está en la dirección del eje óptico, sólo hay una onda (la ordinaria y la extraordinaria coinciden). Se cumple  $k_y = k_x = 0$  y  $\mathbf{k} = n_o \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$ . Esto en nuestra ecuación de autovalores significa más ceros en la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n_e \frac{\omega}{c})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

de donde  $E_{0z} = 0$  y  $E_{0x}, E_{0y}$  son libres.

Conclusiones:

- *Cualquier estado de polarización es posible.*
- *$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$  por lo que fase y energía van en la misma dirección.*

En este caso particular la onda ve un medio isótropo: si nos movemos por el eje  $z$  el índice en todas las direcciones laterales es el mismo. Es natural que el resultado sea el mismo que para una oap en un medio isótropo.

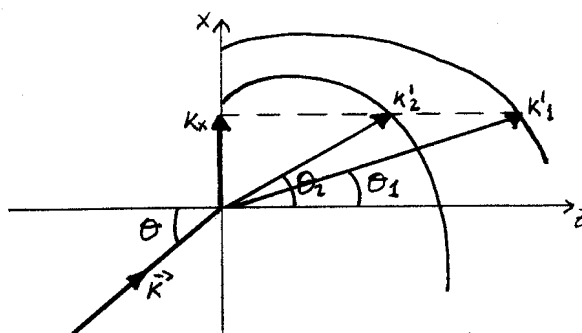


Figura 7.4: Diagrama de la interfase y las ondas que intervienen.

### 7.5.3. Refracción y reflexión: doble refracción

Vamos a examinar ahora qué ocurre cuando hay una discontinuidad de índice y uno de los medios es anisótropo. La superficie de separación la supondremos plana. Para saber si hay o no ondas reflejada y transmitida debemos preguntarlo a las ecMm. Si las hubiera les asignaríamos una superposición de oap:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= \mathbf{A}e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{R}e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} + \omega'' t)} + \dots \\ \mathbf{E}_t &= \mathbf{T}e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} + \dots\end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para los campos no varían porque uno de los medios sea anisótropo. Si las aplicamos obtendremos la igualdad

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$$

en  $z = 0$  (la interfase),

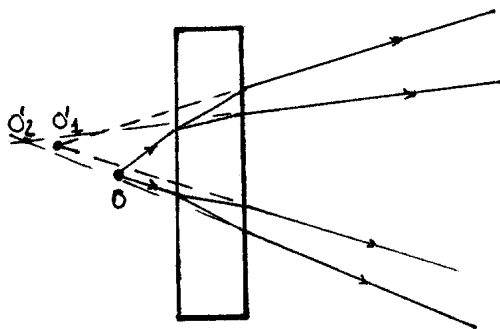
$$\begin{aligned}k_x = k'_x &= k''_x = n \frac{\omega}{c} \sin \theta \\ k_y = k'_y &= k''_y = 0\end{aligned}$$

(la segunda componente se anula por elección de ejes). Es decir, todos los vectores de onda están en el plano de incidencia.

A partir de aquí comienzan las diferencias. En general el módulo del vector de ondas depende de la dirección en un medio anisótropo. Lo que sí sabemos es que el vector de ondas debe estar

1. sobre el plano de incidencia
2. sobre la superficie de vectores de onda





**Figura 7.5:** Formación de dos imágenes al atravesar la luz un medio anisótropo.

En la figura 7.4 vemos que el vector de ondas de la onda transmitida puede ser uno de los dos que tienen la misma componente  $k_x$  y cumplen las dos exigencias planteadas (cortamos las superficies de vectores de onda con el plano de incidencia, obteniendo dos curvas). Utilizando la notación de la figura 7.4

$$\begin{aligned} |k'_x| &= |\mathbf{k}'_1| \sin \theta'_1 = |\mathbf{k}| \sin \theta = k_x \\ |\mathbf{k}'_2| \sin \theta'_2 &= |\mathbf{k}| \sin \theta \end{aligned}$$

- En general habrá dos ondas refractadas, ya que hay dos vectores de onda que satisfacen las condiciones de frontera<sup>3</sup>. A esta propiedad se la llama doble refracción o *birrefringencia*. Esto significa que al mirar objetos a través de medios anisótropos se ven dobles.
- Por ser  $|\mathbf{k}'_1|$  y  $|\mathbf{k}'_2|$  funciones de los respectivos ángulos no hay una ley simple de tipo SNELL. Hay que utilizar las dos últimas ecuaciones que hemos escrito, y las dificultades de cálculo son mucho mayores.
- Interpretación microscópica: la frecuencia de resonancia de los osciladores microscópicos ya no es isotrópica. Es como si hubiera 2 medios superpuestos.

No vamos a abordar la especificación de otros parámetros de la onda (fórmulas de FRESNEL, coeficientes de reflexión, etc.). Solamente vamos a comentar un resultado: si concebimos un medio uniáxico cuyo eje óptico esté en el plano de incidencia o sea perpendicular a él se cumple que

- Una onda incidente polarizada linealmente según la dirección perpendicular da lugar a una onda refractada con polarización también perpendicular  $\perp \rightarrow \perp$
- $\parallel \rightarrow \parallel$ .

Esta es una circunstancia especial en que ocurre lo mismo que en medios isotrópicos en cuanto a separación de componentes paralela y perpendicular.

<sup>3</sup>En un medio isotrópico la superficie de vectores de onda tenía una sola hoja, de modo que sólo había un vector de onda que cumpliera las condiciones



## 8 Aplicaciones de los medios anisótropos

### 8.1. Transparentes

#### 8.1.1. Láminas retardadoras

El propósito de estos dispositivos es cambiar la diferencia de fase entre dos ondas. Ya que en los medios anisótropos las dos ondas van a distinta velocidad, se producen desfases de una onda respecto a la otra. Una lámina retardadora puede ser una lámina planoparalela de un medio uniáxico. Para ver lo que pasa sólo tenemos que caracterizar la propagación y relacionar las amplitudes complejas de la onda incidente y de la emergente. Con el sistema de referencia de la figura 8.1 se cumple

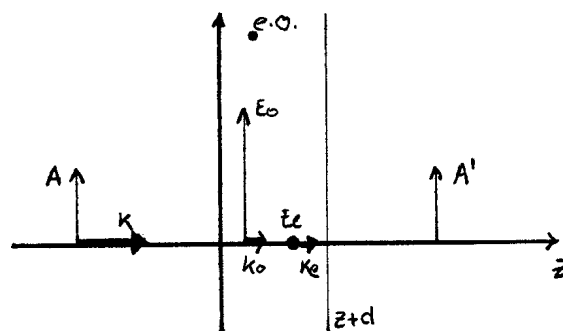
$$k_x = k_y = 0$$

Los dos posibles vectores de onda son

$$\mathbf{k}_o = n_o \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{k}_e = n_e \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z$$

(si es  $\perp$  al e.o.). Ambos vectores de onda están sobre el eje  $z$ . El campo eléctrico de la ordinaria vibra en el plano del papel (eje  $x$ ) y el de la extraordinaria ortogonal a éste ( $y$ ).

Para no tener que acudir a las fórmulas de FRESNEL, nos apoyamos en que el medio es transparente y los coeficientes de transmisión deben ser, por analogía al caso isótropo, próximos a 1. Con esta aproximación,



**Figura 8.1:** Lámina planoparalela de anchura  $d$ . El eje óptico es perpendicular al plano del papel. La incidencia es normal, según el eje  $z$ .

- la onda ordinaria estará excitada sólo por la componente  $x$  de la onda incidente

$$E_x(z+d) = A_x e^{i(k_o(z+d)-\omega t)} = e^{ik_o d} E_x(z)$$

- la componente  $y$  excita la onda extraordinaria

$$E_y(z+d) = A_y e^{i(k_e(z+d)-\omega t)} = e^{ik_e d} E_y(z)$$

Esa misma relación, en términos de amplitudes es

$$\begin{aligned} A'_x &= e^{ik_o d} A_x \\ A'_y &= e^{ik_e d} A_y \end{aligned}$$

el cambio de fase es distinto para cada componente, en virtud de la anisotropía ( $k_e \neq k_o$ ). A efectos de polarización podemos escribir las relaciones anteriores como

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \\ A'_y &= e^{-i\delta} A_y \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es la diferencia de fases entre las componentes de la onda emergente.

$$\delta = (k_o - k_e) d = \frac{\omega}{c} (n_o - n_e) d = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$$

y  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío. Una escritura matricial es

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

la matriz se llama *matriz de JONES de la lámina retardadora*. En este caso está escrita en la base en la que  $y$  es el eje óptico. Si queremos expresarla para una base en la que el eje óptico forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $y$  sólo hay que aplicar una rotación a la matriz que tenemos<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} M &= R_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{pmatrix} R_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\delta} \sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha (1 - e^{-i\delta}) \\ \cos \alpha \sin \alpha (1 - e^{-i\delta}) & \sin^2 \alpha + e^{-i\delta} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los ejes en los que la matriz de JONES es más simple se llaman *ejes de la lámina*.

Comentarios:

- La lámina cambia estados de polarización cambiando la fase relativa entre las dos componentes del campo. Es una forma cómoda y sencilla de hacerlo, porque la luz ni siquiera se desvía.

<sup>1</sup>Si al hacer los cálculos encuentras discrepancias de signos, seguramente se deben a una elección distinta del referencial de ángulos.

- El desfase introducido depende del grosor de la lámina.
- El desfase introducido depende de la longitud de onda incidente.
- Si el campo eléctrico vibra en la dirección del eje óptico, luz lineal se convertiría en luz lineal. Es decir, si la luz vibra según uno de los ejes de la lámina, *la lámina no cambia su estado de polarización*, porque no hay dos componentes que desfazar.

Las láminas de espesor variable se llaman *compensadores* y son muy útiles. Las láminas de espesor fijo son *específicas de una longitud de onda*.

### Ejemplo Lámina cuarto de onda

Dentro de las láminas de espesor fijo<sup>2</sup>, vamos a estudiar la *lámina cuarto de onda* (o  $\frac{\lambda}{4}$ ), que es aquella que introduce un desfase múltiplo impar de  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

con  $m \in \mathcal{Z}$ . Para ello

$$d = \frac{2m + 1}{n_o - n_e} \frac{\lambda}{4}$$

en sus ejes,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$$

Una aplicación es convertir luz linealmente polarizada en elípticamente polarizada, pero con la particularidad de que los ejes de la elipse de luz emergente coinciden con los ejes de la lámina.

$$\begin{array}{ccc} \text{lineal} & \leftrightarrow & \text{elíptica} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} & \rightarrow & \left[ \frac{\lambda}{4} \right] \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \pm i \sin \theta \end{pmatrix} \end{array}$$

De este modo, sabemos cómo está orientada la elipse. Si  $\theta$  de la luz lineal es  $\frac{\pi}{4}$  tendríamos luz emergente circularmente polarizada.

### 8.1.2. Prismas polarizadores

Un polarizador es un dispositivo que, independientemente del estado de polarización de entrada, a la salida proporciona luz de una polarización específica (normalmente lineal). Una forma de construir polarizadores es utilizar medios anisótropos transparentes.

Si incidimos desde el aire sobre un medio anisótropo sabemos que en general se producirán dos ondas. Si el medio es uniaxial una será ordinaria y otra extraordinaria. Cada

<sup>2</sup>Para más información sobre los procedimientos de fabricación de estas láminas, puede consultarse

- *Geometrical and Physical Optics* (LONGHURST). Dice que las láminas de mica se obtienen cortando el mineral. La falta de precisión se soluciona “por el método de prueba y error”.
- *Handbook of Optics* (Optics Society of America). Dice que se cortan láminas, se pegan de forma que se compensen los desfases, y se pulen hasta que se llega a  $\frac{\lambda}{4}$  (o el desfase deseado).

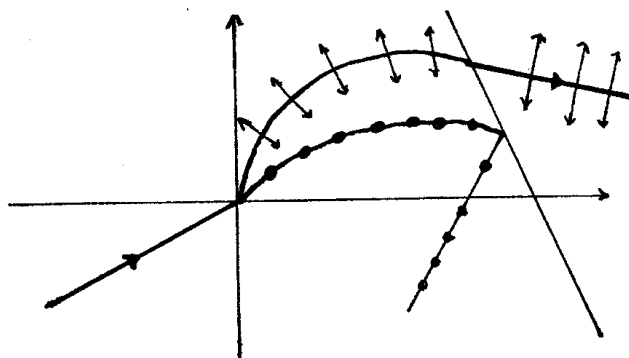


Figura 8.2: Polarizadores.

una de ellas tiene un estado de polarización específico, y tienen direcciones diferentes. Lo que hay que hacer es cargarse una de ellas, y no es difícil porque viajan con vectores de onda distintos. Eso se puede hacer enfrentándola a un material absorbente o bien a una segunda cara del medio anisótropo dispuesta con el ángulo justo para que se produzca reflexión total de la onda que no nos interesa (figura 8.2). Hay muchas formas de llevar esto a la práctica, que se describen en la bibliografía y algunas de ellas también en los problemas.

## 8.2. Absorbentes; dicroísmo; polaroides

El objetivo es obtener luz polarizada. Pensemos en un medio anisótropo uniáxico (dos constantes dieléctricas,  $\epsilon_e$  y  $\epsilon_o$ ). Podemos imaginar una situación en la cual una de estas constantes dieléctricas fuera compleja para la frecuencia de interés. Entonces el medio sería absorbente para una de las ondas y transparente para la otra. Por ejemplo

$$\begin{aligned} n_o &\rightarrow n_o + i\kappa_o \\ n_e &\rightarrow n_e \end{aligned}$$

con  $\kappa_o(\omega) \neq 0$ . Este fenómeno de absorción selectiva recibe el nombre de *dicroísmo* y los medios que producen este efecto se llaman *dicroicos*. Hay cristales naturales dicroicos, pero los materiales más utilizados son láminas de alcoholes de polivinilo estiradas y dopadas con yodo. La ventaja es que se pueden construirse en tamaños arbitrarios.

A partir de ahora llamaremos *eje del polarizador* a la dirección de vibración del haz emergente. Vamos a ver un par de ejemplos

### Efecto del polarizador sobre luz linealmente polarizada

El polarizador anula la componente perpendicular a su eje (absorbiéndola o refractándola en otra dirección).

$$E'_{\perp} = 0$$

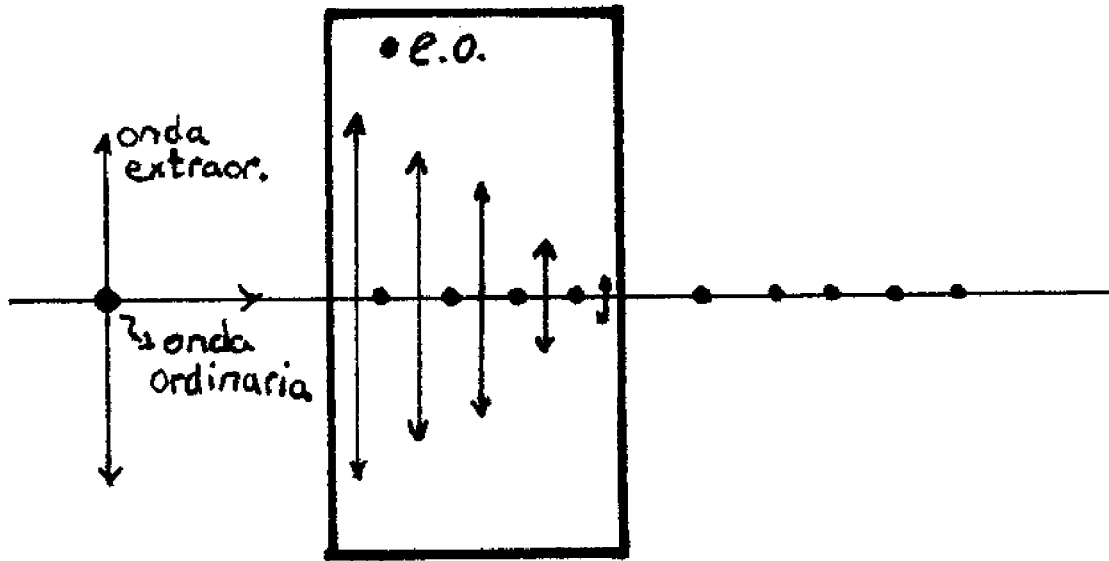


Figura 8.3: Para la onda ordinaria se produce absorción con la propagación. Si el espesor es suficiente el medio eliminará la onda ordinaria. La onda extraordinaria pasa sin sufrir absorción.

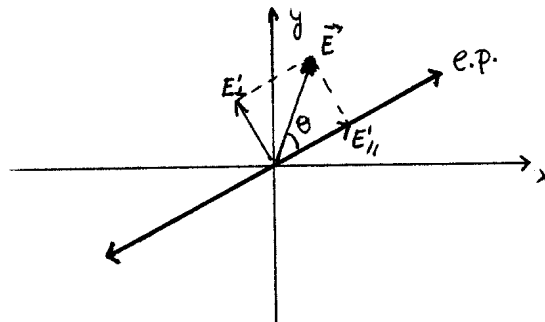
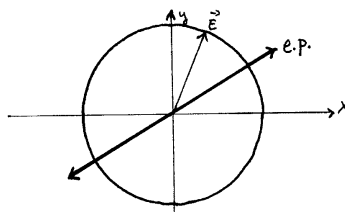


Figura 8.4: El campo incidente es  $E$  con intensidad  $I$  y el emergente  $E'$  con intensidad  $I'$ . El eje del polarizador está rotulado e.p.



**Figura 8.5:** Plano del polarizador,  $xy$ . Circunferencia que describe el haz incidente.

Si el polarizador es ideal

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}$$

La intensidad del haz incidente es

$$I \propto |\mathbf{E}|^2$$

y la del haz emergente

$$I' \propto |\mathbf{E}'|^2 = |E'_{\parallel}|^2 = |E_{\parallel}|^2$$

como  $\cos \theta = \frac{|E_{\parallel}|}{|\mathbf{E}|}$  se puede escribir

$$\begin{aligned} I' &\propto |\mathbf{E}|^2 \cos^2 \theta \\ I' &= I \cos^2 \theta \end{aligned}$$

la última expresión se conoce como *Ley de MALUS*.

### Efecto del polarizador sobre luz circularmente polarizada

Para todos los ejes que escojamos la luz circular se va a escribir así:

$$\mathbf{E} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} E_{\parallel} \\ E_{\perp} \end{pmatrix}$$

Suponiendo un polarizador ideal

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= 0 \end{aligned}$$

Las intensidades cumplen, independientemente de cómo esté colocado el eje del polarizador

$$\begin{aligned} I' &\propto |E'_{\parallel}|^2 \\ I' &\propto |E_{\parallel}|^2 + |E_{\perp}|^2 \\ I' &\propto 2|E_{\parallel}|^2 \end{aligned}$$

y, finalmente

$$I' = \frac{I}{2}$$



### 8.3. Matrices de Jones

Escribimos un polarizador cuyo eje coincide con el eje  $x$  como

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple  $\mathbf{E}' = M\mathbf{E}$ . Si el eje de polarización forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  no hay más que aplicar una matriz de rotación

$$M = R_{\alpha}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

El uso de las matrices ahorra trabajo especialmente cuando tenemos un gran número de elementos (se obtiene una matriz del sistema que vale para todo estado de polarización incidente).

### 8.4. Luz natural

#### 8.4.1. Definiciones

Si la onda es estrictamente armónica

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

el campo está describiendo una elipse. A esto lo llamamos *luz completamente polarizada* (el campo describe una elipse —o una circunferencia, o una recta— perfectamente definida). En la naturaleza, éste es raramente el caso. Más habitualmente, se presentan ondas como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

que son no monocromáticas y cuya polarización es variable. De hecho, las fuentes de luz convencionales son de este tipo, sin polarización privilegiada. La *luz natural* va pasando con cierta rapidez de un estado de polarización a otro.

Los que hemos presentado son dos casos extremos. Podemos tener un estado de polarización más frecuente que los otros, sin que por ello sea el único. A esto se le llama *luz parcialmente polarizada*. Es posible descomponerla en suma de luz natural (las desviaciones de la polarización elíptica) y luz completamente polarizada, de tal modo que

$$I = I_{np} + I_{cp}$$

Para cuantificar cuán polarizada está una onda, se define el *grado de polarización* como

$$GP = \frac{I_{cp}}{I_{np} + I_{cp}}$$

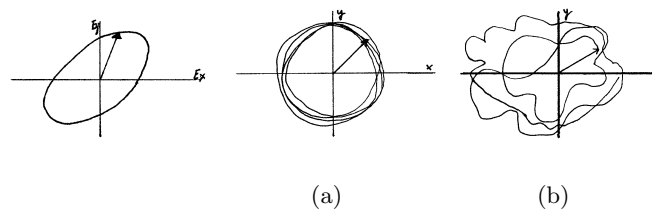


Figura 8.6: a) Luz completamente polarizada b) luz parcialmente polarizada c) luz natural

### 8.4.2. Efectos de una lámina y de un polarizador

#### Lámina retardadora

Cuando la luz natural incide sobre una lámina retardadora ocurre lo siguiente:

1. Como la hemos considerado completamente transparente, la intensidad se conserva.

$$I = I'$$

2. Como el desfase en cualquier par de componentes es aleatorio, la introducción de una fase extra no cambia la aleatoriedad de la diferencia de fase. No hay efecto.

#### Polarizador

Cuando la luz natural incide sobre un polarizador emerge luz linealmente polarizada:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= E_{\parallel} \\ E'_{\perp} &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} I' &\propto |E'_{\parallel}|^2 = |E_{\parallel}|^2 \\ I &\propto |E_{\parallel}|^2 + |E_{\perp}|^2 \\ &= 2 |E_{\parallel}|^2 \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que al ser la luz natural hay la misma cantidad de luz en ambas polarizaciones, por ser el reparto entre ellas aleatorio:  $|E_{\parallel}| = |E_{\perp}|$ . En conclusión:

$$I' = \frac{I}{2}$$

# 9 Interferencia

## 9.1. Planteamiento

### 9.1.1. Definición

Se dice que en un punto del espacio hay interferencia cuando la intensidad observada en él en presencia de dos ondas difiere de la suma de las intensidades asociadas a cada onda individual

$$I \neq I_1 + I_2$$

Siendo las ecM lineales en los campos eléctricos, una carga situada en la pantalla de observación se vería afectada por el campo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

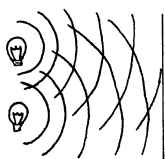
pero nuestros detectores son cuadráticos,  $I \propto \mathbf{E}^2$

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \\ &= I_1 + I_2 + ti \end{aligned}$$

donde  $ti$  es el *término interferencial*. Ésta igualdad es válida para cada instante. Pasando a promedios temporales (que es lo que podemos medir), podemos escribir que la existencia de interferencia es equivalente a

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle \neq 0$$

¿Por qué con unas condiciones tan sencillas la interferencia se observa tan raramente<sup>1</sup>? Habrá que ver cuáles son las condiciones para que haya inteferencia, lo que nos llevará naturalmente a la construcción de interferómetros.



**Figura 9.1:** Emisión procedente de dos fuentes.

<sup>1</sup>en la vida ordinaria se puede ver el fenómeno en los colores que presentan las pompas de jabón o una fina capa de aceite motor estirada sobre el pavimento por la lluvia.

### 9.1.2. Descripción escalar

Para observar interferencia en condiciones óptimas (término interferencial más grande) escogeremos ambos vectores paralelos, es decir, ondas con el mismo estado de polarización especificado por el vector unitario  $\mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= E_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{E}_2 &= E_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{E} &= E \mathbf{u}\end{aligned}$$

Podemos escribir la igualdad vectorial  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  como  $E = E_1 + E_2$ . Es decir, vamos a asumir tácitamente en lo que sigue que todas las ondas tienen el mismo estado de polarización. Esto nos conduce a la descripción escalar, más sencilla.

## 9.2. Coherencia

Si tomamos ondas escalares armónicas

$$\begin{aligned}E_1 &= A_1(\mathbf{r}) \cos(\omega_1 t - g_1(\mathbf{r})) \\ E_2 &= A_2(\mathbf{r}) \cos(\omega_2 t - g_2(\mathbf{r}))\end{aligned}$$

y hacemos el promedio temporal

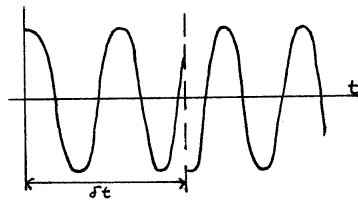
$$I \propto \langle E^2 \rangle = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} + A_1 A_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + g_2 - g_1) \rangle$$

dicho de otra forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + g_2 - g_1) \rangle$$

El término interferencial depende más lentamente del tiempo cuanto más próximas entre sí estén las frecuencias. El problema es que las resoluciones temporales en laboratorio son muy toscas: para que el  $ti$  varíe tan lentamente como para que pueda verse en laboratorio, ambas frecuencias deben ser *muy* parecidas (como una parte en  $10^{11}$ ). En resumen, si  $\omega_1 \neq \omega_2$  el promedio temporal del término interferencial será nulo a efectos de observación. A partir de ahora nos quedaremos con el caso óptimo: interferencias no dependientes del tiempo, es decir,  $\omega_1 = \omega_2$ . Esto garantiza la estabilidad en el tiempo del fenómeno de interferencia.

El fenómeno de interferencia es muy sensible; tanto que nos obliga a revisar el proceso de emisión de luz monocromática. La luz monocromática se puede obtener por transiciones atómicas de un gas muy enrarecido y enfriado. En concreto, podemos pensar que tenemos dos fuentes, por ejemplo, dos átomos idénticos excitados por una colisión electrónica. Estos átomos sólo emitirán luz hasta que decaigan al estado fundamental. Como hemos visto cuando estudiamos el modelo clásico de la radiación, este tiempo depende del término de rozamiento  $\gamma$ . El átomo decae exponencialmente al estado fundamental en tiempos del  $ns$ .



**Figura 9.2:** Proceso de emisión atómica continuamente estimulada. Se producen saltos de fase y amplitud cada  $\delta t = 10^{-10}s$

De modo que tenemos dos ondas, cada una de las cuales dura del orden de un  $ns$ . Eso es demasiado breve para poder observarlo. Para tener una emisión continuada necesitamos reexcitar periódicamente al átomo. El problema que surge es que en esas colisiones es imposible predecir en qué estado interno quedará el átomo. Con ocasión de cada colisión el campo eléctrico emitido cambiará de fase y amplitud (aunque no de frecuencia). Para mantener la emisión se debe excitar el átomo cada cierto tiempo, menor que el tiempo de desexcitación. Es fundamentalmente el cambio de fase cada vez que se estimula el átomo mediante un choque (por ejemplo, cada  $10^{-10}s$ ) el que impide que la onda emitida sea monocromática. Este salto de fase depende de muchos parámetros de la excitación y, en general, es incontrolable. Para muchas aplicaciones esta no monocromaticidad no es relevante, pero la interferencia depende crucialmente de la fase, de modo que este grado de monocromaticidad no es suficiente.

La cantidad de frecuencias que contiene una onda depende del tiempo entre saltos de fase (una especie de principio de incertidumbre energía-tiempo)

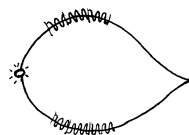
$$\Delta\omega \propto \frac{1}{\delta t}$$

Al tiempo  $\delta t$  se le llama *tiempo de coherencia*. Como  $\delta t$  es aleatorio, se define de modo estadístico. Como cuantificador de la monocromaticidad usamos la cantidad  $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ . En el caso que nos ocupa

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \propto \frac{1}{\omega\delta t} \simeq 10^{-5}$$

lo que indica una alta monocromaticidad. Cotas de mayor monocromaticidad se alcanzan con el uso de la radiación estimulada (laser). Igual que hay ondas más monocromáticas, las hay mucho menos: por ejemplo, los átomos en un gas experimentan colisiones entre ellos, y el tiempo de coherencia disminuye con la presión y la temperatura, que favorecen las colisiones.

Cuando tenemos dos átomos radiando según este esquema la diferencia de fases entre ambos,  $g_2 - g_1$  es una variable aleatoria que cambia a saltos en tiempos siempre menores a  $\delta t \simeq 10^{-10}s$ . El promedio temporal del término de interferencia es nulo y por lo tanto, a pesar de ser la onda bastante monocromática, no hay interferencia. Concluimos que las ondas de dos fuentes independientes son *incoherentes*.



**Figura 9.3:** División de la onda procedente de una fuente. Una de las partes llega al punto de reunión en un tiempo  $\Delta t$  y otra en  $\Delta t + \tau$ .

No veremos interferencia a menos que los cambios de fase se produzcan en el mismo instante para las dos ondas, es decir, a menos que sean *las mismas*. Si superponemos una onda consigo misma sí hay coherencia.

$$E(t - \Delta t) + E(t - \Delta t - \tau) = E_1 + E_2$$

La diferencia de fases ya no será aleatoria y el promedio temporal del término de interferencia podrá ser distinto de cero. Con una salvedad: las dos ondas producidas por una misma fuente una onda pueden llevar un retraso relativo *pero no demasiado grande*. Si retrasamos una onda respecto a la otra un tiempo superior a  $\delta t$  volveremos a tener dos ondas con diferencia de fase aleatoria. Habrá interferencia si  $\tau \ll \delta t$  (ondas coherentes) y no la habrá si  $\tau > \delta t$  (ondas incoherentes).

Resumiendo

- Para observar la interferencia en las mejores condiciones hemos supuesto que ambas ondas tienen el mismo estado de polarización, lo que nos permite hacer una descripción escalar que es más sencilla.

$$\mathbf{E}_i = E_i \mathbf{u}$$

- Hemos preferido estudiar interferencias independientes del tiempo. Por lo tanto la frecuencia de las ondas que interfieren debe ser *estrictamente igual*.

$$\omega_1 = \omega_2$$

- Estos requisitos, junto con el hecho de que las ondas de emisores distintos son incoherentes nos han llevado a requerir que las ondas sean producidas por la misma fuente.
- Esto no sirve de nada si ambas ondas tienen una diferencia de camino tan grande que el retardo relativo supera el tiempo de coherencia.

$$\tau \ll \delta t$$

A partir de aquí sólo queda catalogar los interferómetros. Estudiaremos aquí sólo los ejemplos más famosos.

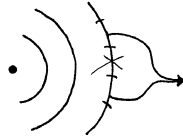


Figura 9.4: La idea consiste en atrapar dos trozos del frente de ondas y luego reunirlos.

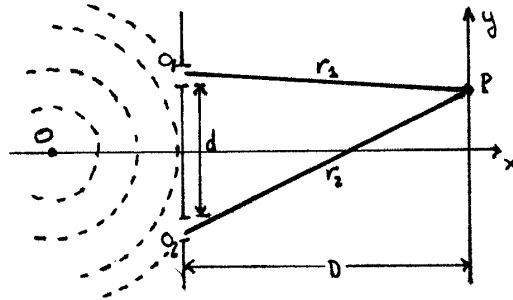


Figura 9.5: Coordenadas de los puntos de emisión y el punto de observación.

### 9.3. División del frente de onda (Young)

#### 9.3.1. Montaje

El nombre de interferencia por división del frente de onda queda claro al examinar la figura 9.4. La fuente puntual monocromática emite ondas esféricas que van a parar sobre una pantalla opaca en la que se han practicado dos orificios,  $o_1$  y  $o_2$ . Sus distancias respectivas a un punto  $P$  sobre la pantalla de observación son  $r_1$  y  $r_2$ . La pantalla de los orificios y la de observación son planos paralelos entre sí y perpendiculares al eje  $z$  (cuyo origen  $z = 0$  está en la pantalla de observación) separados por una distancia  $D$ .

$$\begin{aligned} o_1 &= \left( \frac{d}{2}, 0, -D \right) \\ o_2 &= \left( -\frac{d}{2}, 0, -D \right) \\ P &= (x, y, 0) \end{aligned}$$

Vamos a dar por cierto algo que justificaremos cuando estudiemos la difracción: si los orificios son lo suficientemente pequeños, la luz que emana de ellos lo hace en forma de ondas esféricas.

#### 9.3.2. Onda armónica escalar esférica

Estas ondas son soluciones de la siguiente ecO con simetría esférica

$$\nabla^2 u = \frac{n^2}{c^2} u$$

tienen la forma

$$u(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

con  $A$  constante,  $k = n \frac{\omega}{c} = n \frac{2\pi}{\lambda}$  y  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío. Si la coordenada del punto de emisión es  $\mathbf{r}_o$  se define  $r$  como  $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o\|$ . Los frentes de onda son esféricos y  $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ .

### 9.3.3. Formación de un patrón de interferencias

Las ondas provenientes de los orificios son coherentes entre sí por proceder ambas de la misma fuente. Las podemos expresar como ondas esféricas centradas en los orificios si éstos son suficientemente pequeños

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{A}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \\ E_2 &= \frac{A}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \\ r_2 &= \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \end{aligned}$$

Sobre la pantalla el campo total será la suma de los procedentes de cada orificio, y la intensidad su cuadrado

$$I = |E_1 + E_2|^2$$

de donde

$$\begin{aligned} I &\propto \frac{|A|^2}{r_1^2} + \frac{|A|^2}{r_2^2} + 2 \frac{|A|^2}{r_1 r_2} \cos(k(r_2 - r_1)) \\ I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r_2 - r_1)) \end{aligned}$$

con  $I_i \propto \frac{|A|^2}{r_i^2}$ . Hay una distribución espacial de intensidad sobre la pantalla de observación, pues la intensidad sólo depende de su distancia a cada una de las fuentes puntuales. A esta distribución espacial de la energía la llamaremos *figura interferencial*.

### 9.3.4. Estudio de la figura interferencial

La diferencia de fases  $k(r_2 - r_1)$  es, esencialmente, una diferencia de camino óptico:

$$\frac{2\pi}{\lambda} n (r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{L}(O \rightarrow o_2 \rightarrow P) - \mathcal{L}(O \rightarrow o_1 \rightarrow P))$$



donde  $\mathcal{L}$  es el funcional *camino óptico*. La diferencia de fases se puede escribir en función del tiempo que tarda en llegar a la pantalla lo que ha sido emitido simultáneamente. En efecto, utilizando el hecho de que  $v_f = \frac{c}{n}$

$$k(r_2 - r_1) = \frac{\omega}{c}n(r_2 - r_1) = \omega(\tau_2 - \tau_1)$$

Para estudiar el aspecto de la figura interferencial es conveniente hacer dos hipótesis y dos aproximaciones:

1. (hipótesis) Las aberturas tienen que estar próximas entre sí, y el punto  $P$  debe estar próximo al eje óptico si queremos que el retardo entre las dos ondas no sea tan grande que se destruya la interferencia. Estas hipótesis se traducen en

$$\begin{aligned} d &\ll D \\ x, y &\ll D \end{aligned}$$

2. (aproximaciones) Recordemos que  $r_1, r_2$  aparece en dos sitios con un papel muy diferente: en las intensidades  $I_1, I_2$  la dependencia es muy suave, mientras que en la fase la dependencia es acusada, por ser  $k$  muy grande para la luz visible.

- a) Tomaremos como aproximación para fuera de la función trigonométrica

$$r_1 \simeq r_2 \simeq D$$

lo que implica que  $I_1 \simeq I_2 \simeq I_0$ .

- b) Usaremos un orden de aproximación mayor para el argumento del coseno

$$\begin{aligned} r_1 &= D\sqrt{1 + \frac{y^2 + (x - \frac{d}{2})^2}{D^2}} \\ &\simeq D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{d^2}{4} - xd}{2D} \end{aligned}$$

análogamente para

$$r_2 \simeq D + \frac{y^2 + x^2 + \frac{d^2}{4} + xd}{2D}$$

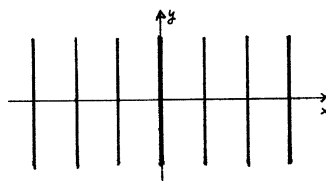
con lo que

$$r_2 - r_1 = \frac{xd}{D}$$

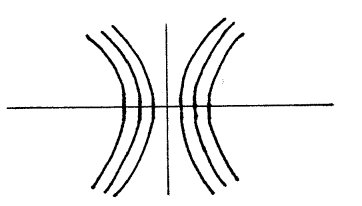
Si el interferómetro se encuentra en el vacío  $n = 1$  y finalmente la expresión para la interferencia resulta

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} \right) \right)$$

para caracterizar la figura es interesante localizar los máximos y mínimos de intensidad.



**Figura 9.6:** En la zona central de la pantalla de observación los máximos son líneas verticales paralelas con separación de  $\frac{\lambda D}{d}$ .



**Figura 9.7:** Las rectas devienen hipérbolas si consideramos una zona mayor de la pantalla de observación.

- Máximos:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} = 2\pi M$$

con  $M \in \mathcal{Z}$ . Al valor de  $M$  se le llama *orden del máximo* correspondiente. La coordenada del máximo de orden  $M$  es

$$x_M = M \frac{\lambda D}{d}$$

y se cumple  $I_{max} = 4I_0$ .

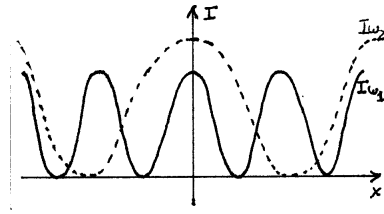
- Mínimos:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} = (2m + 1) \pi$$

con  $m \in \mathcal{Z}$  e  $I_{min} = 0$ .

### Observaciones

- Recordemos que esto sólo vale para  $d$  pequeñas y zonas próximas al eje  $z$  (véase la figura 9.7).
- La posición de los máximos depende de la longitud de onda, por lo que sabiendo las dimensiones del dispositivo se pueden medir longitudes de onda de modo preciso. Recíprocamente, la interferencia puede servir para medir la separación entre dos fuentes puntuales si se conoce la longitud de onda con que emiten.



**Figura 9.8:** Distribución de intensidad para luz monocromática de ,  $I_{\omega_1}(x)$  e  $I_{\omega_2}(x)$ , con  $I_{\omega_1}(x) \neq I_{\omega_2}(x)$ .

**Visibilidad** se define la visibilidad de una figura de interferencia como

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

se calcula midiendo la intensidad en un máximo y en su mínimo adyacente.

- $V = 1$  ocurre siempre que  $I_1 = I_2$  ( $I_{min} = 0$ ).
- $V = 0$  corresponde a la mínima visibilidad, y ocurre cuando  $I_{max} = I_{min}$  (no hay interferencia).

En el ejemplo que hemos tratado hemos obtenido  $V = 1$  porque hemos utilizado dos ondas estrictamente armónicas. Vamos a ver que si consideramos ondas no monocromáticas la visibilidad desciende.

### 9.3.5. Luz no monocromática

Las ondas de dos fuentes de frecuencias lo suficientemente distintas no interfieren entre sí, porque el término interferencial depende del tiempo y desaparece en el promedio temporal. Lo que se obtiene es, pues,

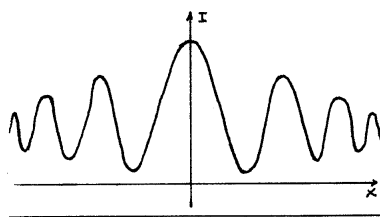
$$I = \int d\omega I_\omega$$

La figura interferencial depende muy marcadamente de la longitud de onda (de la frecuencia). Es verdad que el máximo de orden cero  $M = 0$  no se desplaza cuando cambiamos de frecuencia, pero todos los demás sí lo hacen, por lo que la visibilidad con luz no monocromática debe ser definida localmente: la visibilidad en la zona central de la pantalla es próxima a 1, mientras que a partir de cierta distancia (cierto retardo) la visibilidad es casi nula.

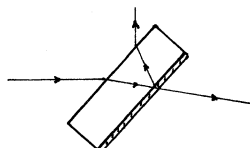
El resultado obtenido tiene sentido, porque el tiempo de coherencia es inversamente proporcional a las frecuencias contenidas en la luz

$$\delta t \propto \frac{1}{\Delta\omega}$$

pero como  $x$  es, en último término, diferencia de tiempos, los puntos alejados del origen tienen retardos  $\tau > \delta t$  que no permiten la interferencia. Si la luz contiene muchas frecuencias, el decaimiento será más rápido a partir del punto central.



**Figura 9.9:** Suma de las distribuciones de intensidad  $I_{\omega_1}$  y  $I_{\omega_2}$ .



**Figura 9.10:** divisor de haz al 50 %

## 9.4. División de amplitud (Michelson)

### 9.4.1. Principio de funcionamiento

Si hacemos incidir una onda sobre una discontinuidad de índice sabemos que se va a dividir en dos: una reflejada y otra transmitida. Esas ondas son coherentes entre sí, y pueden interferir. Para obtener la interferencia no hace falta más que recombinarlas. Éste es el principio de todos los interferómetros por división de amplitud. Una pieza clave de estos dispositivos es el *divisor de haz*. Un divisor de haz de vidrio tiene una reflectividad baja comparada con la transmitividad, por lo que la visibilidad es pobre. Para contrarrestar este efecto se le pega una lámina muy delgada ( $\simeq 2 \text{ nm}$ ) de un medio absorbente. Si logramos nuestro objetivo tendremos

$$|\mathcal{R}| \simeq |\mathcal{T}|$$

(un divisor de haz al 50 %).

En estos dispositivos se prescinde de considerar la reflexión en el vidrio, pues es comparativamente muy débil. En realidad, la función más importante del vidrio es servir de soporte a la lámina metálica.

Este tipo de interferencia es responsable de los colores en las pompas de jabón o de las láminas de aceite estiradas por la lluvia. En ambos casos, interfieren las dos ondas reflejadas, una en cada cara de la pompa o lámina. Como la luz de la vida diaria es blanca<sup>2</sup>, el tiempo de coherencia es extraordinariamente corto, y los espesores de pompas o láminas de aceite tienen que ser verdaderamente *muy* pequeños.

<sup>2</sup>las lámparas de sodio de la iluminación urbana nocturna son de alta presión, por lo que también tienen un espectro continuo y ancho.

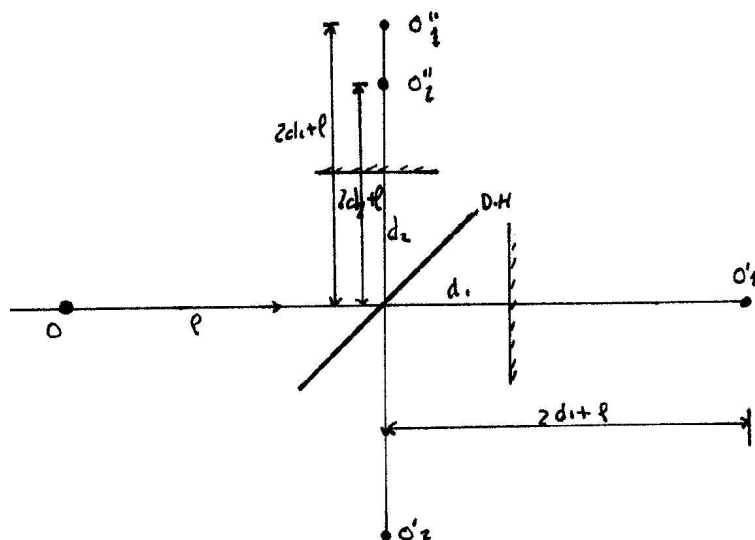


Figura 9.11: Dispositivo interferencial de Michelson.

### 9.4.2. El interferómetro de Michelson

Las ondas interfieren en dos lugares, pero generalmente no se observa la interferencia que se produce en las inmediaciones de la fuente (por cuestión de comodidad).

En el dispositivo se utiliza una *lámina compensadora* para que la luz que va por el brazo vertical (que pasa tres veces por el vidrio) no tenga un exceso de camino óptico respecto a la que pasa por el brazo horizontal (que sólo pasa una vez por el vidrio). La citada lámina es en todo equivalente a la que sirve de apoyo a la capa de metal. Esto hace que podamos eliminar definitivamente el vidrio del modelo de funcionamiento.

### 9.4.3. Sustitución de todo el interferómetro por dos imágenes

Si miramos desde la pantalla de observación, veremos dos imágenes de la fuente. Todo el montaje se hace equivalente a dos fuentes idénticas –coherentes– separadas (que es lo que necesitamos para observar interferencia). Estas imágenes están sobre la misma línea, una a una distancia aparente del centro del divisor de haz  $2d_1 + l$  y otra a distancia  $2d_2 + l$ . La distancia que separa a estas fuentes coherentes es  $2(d_1 - d_2) = 2d$ .

Al ser fuentes puntuales podemos suponer que emiten ondas esféricas, y sólo queda resolver el problema del interferómetro de YOUNG con una geometría ligeramente diferente.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k(r_2 - r_1) + \delta)$$

Hemos añadido una fase extra  $\delta$  para dar cuenta de las reflexiones que se produzcan en el divisor de haz, que es un medio absorbente. Si el divisor de haz es al 50 % se cumple  $I_1 \simeq I_2$ .

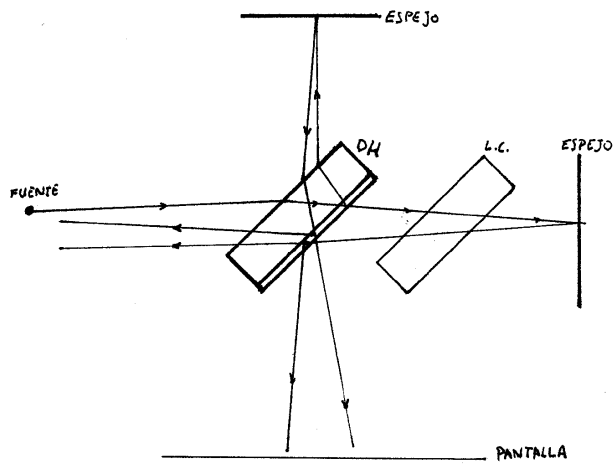


Figura 9.12: Imágenes formadas por el Michelson. El origen es el centro del divisor de haz.

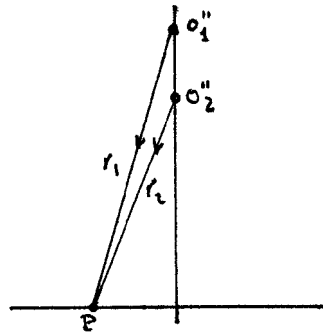
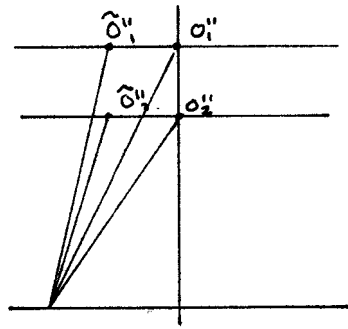


Figura 9.13: Problema de la interferencia de dos fuentes puntuales  $o_1''$  y  $o_2''$  alineadas sobre una recta perpendicular a la pantalla.  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias respectivas al punto de observación  $P$ .



**Figura 9.14:** Imágenes extensas debidas al uso del dispositivo con una fuente extensa.

### Figura de interferencia

Como el sistema tiene simetría de revolución alrededor de la recta que une las dos imágenes, según el principio de CURIE (“los efectos tienen las simetrías de las causas”), pensamos que la figura de interferencia será una serie de anillos concéntricos, alternativamente claros y oscuros. Nosotros no vamos a precisar más su aspecto, aunque no es especialmente difícil hacerlo.

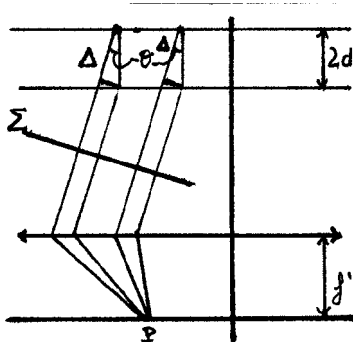
### Fuentes extensas

Nos interesa saber cómo es la figura cuando la fuente está constituida por una infinidad de puntos incoherentes entre sí. El interés de este caso radica en la intensidad extra que las fuentes extensas proporcionan y que hace el fenómeno verdaderamente observable.

El interferómetro opera como hemos descrito, creando dos imágenes de la fuente original coherentes entre sí. Todos los puntos de la fuente dan lugar a dos imágenes. Cada pareja de estas dará lugar a su sistema de anillos, sin que haya interferencias cruzadas (de la imagen de un punto con la de otro). El problema es que los infinitos sistemas de anillos no coinciden entre sí: el camino óptico  $r_2 - r_1$  para una pareja y  $\hat{r}_2 - \hat{r}_1$  para otra son distintos. Eso destruye la interferencia, puesto que habrá una mezcla espacial de las figuras interferenciales. La pérdida de visibilidad será tanto más notable cuanto más extensa sea la fuente.

Hay un caso, empero, en el que no se produce pérdida de visibilidad. En efecto, si llevamos la pantalla a una distancia infinita (en la práctica, colocando la pantalla en el plano focal imagen de una lente convergente<sup>3</sup>), las diferencias de fase son las mismas para todas las parejas de puntos imagen. Veamos por qué. Si consideramos el plano  $\Sigma$ , perpendicular al haz paralelo proveniente de las imágenes extensas, podemos convencernos de que  $\Sigma \rightarrow P$  es el mismo camino óptico para todas las ondas. Teniendo en cuenta las cantidades  $\Delta$  y  $\theta$  la diferencia de camino óptico es  $n\Delta$  para ambas parejas de

<sup>3</sup>Cuando se hace el montaje experimental, mirar directamente a las imágenes-fuente extensas equivale a introducir una lente convergente, pues el ojo relajado (sin acomodación) hace perfectamente esta función.



**Figura 9.15:** Dispositivo interferencial mejorado utilizando una lente delgada.

imágenes-fuente.  $\Delta = 2d \cos \theta$ , por lo que la diferencia de fase vale

$$\frac{2\pi}{\lambda} n \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta$$

si el divisor de haz es al 50% las intensidades tendrán la distribución

$$I(\theta) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta + \delta \right) \right)$$

Los puntos de observación en la pantalla están parametrizados por el ángulo  $\theta$  (tenemos anillos centrados en el foco de la lente). La condición de máximo es

$$\left( \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta + \delta \right) = 2\pi M$$

donde  $M \in \mathcal{Z}$  es el *orden del máximo*. La utilidad de estos fenómenos es la determinación de longitudes (de onda, o distancias entre las imágenes, que son, en definitiva, distancias entre los espejos). Son así de precisos en razón de la fuerte dependencia de la figura interferencial en función de dichas longitudes. Lo mismo se puede decir respecto al índice de refracción.

#### 9.4.4. Michelson con luz blanca

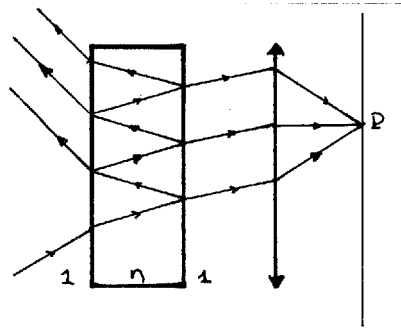
Como el tiempo de coherencia es muy pequeño en virtud de la gran gama de frecuencias presente en la luz blanca, se necesita que ambos brazos tengan una diferencia de longitud del orden de la micra (imágenes superpuestas: *contacto óptico*). Lo que se ve es una figura de anillos coloreada, con pocos órdenes, puesto que los máximos para los diferentes colores no son coincidentes más que en el punto central.

### 9.5. Reflexiones múltiples (Fabry-Perot)

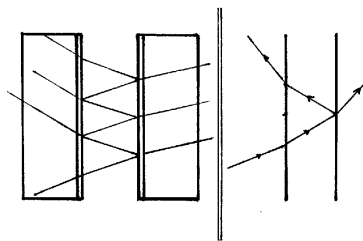
Siempre que superpongamos dos ondas la distribución de intensidad tendrá la forma

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$





**Figura 9.16:** Inteferencias en una lámina delgada de índice  $n$ .



**Figura 9.17:** Dispositivo real (izquierda) y dispositivo esquemático para el cálculo (derecha).

¿Y si superponemos una multitud de ondas en lugar de sólo dos?. No es difícil: podemos valernos de fenómenos de reflexión-refracción. Estamos haciendo una división de amplitud iterativa. Para obtener interferencia no hay más que reunir las ondas coherentes creadas. Si la fuente es puntual, basta utilizar una lente convergente para reunir las ondas en un punto del plano focal imagen. Si la fuente es extensa, las ondas planas interfieren automáticamente.

El vidrio no es una buena elección como material (el coeficiente de reflexión es muy pequeño, por lo que sólo la primera onda transmitida es suficientemente intensa, y la visibilidad es mala cuando se suman ondas de amplitudes muy dispares). Podemos o bien incidir de forma rasante, o bien introducir medios absorbentes, que es la idea que subyace al interferómetro de FABRY-PEROT.

Disponemos dos espejos enfrentados entre sí, de material metálico y muy delgados para que haya suficiente transmisión. Habitualmente estas láminas van montadas sobre láminas de vidrio. Como las reflexiones en el vidrio son pequeñas, en lo que sigue sólo consideraremos las láminas metálicas, esquematizando el dispositivo como se ve en la figura 9.17. Si los coeficientes de reflexión son  $r_1$  y  $r_2$  y los de transmisión  $t_1$  y  $t_2$ , la primera onda incidente sobre la pantalla es

$$t_1 t_2 A$$

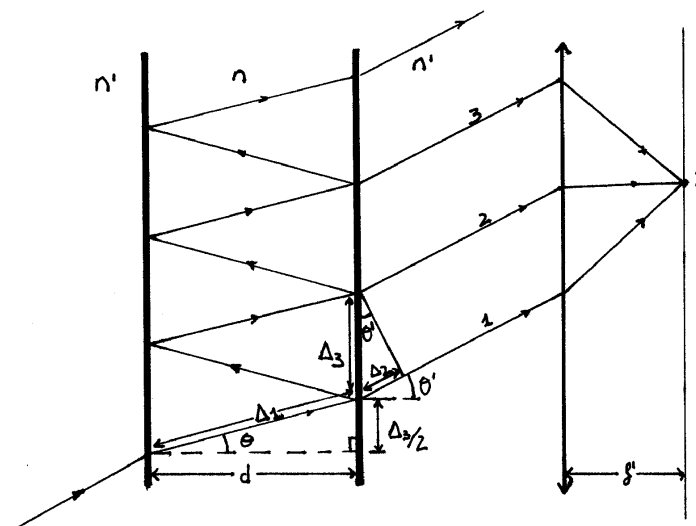


Figura 9.18: Diagrama de los rayos

la segunda onda es

$$t_1 t_2 r_1 r_2 A e^{i\phi}$$

La diferencia de fase es

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (2n\Delta_1 - n'\Delta_2)$$

( $2n\Delta_1$  es el camino óptico dentro del interferómetro). En términos de constantes del problema

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{d}{\cos \theta} \\ \Delta_2 &= \Delta_3 \sin \theta' \\ \Delta_3 &= 2\Delta_1 \sin \theta \end{aligned}$$

o

$$\Delta_2 = 2 \frac{d}{\cos \theta} \sin \theta \sin \theta'$$

Como en cualquiera de las superficies paralelas a los espejos, dentro y fuera se deben verificar las condiciones de contorno (la proyección del vector de ondas se conserva)

$$\frac{\omega}{c} n \sin \theta = \dots = \frac{\omega}{c} n' \sin \theta'$$

es decir, la ley de SNELL:  $n' \sin \theta' = n \sin \theta$ . Finalmente

$$\Delta_2 = 2 \frac{d}{\cos \theta} \frac{n}{n'} \sin^2 \theta$$

y la diferencia de fase, al sustituir  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  vale

$$\phi = \dots = \frac{2\pi}{\lambda} 2nd \cos \theta$$

expresada en términos del índice de refracción del interferómetro, el ángulo de incidencia y la distancia entre los espejos. Obsérvese que es la misma expresión que la del interferómetro de MICHELSON.

Para las ondas sucesivas no hay más que aprovechar estos resultados. Por ejemplo, para la tercera,

$$t_1 t_2 (r_1 r_2)^2 A e^{i2\phi}$$

De modo que la amplitud total debe ser una suma

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{m=0}^{\infty} t_1 t_2 (r_1 r_2)^m e^{im\phi} A \\ &= \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{i\phi}} A \end{aligned}$$

(es una serie geométrica). Pero estamos interesados en la intensidad emergente  $I' \propto |A'|^2$ . Para hacerlo escribimos el número complejo

$$r_1 r_2 = |r_1 r_2| e^{i2\delta}$$

Como  $I' = \mathcal{T} I$

$$\mathcal{T} = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{I'}{I} = \frac{\mathcal{T}_{max}}{1 + F \sin^2 \varphi}$$

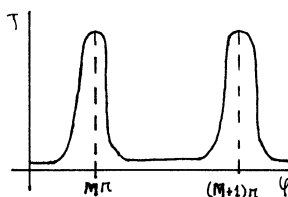
donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{max} &= \frac{|t_1 t_2|^2}{(1 - |r_1 r_2|)^2} \\ F &= \left( \frac{2\sqrt{|r_1 r_2|}}{1 - |r_1 r_2|} \right)^2 \end{aligned}$$

son parámetros que sólo dependen del interferómetro, y

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\phi}{2} + \delta = \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} nd \cos \theta + \delta \end{aligned}$$

es la fase.



**Figura 9.19:** Función  $\mathcal{T}(\varphi)$

### 9.5.1. Conclusiones

Tanto  $\mathcal{T}_{max}$  como  $F$  son constantes. La variable de la transmitancia  $\mathcal{T}$  es  $\varphi$ , y el aspecto de esa función  $\mathcal{T}(\varphi)$  es el que se muestra en la figura 9.19. Los máximos corresponden a  $\sin \varphi = 0$ , lo que conduce a

$$\frac{2\pi}{\lambda}nd \cos \theta + \delta = M\pi$$

$I'_{max} = \mathcal{T}_{max}I$ . El orden del máximo viene dado por  $M \in \mathcal{Z}$ . Los mínimos se producirán cuando  $\sin \varphi = \pm 1$  o

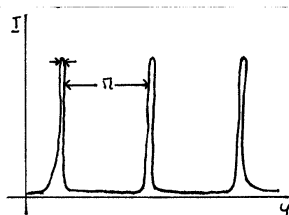
$$\frac{2\pi}{\lambda}nd \cos \theta + \delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

la intensidad en los mínimos vale  $I'_{min} = \mathcal{T}_{min}I$  donde  $\mathcal{T}_{min} = \frac{\mathcal{T}_{max}}{1+F}$ . La visibilidad es

$$V = \frac{I'_{max} - I'_{min}}{I'_{max} + I'_{min}} = \frac{F}{2 + F} = \frac{2|r_1r_2|}{1 + |r_1r_2|^2}$$

la visibilidad no es uno de partida, lo que quiere decir que los mínimos no lo son con intensidad cero.

- Si lo que incide sobre el interferómetro es una onda plana de amplitud  $A$ , a la salida tendremos una única onda plana de amplitud  $A'$ . En el plano focal imagen esa onda plana converge a un punto.
- Si lo que incide es un rayo, a la salida obtendremos un haz de rayos paralelos, que forman un punto sobre el plano focal imagen. El punto tendrá mayor o menor intensidad dependiendo de la diferencia de fase  $\varphi$ .
- Si lo que incide sobre el interferómetro es luz proveniente de una fuente puntual monocromática (emisor de una infinidad de rayos en distintas direcciones), muchos rayos de la fuente producirán puntos distintos sobre el plano focal imagen, lo que dará lugar a una determinada distribución de intensidad. Geométricamente, la intensidad sólo depende del ángulo  $\theta$ . Es decir, que todo tiene simetría bajo rotaciones en torno a la normal a los espejos. Podemos esperar pues que se visualice un sistema de anillos centrado en el foco imagen del sistema,  $F'$ .



**Figura 9.20:** Intensidad en la pantalla debida a un emisor puntual.

- Si la fuente es extensa, obtendremos la misma figura de interferencia por cada punto emisor de la fuente extensa, por lo que la única diferencia respecto al caso anterior es que se reforzará la intensidad. La visibilidad, como en el MICHELSON, se mantiene.

### 9.5.2. Tratamiento cuantitativo de la distribución de intensidad

Si estamos interesados en interferencia estamos interesados en maximizar la visibilidad. Según la expresión hallada,  $V \rightarrow 1$  cuando  $F \gg 1$ .  $F$  depende de los coeficientes de reflexión de las láminas metálicas. La condición que hemos exigido es equivalente a

$$|r_1 r_2| \rightarrow 1$$

Este interferómetro se diferencia de los otros en que la onda producida es suma de un número infinito de ondas. Los interferómetros de YOUNG y MICHELSON daban lugar a una distribución de intensidad de la forma

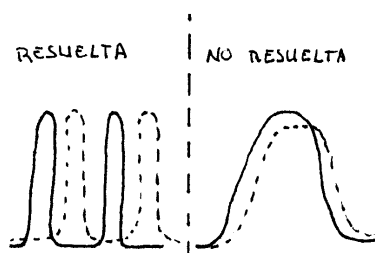
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi$$

La interferencia depende mediante un coseno de la diferencia de fases. Esto es así siempre que se hacen interferir *dos* ondas. Sin embargo, aquí la dependencia de la intensidad de la diferencia de fase es completamente diferente

$$I' = \frac{T_{max}}{1 + F \sin^2 \varphi} I$$

El interés de este interferómetro consiste en explotar su singularidad, que se expresa en la figura  $\mathcal{T}(\varphi)$ . Una forma de caracterizar esta distribución de intensidades es cuantificar la anchura de los picos. Esto se puede hacer, por ejemplo, identificando cuál es la anchura  $\delta\varphi$  a mitad de altura, es decir, a  $\frac{T_{max}}{2}$ . Observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left(m\pi + \frac{\delta\varphi}{2}\right) &= \frac{T_{max}}{2} \\ \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right)} &= \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{F}} \end{aligned}$$



**Figura 9.21:** Ilustración gráfica de lo que entendemos por *resolver* picos de interferencia distintos.

por lo que

$$\delta\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)$$

Como estamos interesados en  $F \gg 1$ , podemos hacer un desarrollo en serie de potencias

$$\delta\varphi \simeq \frac{2}{\sqrt{F}}$$

Cuanto mejor sea la visibilidad ( $F$  más alto) tanto más estrechos serán los picos.

**Ejemplo** Estudiar un interferómetro de FP construido con dos láminas metálicas de plata.

Para la plata,  $|r_1 r_2| \simeq 0.94$ . Con esto,  $F \simeq 10^3$ . La visibilidad es buena,  $V = 0.998$ . La anchura a mitad de altura es  $\delta\varphi \simeq 0.06$ . Como la plata es un medio absorbente, la transmitancia en el máximo no será la unidad; una parte será absorbida:  $T_{max} = 0.44$  (en el máximo tenemos la mitad de la intensidad incidente). Hay que subrayar que  $\delta\varphi$  es muy pequeño, ya que es, relativo a la separación entre picos,  $\frac{0.06}{3.14} \simeq 2\%$ . Esta figura interferencial y la producida por dos ondas son muy distintas.

### 9.5.3. Aplicaciones

El interés de este interferómetro está en que la obtención de picos estrechos significa mucha sensibilidad. Variaciones de fase muy pequeñas producen variaciones de intensidad notables. Estas variaciones de fase pueden venir de un cambio de la distancia entre los espejos o en el índice de refracción en el interior del interferómetro o en la longitud de onda de la fuente<sup>4</sup>. Todo ello se puede medir con precisión usando un FP.

La capacidad del instrumento de discriminar longitudes de onda distintas se denomina *poder resolutivo*. El interferómetro puede resolver o discriminar dos longitudes de onda, o ser insuficiente para la tarea. El poder resolutivo dependerá de la separación entre máximos  $\Delta\varphi$  y de la anchura a media altura de estos,  $\delta\varphi$ . Se suele utilizar un criterio para distinguir las dos situaciones: las longitudes de onda se resuelven si  $\Delta\varphi \geq \delta\varphi$  y no se resuelven si  $\Delta\varphi < \delta\varphi$ .

<sup>4</sup>con luz policromática veríamos interferencia coloreada: anillos de colores no superpuestos.

Si consideramos dos longitudes de onda extraordinariamente próximas,  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  y  $\Delta\lambda \ll \lambda, \lambda'$

$$\Delta\varphi = 2\pi nd \cos\theta \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \geq \frac{2}{\sqrt{F}}$$

Esta expresión nos dará eventualmente la mínima diferencia de longitud de onda que podemos resolver. Manipulamos la expresión bajo la hipótesis de que estamos trabajando en el entorno de un máximo, situación para la que se cumple  $\frac{2\pi}{\lambda} nd \cos\theta + \delta = M\pi$ . Normalmente,  $M \gg 1$ , lo que permite despejar

$$2\pi dn \cos\theta = M\pi\lambda$$

y expresar la condición como

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq \frac{\pi}{2} M \sqrt{F}$$

donde el segundo miembro es una característica del aparato y la forma en que lo utilizamos: su poder resolutivo.

El que el poder resolutivo fuera proporcional a  $F$  era de esperar. En cuanto a  $M$ , el orden interferencial, no depende del aparato, sino de las condiciones en las que lo hacemos operar.

**Ejemplo** Calcular el poder resolutivo de un FP que cumple que  $nd \simeq 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda \simeq 500 \text{ nm}$  y que la incidencia es normal,  $\theta = 0$ . Para simplificar aún más,  $\delta = 0$ .

El orden interferencial resulta, de la condición de máximo,  $M = \frac{2}{\lambda} nd \simeq 4 \times 10^4$ . Los espejos son tales que  $F = 10^3$ . Con todo esto el poder resolutivo vale  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq 2 \times 10^6$ . Para una separación entre espejos de  $1 \text{ cm}$  ya estamos con órdenes de interferencia de 40.000, lo que justifica la hipótesis de  $M \gg 1$ . Además, nos interesa un  $M$  alto para incrementar el poder resolutivo. El poder resolutivo hallado quiere decir que el interferómetro es capaz de resolver dos longitudes de onda de una parte en un millón. Este interferómetro discrimina dos longitudes de onda que se diferencien en  $\Delta\lambda \geq 2 \times 10^{-3} \text{ \AA}$ .





# 10 Difracción

## 10.1. Definición

**Difracción** Es la desviación de la propagación de la luz de lo predicho por la óptica geométrica.

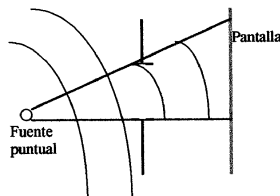
La onda, tras su paso por la abertura, no queda cortada como establece la OG, sino que se propaga de otra manera. Vamos a escribir explícitamente la forma de esta propagación<sup>1</sup>.

## 10.2. Principio de Huygens-Fresnel

Los puntos en el interior de la abertura  $\Sigma$  se denotan  $P \in \Sigma$  y el de la pantalla de observación,  $P_0$ .  $\mathbf{r}$  denota el vector que une un punto cualquiera de la abertura con cierto punto de la pantalla,  $|\mathbf{r}| = r$ . El principio de HUYGENS-FRESNEL es

$$\hat{u}(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} u(P) \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r} ds \quad (10.1)$$

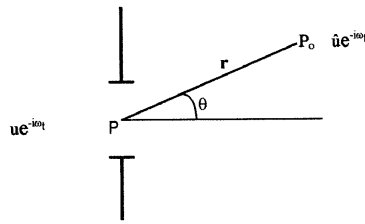
“el campo después de la abertura es una superposición (interferencia) de ondas esféricas (coherentes entre sí) procedentes de cada punto en el interior de la abertura”<sup>2</sup>.



**Figura 10.1:** Comparación entre predicción de la OG y el resultado experimental.

<sup>1</sup>se demuestra en la mayoría de los textos utilizando la ecuación de ondas y el teorema de GREEN (teoría de KIRCHHOFF o teoría de RAYLEIGH-SOMMERFELD). Otra forma de resolverlo es considerar que sabemos cómo es la onda en el plano de la abertura y descomponerla en ondas planas, para, seguidamente, propagarlas hasta la pantalla. Este método, quizá más intuitivo, es el que desarrollan MANDEL y WOLF en *Coherence and quantum optics* (sección 3.2).

<sup>2</sup>Nos centraremos en caracterizar las variaciones espaciales del campo y prescindiremos de incluir la dependencia temporal pues basta con multiplicar por  $e^{-i\omega t}$  en ambos miembros (las onda incidente y difractada tienen ambas la misma frecuencia).



**Figura 10.2:** Esquema de la solución al problema planteado



**Figura 10.3:** Aberturas complementarias.

Estudiar la difracción no es entonces más que investigar cómo es el resultado de esta superposición<sup>3</sup>. La solución que hemos escrito es una aproximación porque

1. La descripción es escalar.
2. El valor de la onda bajo la integral es el de la onda incidente, como si no fuera perturbado por la abertura. Condiciones de validez:
  - a) Tamaño: cuanto mayor sea la abertura, mejor funciona la aproximación.
  - b) Observación: no debemos observar muy cerca de la abertura.

### 10.3. Principio de Babinet

La difracción también se puede observar no haciendo pasar la luz por una abertura, sino interponiendo un obstáculo en su propagación. El ppo de BABINET relaciona la onda difractada por una abertura con la onda difractada por un obstáculo de la misma forma (*aberturas complementarias*). Si sabemos cómo es la onda difractada por la abertura sabemos cómo es la onda difractada por el obstáculo. Aplicando la fórmula 10.1 al

<sup>3</sup>Algunos textos afirman que llamamos interferencia a la suma de un conjunto discreto de ondas y difracción a la superposición de un continuo de ellas.

obstáculo, y llamando a la onda por él difractada  $\hat{u}'$

$$\begin{aligned}\hat{u}'(P_0) &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^2 - \Sigma} u(P) \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r} ds \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} u(P) \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r} ds \\ &\quad - \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} u(P) \cos \theta \frac{e^{ikr}}{r} ds\end{aligned}$$

El campo resultante es la onda incidente (primer término) menos el campo difractado por la abertura,  $\hat{u}(P_0)$ . El principio de BABINET (que se puede escribir como teorema) es entonces

$$\begin{aligned}\hat{u}(P_0) + \hat{u}'(P_0) &= u(P_0) \\ \text{o.dif.abert} + \text{o.dif.obj} &= \text{o.incidente}\end{aligned}$$

Esto nos permite limitarnos a estudiar aberturas y olvidar los obstáculos.

## 10.4. Aproximaciones de Fresnel y Fraunhofer

La fórmula de la difracción se podría escribir con una integral a todo el espacio si utilizamos  $u_{dp}(P) = t(P)u(P)$  (el campo incidente *después* de la pantalla) en lugar de  $u(P)$ ). Esto nos permite generalizar las aberturas, introduciendo un coeficiente de transmisión, del siguiente modo

$$\hat{u}(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \int t(P) u(P) \cos(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} ds$$

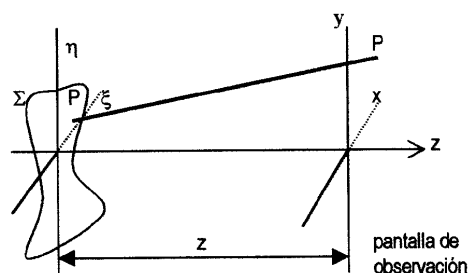
el coeficiente  $t$  puede ser incluso un número complejo, que además de cambiar la amplitud de la onda modifique su fase. Las aberturas que estábamos tratando antes eran todas del tipo simplificado: “coeficiente de transmisión 1 en cierta región y 0 en su complementaria”.

A la hora de calcular el uso de la última fórmula es un poco engorroso. En la mayor parte de los problemas se pueden hacer aproximaciones, como la de FRESNEL y la de FRAUNHOFER.

### 10.4.1. Fresnel

Parametrizamos el plano de la abertura y el de observación por coordenadas cartesianas; respectivamente  $(\xi, \eta)$  y  $(x, y)$ . Ambos son paralelos y están separados por una distancia  $z$ . El primero contiene a  $\Sigma$  y el segundo a  $P_0$ . El origen de coordenadas  $z$  lo establecemos en el centro de la abertura.

La difracción en el visible es un fenómeno débil. La luz emergente no será muy diferente de la incidente sobre la abertura. Si iluminamos ésta de forma normal, la luz emergente será aproximadamente normal. Consideraremos aberturas pequeñas  $(\xi, \eta)$  pequeñas) y



**Figura 10.4:** Aproximación de Fresnel.

puntos de observación próximos al eje  $z$ . Esta *aproximación paraxial* se puede concretar en

$$|x - \xi|, |y - \eta| \ll z$$

(que quiere decir también que observamos lejos de la abertura), y permite aproximar en serie la  $r$  que aparece en la fórmula:

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$$

Utilizaremos dos niveles de aproximación

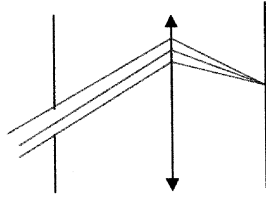
- Para  $\cos \theta = \frac{z}{r}$  y el denominador de  $\frac{e^{ikr}}{r}$  utilizaremos  $r \simeq z$ .
- En la fase de  $e^{ikr}$  necesitamos algo más fino, pues  $r$  va multiplicado por un número enorme,  $k$  y el resultado es muy sensible a las variaciones de fase (la amplitud puede ser una o su opuesta sólo por una diferencia de  $\pi$ ). Procediendo como en el interferómetro de YOUNG:

$$\begin{aligned} r &= z \sqrt{1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{z^2}} \\ &\simeq z + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \end{aligned}$$

Éste es el núcleo de la “aproximación paraxial” en difracción. La fórmula ahora toma el siguiente aspecto (*aproximación de FRESNEL*)

$$\hat{u}(P_0) \simeq \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)} d\xi d\eta$$

donde las variables aparecen en una exponencial cuadrática, lo que es mucho más manejable que los módulos de la fórmula no aproximada. Salvo en algún problema, tampoco utilizaremos esta fórmula, sino más bien la de FRAUNHOFER.



**Figura 10.5:** Uso de una lente convergente para entrar en la aproximación de FF.

### 10.4.2. Aproximación de Fraunhofer

#### Fundamento; Importancia práctica

La idea de FRAUNHOFER es desarrollar el exponente así

$$\frac{k}{2z} \left( (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right) = \frac{k}{2z} \left( x^2 + \xi^2 - 2\xi x + y^2 + \eta^2 - 2\eta y \right)$$

Es fácil librarse de  $x^2$  y de  $y^2$ , pues no hay que integrar sobre ellos. Más difícil es librarse de  $\xi^2$  y  $\eta^2$ , y la aproximación de FF consiste precisamente en decir que su contribución a la integral es pequeña. Dicho de otro modo

$$\begin{aligned} \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) &\ll 1 \\ z &\gg \frac{\pi}{\lambda} (\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

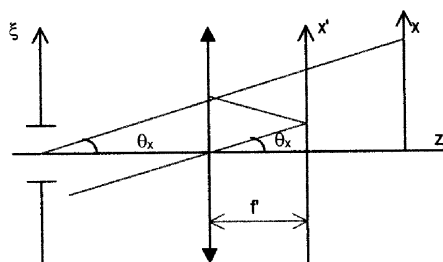
Básicamente esta aproximación consiste en observar desde un poco más lejos. Obtenemos así la fórmula de FRAUNHOFER:

$$\hat{u}(P_0) = \frac{e^{ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \int t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{z}(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$$

**Ejemplo** ¿Cuán lejos hay que irse si la abertura es de  $1\text{mm}$ , con luz visible para que valga la aproximación?

$\xi^2 + \eta^2 \sim 10^{-6}\text{m}^2$  y  $\lambda \sim 5 \times 10^{-7}\text{m}$  implica que  $z \gg 10\text{m}$ . Hay que alejarse bastante; teniendo en cuenta que la energía emitida por un punto se reparte por la superficie de una esfera (que crece con el radio al cuadrado), puede que a esa distancia *haya* difracción pero no podamos *verla*.

Hay una forma de satisfacer la condición de FF sin alejarse de la abertura. Consiste en irse al infinito utilizando una lente delgada convergente. Al poner en el camino de la luz una lente de este tipo, la luz que iría a parar a un  $P_0$  en el infinito va a concurrir, de hecho, sobre un punto cercano en el plano focal imagen de la lente. Ubicaremos la lente, por sencillez, paralela al plano que contiene la abertura.



**Figura 10.6:** Nuevo sistema de coordenadas.

Debemos modificar ligeramente la fórmula, pues las coordenadas de  $P_0$  cambiarán al moverse de un punto muy lejano al plano focal imagen. Ahora a las coordenadas sobre ese plano las llamaremos  $x', y'$ . Su relación con las anteriores se calcula con un poco de trigonometría

$$\begin{aligned}\tan \theta_x &= \frac{x}{z} \\ &= \frac{x'}{f'}\end{aligned}$$

de donde  $x' = \frac{x}{z} f'$  e  $y' = \frac{y}{z} f'$ .

Omitiendo la constante de proporcionalidad fuera de la integral, la integral que manejaremos será:

$$\hat{u}(x', y') \propto \int t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i \frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)} d\xi d\eta$$

ya sólo tenemos que aplicar la fórmula (válida en aproximación de FF y usando una lente delgada convergente).

### Principio de Babinet en aproximación de FF con iluminación por ondas planas

El principio de BABINET determina cómo se relacionan figuras de difracción producidas por aberturas complementarias.

$$\begin{aligned}\hat{u}(P_0) + \hat{u}'(P_0) &= u(P_0) \\ \text{o.dif.abert} + \text{o.dif.obj} &= \text{o.incidente}\end{aligned}$$

Vamos a ver cómo se escribe esta expresión cuando la onda que ilumina la abertura es plana y estamos trabajando en las condiciones de la aproximación de FRAUNHOFER.

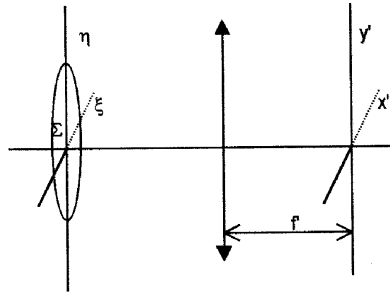
Una onda plana al atravesar una lente converge a un punto del plano focal imagen, que en la figura 10.7 se ha etiquetado como  $P_k$ . Por lo tanto, en aproximación de FRAUNHOFER

$$u(P_0) = 0$$

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 10.7:**  $P_0$  está en el plano focal imagen de una lente convergente.



**Figura 10.8:** Planteamiento geométrico del problema. Plano del orificio  $z = 0$ , radio de la abertura  $R$ .

en cualquier  $P_0 \neq P_k$ . El ppo de BABINET se escribe entonces  $\forall P_0 \neq P_k$  como

$$\hat{u}(P_0) + \hat{u}'(P_0) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} \hat{u}(P_0) &= -\hat{u}'(P_0) \\ I'(P_0) &= I(P_0) \end{aligned}$$

Es decir, que para dos aberturas complementarias

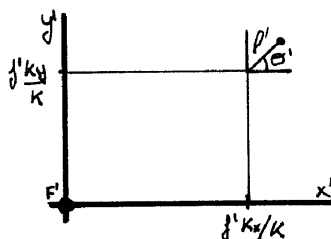
1. en régimen FRAUNHOFER
2. iluminadas por ondas planas

las figuras de difracción son iguales salvo en un punto.

## 10.5. Círculos...

### 10.5.1. Abertura circular

La abertura será iluminada por una onda plana. Trabajaremos en aproximación de FRAUNHOFER. Al enfrentar cualquier problema de este tipo tenemos que especificar



**Figura 10.9:** Coordenadas polares  $\rho', \theta'$  en el plano focal imagen. El origen está desplazado  $f' \frac{k_y}{k}$  en el eje  $y$  y  $f' \frac{k_x}{k}$  en el eje  $x$ .

1. Cómo es la abertura (función  $t(\xi, \eta)$ ). En este caso  $t(P) = 1 \forall P \in \Sigma$  y  $t(P) = 0 \forall P \notin \Sigma$ .
2. Cómo es la iluminación (función  $u(\xi, \eta)$ ). En este caso es una onda plana

$$u(\xi, \eta) = u_0 e^{i(k_x \xi + k_y \eta)}$$

con  $u_0$  constante (evaluado en  $z = 0$ ).

Este caso tan sencillo ilustrará el fenómeno de la difracción. Queremos saber cómo será la onda en el plano focal imagen. Recordemos que hemos tirado a la basura el factor temporal  $e^{i\omega t}$ , suponiendo tácitamente que está en todas partes pero ahorrándonos escribirlo.

Para resolver el problema sólo queda abordar la integral encontrando un buen sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \theta \\ \eta &= \rho \sin \theta\end{aligned}$$

También tomaremos polares (con respecto a un punto que no es el origen) en el plano focal imagen (ver figura 10.9)

$$\begin{aligned}x' &= f' \frac{k_x}{k} + \rho' \cos \theta' \\ y' &= f' \frac{k_y}{k} + \rho' \sin \theta'\end{aligned}$$

Tenemos dos exponenciales complejas (la de la iluminación y la del núcleo integral) que se pueden fundir como sigue

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_{\Sigma} u_0 e^{i\left(\left(k_x - k \frac{x'}{f'}\right)\xi + \left(k_y - k \frac{y'}{f'}\right)\eta\right)} d\xi d\eta$$



---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 10.10:**  $\frac{I(\rho')}{I(0)}$  en función de  $\frac{kR}{f'}\rho'$

la forma del exponente explica la elección de coordenadas para el plano focal imagen

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i\frac{k}{f'}\rho\rho'(\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta')}$$

el paréntesis es igual a  $\cos(\theta - \theta')$ , así que

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i\frac{k}{f'}\rho\rho'\cos(\theta-\theta')}$$

esta integral no va a depender de  $\theta'$  porque da lo mismo qué límites tenga la integral mientras abarque una circunferencia.

$$\hat{u}(x', y') \propto \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta u_0 e^{-i\frac{k}{f'}\rho\rho'\cos\theta}$$

La onda va a depender sólo de la variable  $\rho'$ . Estas integrales necesitan para su resolución de las funciones de BESSEL.

$$\hat{u}(\rho') \propto 2\pi \int_0^R \rho d\rho J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{f'}\right)$$

para llegar a la forma final tenemos aún que incluir otra función de BESSEL:

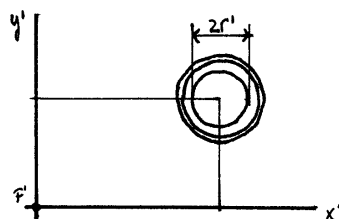
$$\hat{u}(\rho') \propto \frac{f'}{k\rho'} R J_1\left(\frac{kR\rho'}{f'}\right)$$

Normalmente estaremos más interesados en intensidades que en campos,

$$\begin{aligned} I(\rho') &\propto |\hat{u}(\rho')|^2 I(\rho') \\ &= I_0 \left( \frac{2J_1\left(\frac{kR}{f'}\rho'\right)}{\frac{kR}{f'}\rho'} \right)^2 \end{aligned}$$

donde  $I_0$  contiene todas las constantes que han ido apareciendo y algunas más que son necesarias.

La magnitud de los máximos decae en picado, por lo que basta con considerar el principal y, como mucho, los dos secundarios. La imagen en el plano focal se muestra en la figura. Centrado en el punto 0 de las polares especiales veríamos un círculo intenso y una serie de anillos concéntricos progresivamente más tenues en torno a él.



**Figura 10.11:** Aspecto en el plano focal imagen.

### Interpretación

1. La distribución de intensidad que aparece en el plano focal imagen es lo que llamamos difracción, puesto que lo que se vería, de ser válida la OG<sup>4</sup>, sería un punto allí donde realmente vemos una mancha rodeada por anillos. Dicho de otro modo, después de la abertura la OE nos dice que *no tenemos una onda plana*<sup>5</sup>, pues de ser así obtendríamos una imagen puntual.
2. El tamaño de la mancha central se puede calcular obteniendo el radio del máximo central (que concentra el 84 % de la luz). El radio del primer cero de la función de la figura es

$$\frac{2\pi R}{\lambda} r' = 1.220\pi$$

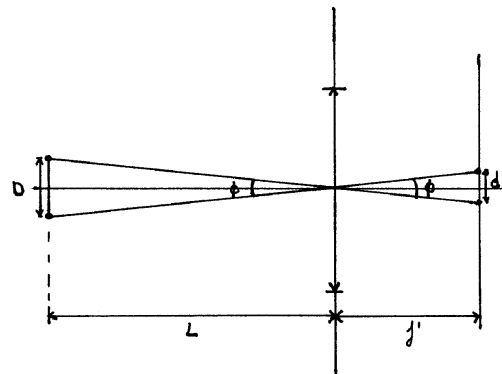
$$r' = 1.22 \frac{\lambda}{2R} f'$$

- a) La dependencia con  $f'$  es irrelevante (cuanto más lejos esté el plano, proporcionalmente más grande se proyecta la mancha).
- b) En cuanto a  $R$ , la mancha central es inversamente proporcional en tamaño a la abertura de la fuente (tampoco el  $R$  puede ser demasiado pequeño si queremos conservar la validez del principio de HUYGENS-FRESNEL). En la vida ordinaria no vemos los efectos de la difracción<sup>6</sup> porque la luz raramente encuentra aberturas lo suficientemente pequeñas.
- c) La mancha crece linealmente en tamaño con la longitud de onda. Si iluminamos con luz blanca, cada componente monocromática da lugar a una figura de difracción. La distribución de intensidad sería coloreada, porque las figuras de diversas  $\lambda$  no coinciden entre sí. Algunos textos plantean la óptica geométrica como el límite en que  $\lambda \rightarrow 0$  (cuando  $\lambda$  es tan pequeña que permite descartar la difracción para un orden de magnitud dado de tamaño de rendija).

<sup>4</sup>según la cual una abertura iluminada por un haz de rayos paralelos produce una imagen puntual tras pasar por la lente convergente.

<sup>5</sup>tal vez sea una *colección* de ondas planas, pero no *una* única.

<sup>6</sup>Las pequeñas manchas coloreadas que vemos al mirar al cielo en los alrededores del sol podrían estar causadas por la difracción de su luz en motas de polvo de las pestañas.



**Figura 10.12:** Llamaremos  $D$  la distancia mutua de los objetos puntuales,  $L$  a su distancia al instrumento,  $f'$  a la focal del sistema y  $d$  a la distancia entre las dos imágenes formadas.

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 10.13:** Puntos resueltos y no resueltos. Situación intermedia.

**Ejemplo** Para una onda monocromática de  $\lambda = 500nm$  ¿cuál es el tamaño de la mancha central de difracción causada por una abertura circular de  $R = 1mm$  tras pasar por una lente de  $f' = 10cm$ ?

La solución es  $R = 20\mu m$ . Se trata de un efecto relativamente pequeño.

### 10.5.2. Poder resolutivo de los instrumentos ópticos

La difracción limita la capacidad de los instrumentos ópticos de formar buenas imágenes. Vamos a tomar un par de puntos que consideraremos muy alejados de un sistema óptico formador de imagen que representaremos por una lente delgada convergente.

Éste es un problema de difracción de FF en la medida en que cualquier sistema óptico constituye un diafragma (=abertura) para la luz.

La luz proveniente de ambos objetos llegará en forma de onda plana a la abertura (circular), en la que se difractará. En el plano focal se formarán dos manchas de difracción. La imagen pierde calidad. Una forma de medir esta degradación debida a la difracción es usar el parámetro *poder resolutivo*.

Si las dos manchas-imagen solaparan, habría pérdida de información, pues sólo seríamos capaces de ver una imagen de dos objetos. El criterio es que las imágenes están

resueltas si distan entre sí más que el tamaño de la mancha central de difracción.

$$d \geq r'$$

y no lo estarán en otro caso. Dicho de otro modo

$$d \geq 1.22 \frac{\lambda}{2R} f'$$

o bien (por trigonometría),

$$\begin{aligned} \frac{d}{f'} &\geq 1.22 \frac{\lambda}{2R} \\ \frac{D}{L} &\geq 1.22 \frac{\lambda}{2R} \end{aligned}$$

Éste es un criterio de resolución *angular*. Sólo depende de la longitud de onda y del tamaño de la abertura. Pero no depende de la focal: no aumentamos el poder resolutivo con un instrumento que aumente más (*aumento vacío*). Esto significa que para mejorar el poder resolutivo debemos utilizar un telescopio más grande, o un microscopio de menor longitud de onda (por ejemplo, de electrones).

El poder resolutivo de un instrumento es pues su capacidad de distinguir objetos próximos. Para un instrumento compuesto hay que considerar esto de modo relativo, pues el primer diafragma destruirá las ondas planas y habrá que hacer cálculos extra para los siguientes.

## 10.6. Rectángulos...

Vamos a considerar el problema de una abertura rectangular iluminada por ondas planas en la aproximación de FRAUNHOFER y después particularizaremos para el caso importante de una rendija (una abertura rectangular de anchura despreciable).

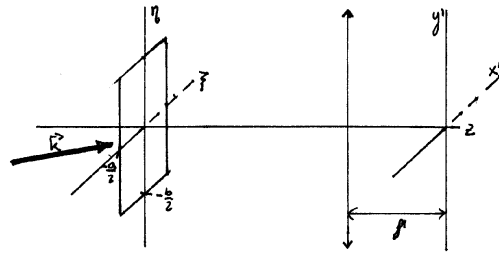
### 10.6.1. Abertura rectangular

La función de transmisión en el plano de las aberturas es  $t(\xi, \eta) = 1$  si  $\xi, \eta \in \Sigma$  y  $t(\xi, \eta) = 0$  para fuera de la rendija. La iluminación es una oap

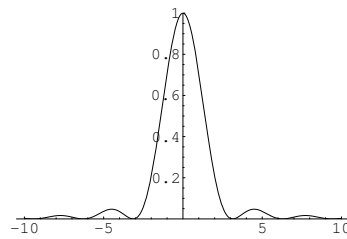
$$u = u_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} u(\xi, \eta) = u_0 e^{i(k_x \xi + k_y \eta)}$$

Sólo queda hacer la integral

$$\begin{aligned} \hat{u}(x', y') &\propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\xi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_0 e^{i(k_x \xi + k_y \eta)} e^{-i \frac{k}{f'} (x' \xi + y' \eta)} d\eta \\ &\propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i\xi \left( k_x - k \frac{x'}{f'} \right)} d\xi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{i\eta \left( k_y - k \frac{y'}{f'} \right)} d\eta \end{aligned}$$



**Figura 10.14:** Difracción por una abertura rectangular



**Figura 10.15:** Gráfico  $\text{sinc}^2(\phi)$ .

cuyo resultado es<sup>7</sup>

$$\hat{u}(x', y') \propto 4 \text{sinc} \left[ \left( k_x - k \frac{x'}{f'} \right) \frac{a}{2} \right] \times \text{sinc} \left[ \left( k_y - k \frac{y'}{f'} \right) \frac{b}{2} \right]$$

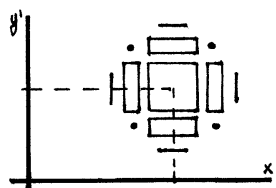
nos interesa la intensidad (proporcional al cuadrado del campo)

$$I(x', y') = I(0, 0) \text{sinc}^2 \left[ \left( k_x - k \frac{x'}{f'} \right) \frac{a}{2} \right] \\ \times \text{sinc}^2 \left[ \left( k_y - k \frac{y'}{f'} \right) \frac{b}{2} \right]$$

donde la constante  $I(0, 0)$  lleva todas las constantes omitidas en la integración. Para hacernos una idea de cómo es la distribución de intensidades, podemos ver la figura. Constatamos lo siguiente

- Es similar a la función de BESSEL  $J_1$  obtenida para la abertura circular.
- Veremos el primer máximo y, a lo mejor, el segundo, pero poco más, ya que la intensidad decrece rápidamente.
- La imagen que veremos en el plano focal imagen es como la de la figura. Podemos estimar el tamaño en función del tamaño del máximo central en cada una de las direcciones.

<sup>7</sup>recordemos que se define el seno cardinal del ángulo  $\phi$  como  $\text{sinc}(\phi) = \frac{\sin \phi}{\phi}$ .



**Figura 10.16:** Abertura rectangular: aspecto de la pantalla de observación.

- En la dirección  $x'$  las coordenadas  $x'_1$  del cero que limita al máximo central por la derecha y  $x'_{-1}$  del que lo limita por la izquierda son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(k_x - k \frac{x'_1}{f'}\right) \frac{a}{2} &= \pi \\ \left(k_x - k \frac{x'_{-1}}{f'}\right) \frac{a}{2} &= -\pi \end{aligned}$$

por lo que el tamaño del máximo central en la dirección  $x'$  resulta ser

$$\begin{aligned} \Delta x &= |x'_1 - x'_{-1}| \\ &= \frac{2f'\lambda}{a} \end{aligned}$$

- En la dirección  $y'$  los cálculos son análogos, y su resultado es

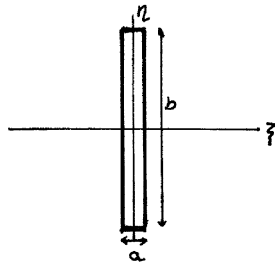
$$\Delta y = \frac{2f'\lambda}{b}$$

- Todo lo que es apartamiento de la óptica geométrica (es decir, de la imagen puntual) es lo que llamamos difracción.
- En cuanto al tamaño de la figura de difracción, crece linealmente con  $\lambda$  y es inversamente proporcional al tamaño de la abertura, al igual que sucedía para la abertura circular.

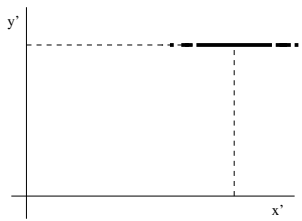
### 10.6.2. Rendija

Si una de las dimensiones de la abertura es muy grande comparada con la otra tenemos una rendija. Seguimos teniendo una abertura rectangular; por lo tanto la solución ya la hemos calculado. Sólo debemos introducir el hecho de que en una dirección es mucho mayor que en otra. Es lo mismo que hacer tender una de ellas a  $\infty$ :  $\beta \rightarrow \infty$ . En ese caso

- en el eje  $x$  la figura de difracción no cambia.
- $\Delta y \rightarrow 0$ : en el eje  $y$  todo se ve comprimido.



**Figura 10.17:** Una rendija:  $b \ll a$



**Figura 10.18:** Figura de difracción de una rendija vertical. Nótese que la intensidad se distribuye *horizontalmente*.

Como se puede ver en la figura 10.18, la intensidad se distribuye a lo largo del eje  $x$  según un patrón de difracción, puesto que la abertura es pequeña. Sin embargo, en el eje  $y$  no hay difracción, por lo que vale la óptica geométrica.

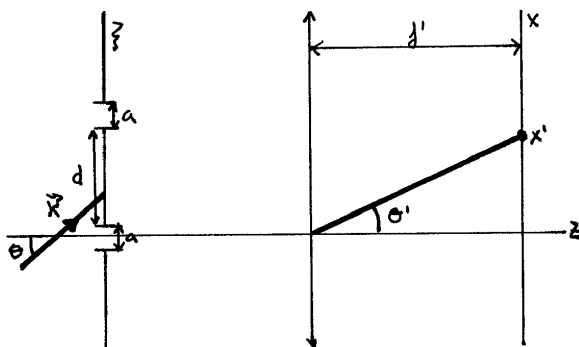
Es un problema unidimensional con

$$\begin{aligned} I(x') &= I(0) \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^2 \\ &= I(0) \operatorname{sinc}^2 \left[ \left( k \frac{x'}{f'} - kx \right) \frac{a}{2} \right] \end{aligned}$$

## 10.7. Doble rendija

Esto corresponde a retornar al interferómetro de YOUNG. Por sencillez, vamos a pensar que  $\mathbf{k}$  está en el plano  $\xi z$  por lo que  $k_y = 0$  y  $k_x = k \sin \theta$  (quitamos una dimensión al problema). Trabajaremos en la aproximación de FRAUNHOFER.

$$\hat{u}(x') \propto \int t(\xi) u(\xi) e^{-i \frac{k}{f'} x' \xi} d\xi$$



**Figura 10.19:** Doble rendija.  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  son las rendijas de altura  $a$  (separadas una distancia  $d$ ). Se iluminan por una oap que forma un ángulo  $\theta$  con el eje.  $\theta'$  es el ángulo que parametriza el punto de observación en el plano focal imagen ( $x'$ ).  $z = 0$  sobre el plano de las rendijas.

la función transmitancia es  $t(\xi) = 1$  si  $\xi \in \Sigma \cup \Sigma'$  y cero en otro caso. En cuanto a la iluminación (segundo dato necesario para usar las fórmulas de FF):

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= u_0 e^{ik_x \xi} \\ &= u_0 e^{ik \sin \theta \xi} \end{aligned}$$

En realidad tenemos dos integrales

$$\hat{u}(x') \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik \sin \theta \xi} e^{-i\frac{k}{f'} x' \xi} d\xi + \int_{d-\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} e^{ik \sin \theta \xi} e^{-i\frac{k}{f'} x' \xi} d\xi$$

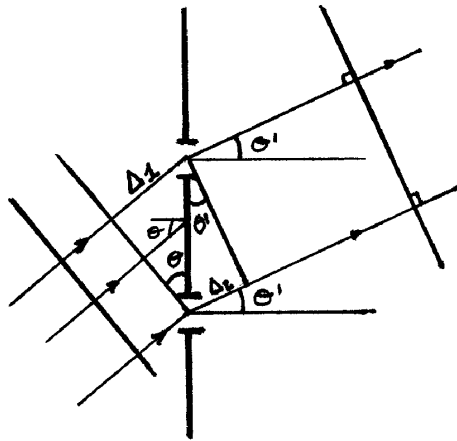
se pueden reorganizar los términos para extraer conclusiones interesantes. Para que las dos lleven el mismo dominio de integración cambiamos la variable muda en la segunda integral, de modo que el cálculo de una se reduzca al de otra. En efecto, si  $\xi' = \xi + d$  y operamos

$$\begin{aligned} \hat{u}(x') &\propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik \sin \theta \xi} e^{-i\frac{k}{f'} x' \xi} d\xi \\ &\quad + e^{i(k \sin \theta - k \frac{x'}{f'}) d} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i(k \sin \theta - k \frac{x'}{f'}) \xi} d\xi \end{aligned}$$

(el factor delante de la segunda integral es debido al cambio de variable). Ahora, sacando factor común

$$\hat{u}(x') \propto (1 - e^{-i\varphi}) \text{sinc}(\phi)$$





**Figura 10.20:** Doble rendija. Interpretación de  $\varphi$  en el factor interferencial.

donde

$$\varphi = \left( k \frac{x'}{f'} - k \sin \theta \right) d$$

$$\phi = \left( k \frac{x'}{f'} - k \sin \theta \right) \frac{a}{2}$$

como en todos los problemas anteriores estamos interesados más bien en la distribución de intensidades

$$I(x') \propto |\hat{u}(x')|^2$$

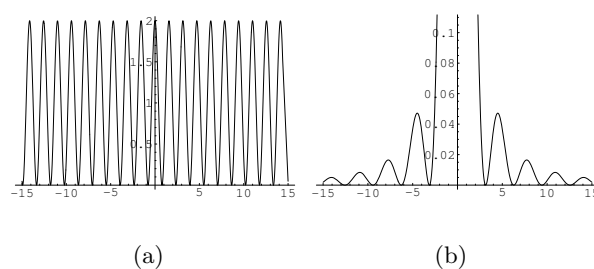
$$\propto (1 + \cos \varphi) \text{sinc}^2(\phi)$$

1. El primer paréntesis (lo llamamos factor  $I_d$  porque sólo depende de la separación de las rendijas) se puede identificar como la interferencia de dos ondas con desfase  $\varphi$  (era de esperar).

Como se ve en la figura, los rayos que partiendo de la abertura convergen tras pasar por la lente, deben salir de la abertura paralelos entre sí. Hasta ahora el plano focal imagen lo hemos parametrizado mediante  $x'$ . Pero nos va a ser más cómodo hacerlo mediante el ángulo  $\theta'$ , variable que determina el punto de la pantalla cuya intensidad queremos saber (o, dicho de otro modo, la dirección en la que observamos). Para una onda plana las equifases son planos que forman un ángulo  $\theta$  con el plano de las aberturas. Siguiendo el razonamiento del FP, la diferencia de camino óptico es  $\Delta_1 - \Delta_2$ . Con la trigonometría apropiada,

$$\sin \theta = \frac{\Delta_1}{d}$$

$$\sin \theta' = \frac{\Delta_2}{d}$$



**Figura 10.21:** Doble rendija. Los dos factores por separado.  $\varphi = 2\pi M$  para los máximos de  $I_d$ , que varía más deprisa (ya que  $d > a$ ) que la  $I_a$ , para la que el máximo central está en  $x' = f' \sin \theta$  (y vale 1, nótese la ampliación de los detalles finos a ambos lados del máximo central que hemos efectuado). Se ha utilizado  $\varphi = 4\phi$

la diferencia de camino se convierte en diferencia de fase multiplicando por  $\frac{2\pi}{\lambda}$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} (\Delta_2 - \Delta_1) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin \theta' - \sin \theta)\end{aligned}$$

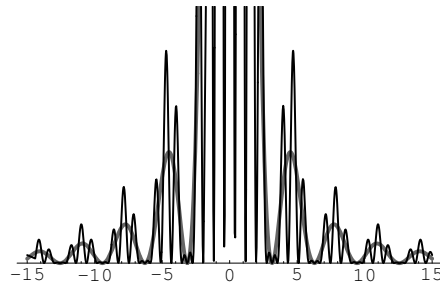
el objeto de todos estos cálculos es identificar este  $\varphi$  con el que aparece en  $1 + \cos \varphi$ , el factor de interferencia. Comparando las expresiones, concluimos que la igualdad entre ambos cálculos exigiría que  $\sin \theta' = \frac{x'}{f'}$ , cosa que es falsa en general, ya que vemos en la figura que  $\frac{x'}{f'} = \tan \theta'$ . Pero hay que recordar que el cálculo lo hemos hecho usando la aproximación de FF, que viene de la aproximación paraxial de FRESNEL. Es decir, que si los ángulos  $\theta'$  son pequeños coinciden el cálculo exacto y el aproximado

$$\sin \theta' \simeq \tan \theta' = \frac{x'}{f'}$$

En lo que sigue utilizaremos  $\varphi$  en su expresión más exacta (sustituiremos  $\frac{x'}{f'}$  por  $\sin \theta'$ ), para ampliar el dominio de validez de los cálculos.

2. El segundo factor es la difracción causada por una rendija. Lo llamaremos  $I_a$ , porque sólo depende del tamaño de la rendija.

Como vemos, el problema está diseccionado en un factor de interferencia  $I_d$  y otro de difracción  $I_a$ . El aspecto de cada factor se muestra en la figura 10.21. Como la  $I_d$  varía más deprisa que la  $I_a$  podemos considerar que lo que hace esta última es *modular* la  $I_d$ , como se muestra en la figura 10.22. El término de difracción lo que hace es limitar el número de máximos de interferencia que podemos ver (prácticamente sólo podremos ver los que estén dentro de la campana central).



**Figura 10.22:** Doble rendija.  $I(x') = I_d \times I_a$ . El máximo central es el  $M = 0$  de  $I_d$ . De nuevo se han ampliado los detalles finos a los lados del máximo principal. Se ha utilizado  $\varphi = 8\phi$ .

Mirando las integrales

$$\hat{u}(x') \propto \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik \sin \theta \xi} e^{-i \frac{k}{f'} x' \xi} d\xi + \int_{d-\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} e^{ik \sin \theta \xi} e^{-i \frac{k}{f'} x' \xi} d\xi$$

podemos identificar el primer término como  $\hat{u}_1$  y el segundo como  $\hat{u}_2$ , los términos de difracción de cada una de las rendijas. Al considerar la intensidad vemos que aparece el fenómeno de difracción, puesto que una onda no difiere de la otra más que en la exponencial compleja  $e^{-i\varphi}$

$$\hat{u}_2 = e^{-i\varphi} \hat{u}_1$$

Es decir que se dan las condiciones de interferencia puesto que son ondas iguales salvo diferencia de fase.

Si ocultásemos una de las rendijas, se presentaría  $I_1 \propto |\hat{u}_1|^2$  o  $I_2 \propto |\hat{u}_2|^2$  (en función de cuál tapemos). Pero sabemos que

$$I_2 \propto |\hat{u}_2|^2 = |\hat{u}_1|^2$$

de donde

$$I_1 = I_2 = \text{sinc}^2 \phi$$

Las distribuciones de intensidades debidas a las rendijas separadamente son *iguales*. Es decir, en FF, la figura de difracción de una rendija no depende de si está más arriba o más abajo en el plano de las aberturas. Lo único que cambia es la fase que separa a las ondas. Mover la rendija no desplaza la figura de difracción. Ambas ondas comparten el factor de difracción. Se solapan sobre la pantalla, sólo distintas por la fase.

Al separar mucho las rendijas se acaba perdiendo la interferencia, ya que desaparece la condición necesaria de coherencia espacial entre las dos ondas. Obsérvese que no por utilizar incidencia normal se pierde la interferencia, ya que el desfase entre las dos ondas tiene dos términos:

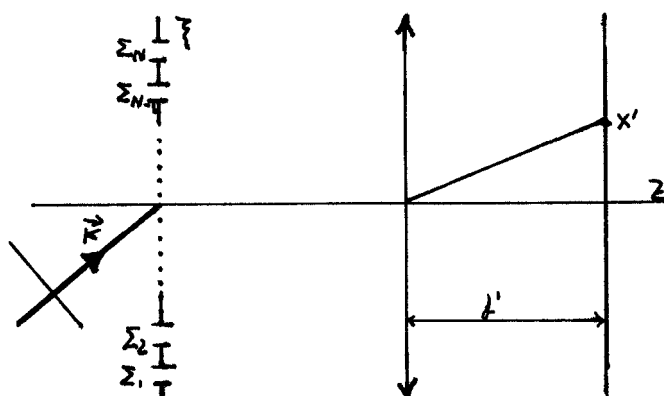


Figura 10.23: Red de difracción de  $N$  rendijas de anchura  $a$ .

1. lo que las ondas llevan de desfase al llegar al plano de las aberturas, que, como depende de  $\sin \theta$ , se hace cero cuando la incidencia es normal.
2. lo que acumulan al llegar desde diferentes puntos del plano de las aberturas al plano de la imagen, que no depende de si la incidencia es normal o no.

## 10.8. Red de difracción. Poder resolutivo

Encontraremos analogías con el problema de interferencia de infinitas ondas representado por un FABRY-PEROT. El objetivo es obtener algo que en su parte de interferencia se comporte como el FP. El montaje se muestra en la figura 10.23. Cada rendija la identificaremos por un  $\Sigma_i$ . La distancia entre las rendijas es siempre la misma,  $d$ . La oap se aproxima formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ . Se puede decir que  $\mathbf{k} \in \xi z$  ( $k_y = 0$ ),  $k_x = k \sin \theta$ .

Observamos la onda difractada sobre una pantalla que podemos parametrizar por coordenadas lineales (como  $x'$ ) o angulares (como  $\theta'$ ).

La integral que aparece en la aproximación de FF la simbolizaremos por  $\int$ . Esta integral debe estar extendida a  $\bigcup_j \Sigma_j$ , es decir

$$\hat{u} \propto \int_{\bigcup_{j=1}^N \Sigma_j} = \sum_{j=1}^N \int_{\Sigma_j}$$

haciendo las mismas operaciones de cambio de variable que con la doble rendija, lo que obtenemos es una serie de fases que salen de las integrales

$$\hat{u} \propto \int_{\Sigma_1} + e^{-i\varphi} \int_{\Sigma_2} + e^{-2i\varphi} \int_{\Sigma_3} + \dots + e^{-i(N-1)\varphi} \int_{\Sigma_N}$$

(el factor que cambia en el exponente es debido a que vamos pasando de  $d$  a  $2d$  a  $3d$ , etc.). En general

$$\begin{aligned}\hat{u} &\propto \left(1 + e^{-i\varphi} + \dots + e^{-i(N-1)\varphi}\right) \int_{\Sigma_1} \\ &\propto (\text{sinc}(\phi)) \times \sum_{j=1}^N e^{-i(j-1)\varphi}\end{aligned}$$

lo que cambia respecto a la doble rendija es que tenemos un primer factor que es interferencia de  $N$  ondas, y no de dos. Por otra parte, no es exactamente como el FP, puesto que en este teníamos  $\infty$  ondas interfiriendo. Y el otro factor es la difracción de una sola onda, que modula la interferencia del resto.

Las  $\phi$  y  $\varphi$  son las mismas variables que en la doble rendija. Sumando la serie geométrica

$$\hat{u} = \frac{1 - e^{-iN\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}} \text{sinc}(\phi)$$

haciendo el módulo al cuadrado y sacando factor común

$$I(x') \propto \left(\frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2 \times \text{sinc}^2\phi$$

tenemos un factor  $I_d$  de interferencia de  $N$  ondas y otro de difracción, ya conocido:  $I_a$ .

### 10.8.1. Análisis del factor de interferencia

Es precisamente este factor, tan diferente de  $(1 + \cos\varphi)$ , el que permitirá usar la red de difracción para discriminar longitudes con gran precisión. Al depender en el numerador de un seno es sencillo encontrar los ceros de la función: son los del numerador, que son ( $m \in \mathcal{Z}$ )

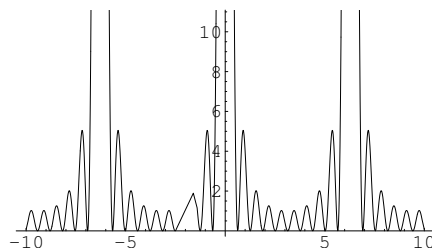
$$\begin{aligned}N\frac{\varphi}{2} &= m\pi \\ \varphi &= \frac{2m}{N}\pi\end{aligned}$$

esto es cierto para todos los valores de  $\varphi$  salvo para los valores en que se anule también el denominador, que vamos a numerar con  $M$

$$\varphi = 2M\pi$$

Los ceros comunes corresponden a los valores máximos más grandes, y aparecen en  $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

El aspecto de la función es el que se muestra en la figura. Para justificar el que los



**Figura 10.24:** Red de difracción. La ecuación  $\varphi = 2\pi M$  da la ubicación de los máximos principales. La figura es para  $N = 10$ , escogiendo  $\phi = 4\varphi$ .

máximos principales realmente lo son valgan los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} I_d &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} cte \left( \frac{\sin(N\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}} \right) \\ &= cte \left( \frac{N\varphi/2}{\varphi/2} \right) \\ &= cte \times N^2 \end{aligned}$$

Tenemos que comparar con los máximos secundarios. Cuando  $N$  es muy grande ( $N \gg 1$ ), que es el caso interesante

$$\begin{aligned} I_d &= cte \left( \frac{\sin(N\frac{3\pi}{2N})}{\sin(\frac{3\pi}{2N})} \right)^2 \\ &\simeq cte \times \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2N}\right)^2} \\ &\simeq cte \times \frac{N^2}{25} \end{aligned}$$

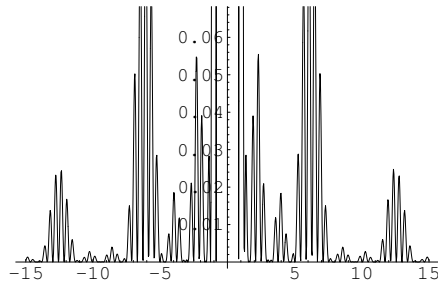
de modo que la altura relativa de los máximos, cuando  $N$  es muy grande, difiere por un factor de 25 entre los principales y los adyacentes a éstos.

### 10.8.2. Modulación de la interferencia por la difracción

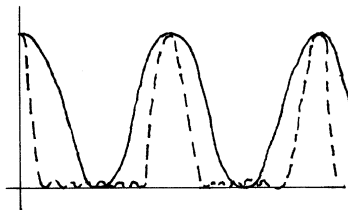
Los máximos principales ya no tienen todos la misma altura. El máximo principal es para

$$\begin{aligned} \varphi &= \phi = 0 \\ x' &= f' \sin \theta \\ \theta' &= \theta \end{aligned}$$

Si queremos ver varios máximos de interferencia tendremos que reducir las rendijas para que la envolvente de difracción se haga más suave. Los máximos se encuentran en la dirección de incidencia,  $\theta$ .



**Figura 10.25:**  $I(\varphi)$ . Intensidad en la pantalla debida a la interposición de una red de difracción con  $N = 15$  y  $\phi = 2\varphi$ .



**Figura 10.26:** Figura de dos rendijas y de  $N$

**Poder resolutivo**

Hay que señalar que los máximos de la doble rendija y los máximos de la red de difracción coinciden. Podemos ver en la figura 10.26 que añadir más rendijas se traduce en que los máximos se contraen (son cada vez más estrechos: su anchura es proporcional a  $\frac{1}{N}$ ). El interferómetro de FP estaba caracterizado por la estrechez de los máximos, y era esto lo que permitía medir magnitudes. La red de difracción es a estos efectos tanto más sensible cuanto más grande sea el número de rendijas.

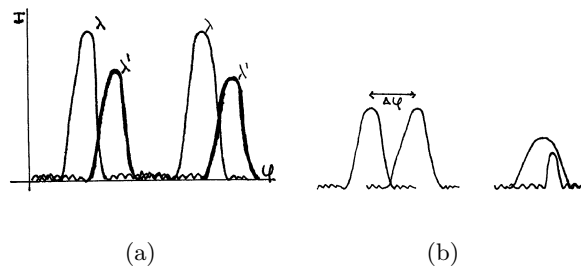
Vamos a construir un parámetro que nos permita evaluar la precisión en la medida de longitudes de onda de este dispositivo.

Un criterio posible es considerar que los máximos están resueltos si la distancia de los máximos es mayor que la mitad de su anchura

$$|\Delta\varphi| \geq \frac{\delta\varphi}{2}$$

en términos de los datos del problema

$$\begin{aligned}
 |\Delta\varphi| &\geq \frac{2\pi}{N} \\
 |\Delta\varphi| &= \frac{2\pi}{\lambda^2} (\sin \theta' - \sin \theta) d\Delta\lambda \\
 \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta' - \sin \theta) d = 2\pi M
 \end{aligned}$$



**Figura 10.27:** a) La figura varía con la longitud de onda. b) Longitudes de onda resueltas y no resueltas.

como

$$2\pi |M| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{2\pi}{N}$$

se tiene el criterio

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{|M|N}$$

o, más habitualmente

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq |M|N$$

*Comentario:* el poder resolutivo depende de dos factores. Hay un factor que depende del interferómetro ( $N$ ) y otro de cómo lo utilizemos (orden de interferencia  $M$ ). Conseguir órdenes grandes es difícil por comparación al FABRY-PEROT.

**Ejemplo** Número de rendijas para resolver el doblete amarillo del sodio ( $\lambda = 589.0nm$  y  $\lambda' = 589.6nm$ ) cuando la anchura de la red es de  $10cm$  y  $M = 1$ . Calcular la separación  $d$  de las rendijas.

Como  $\lambda$  podemos tomar una cualquiera de ellas o el valor medio.  $\Delta\lambda = 0.6nm$ . En el orden 1 tenemos  $N \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \simeq 982$ . En cuanto a  $d$

$$d \simeq \frac{10cm}{1000} = 10^{-4}m$$

deben estar a décimas de milímetro de distancia. Tomar una placa más grande no es solución, porque si se pierde la coherencia espacial no hay interferencia.

## 10.9. Por hacer

- Las representaciones gráficas de las funciones de BESSEL
- Gráficos 3D de intensidad en función de  $x, y$  para sustituir los gráficos de dos dimensiones como 10.16.
- Una sección (de lectura opcional) que incida en la conexión de la teoría de la difracción con las transformadas integrales de FOURIER.



# 11 Ejercicios y problemas

## 11.1. Resueltos

---

**Problema** Consideremos el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$$

siendo  $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$  los correspondientes vectores unitarios. ¿Es una onda armónica?. Escribir  $\mathbf{E}$  en representación compleja. ¿Es una onda plana? ¿Cuál es su estado de polarización?.

**Respuesta** Sí es una onda armónica, pues se puede escribir del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y) \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \\ &= E_0 (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y) \begin{pmatrix} \cos(\omega t - kz) \\ \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= E_0 (\mathbf{u}_x, i\mathbf{u}_y) \begin{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} \\ e^{i(\omega t - kz)} \end{pmatrix} \\ &= (E_0 \mathbf{u}_x + E_0 i\mathbf{u}_y) e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

---

**Problema** Dar respuesta a las siguientes cuestiones

1. La suma de dos ondas planas ¿es siempre una onda plana?.
2. ¿La superposición de dos ondas linealmente polarizadas ¿está siempre linealmente polarizada?.
3. La superposición de dos ondas circularmente polarizadas ¿está siempre circularmente polarizada?.

**Respuesta**

1. Una onda armónica es aquella para la cual

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E}$$

lo que es equivalente a la definición que hemos dado

$$E_j = A_j(\mathbf{r}) \cos(\omega t - g_j(\mathbf{r}))$$

Se verifica que la dependencia temporal es armónica, lo cual no quiere decir que forzosamente la función dada sea una onda, es decir, cumpla la ecuación de ondas.

2. Representación compleja

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \left[ \frac{k}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \right] e^{i \left[ \frac{k}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \omega t \right]}$$

Nótese que cambiar el signo del argumento de la exponencial no cambia nada en la representación real, pues el coseno es una función par. Sólo hay que pasar a representación compleja *el coseno que lleva la dependencia temporal*. Lo que puede ser muy útil, y además es legítimo es reescribir el coseno que no depende del tiempo usando la fórmula

$$\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}$$

*Observación:* si utilizamos una fórmula trigonométrica para descomponer el producto de cosenos obtenemos una suma de dos ondas armónicas. Se deja como ejercicio para el lector.

3. Velocidad de fase. Los frentes de onda corresponden a los puntos que verifican

$$\omega t - \frac{k}{2} \cdot \mathbf{r} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = cte$$

para simplificar supongamos que la suma  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$  sigue el eje  $z$  ( $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2| \mathbf{u}_z$ ). Entonces

$$\omega t - \frac{k}{2} z |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2| = cte$$

es decir, planos perpendiculares al eje  $z$ . La velocidad de fase es el coeficiente que multiplica al tiempo en

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\omega}{k |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|} t - 2 \frac{cte}{k |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|} \\ &= v_f t - 2 \frac{cte}{k |\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2|} \end{aligned}$$

Lo único que podemos decir es que será menor que la velocidad de la luz en el vacío. Para dar más precisiones necesitaríamos conocer  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ .

4. Expresarlo como superposición de oap

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}$$

para hacerlo no hay más que recordar la expresión del coseno que no depende del tiempo en función de exponenciales complejas. Manipulando un poco la representación compleja se obtiene, pues,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{2} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \frac{\mathbf{E}_0}{2} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

donde  $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{u}_2$  y  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Ahora podemos responder a la pregunta de si el campo dado es una oem: lo es en la medida en que se descompone en suma de oap, que son soluciones cada una de ellas por separado (siempre que  $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ ) y la ecO es lineal (la suma de soluciones es solución).

**Problema** Para cierta onda armónica plana

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

se tiene

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} p + iq \\ f + ig \end{pmatrix}$$

con  $p, q, f, g \in \mathbb{R}$ . ¿Cuál es el estado de polarización en los siguientes casos?

1.  $f = 2p, g = 2q$ .
2.  $f = q = 0, p = g$
3.  $p = 0, q = 0$

**Respuesta**

1.  $f = 2p, g = 2q$ . Esto implica

$$\mathbf{E}_0 = (p + iq) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luz linealmente polarizada:  $\delta y - \delta x = 0$ . En representación real  $p + iq = e^{i\varphi}$  y se tiene

$$\begin{aligned} E_x &= a \cos(\omega t - kz - \varphi) \\ E_y &= 2a \cos(\omega t - kz - \varphi) \end{aligned}$$

de donde se obtiene la polarización exactamente: es la recta

$$E_y = 2E_x$$

## 11 Ejercicios y problemas

2.  $f = 2p, g = 2q$  (hacer). Este segundo caso da circular levógira y en representación real, las ecuaciones paramétricas de una circunferencia

$$\begin{aligned} E_x &= p \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= p \sin(\omega t - kz) \end{aligned}$$

3. con  $p = 0, q = 0$

$$\mathbf{E}_0 = (f + ig) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de nuevo luz linealmente polarizada, vibrando en el eje  $y$ .

**Problema** Estimar la amplitud del campo eléctrico de una oap cuyo promedio temporal del vector de POYNTING es

1.  $125 \text{ W/m}^2$  (bombilla)
  - a)  $1 \text{ kW/m}^2$  (luz solar).
  - b)  $1 \text{ W/cm}^2$  (láser continuo He-Ne).
  - c)  $1 \text{ MW/cm}^2$  (láser pulsado).

**Respuesta** No hay más remedio que hacer una hipótesis: que las ondas son expresables como oaps. Y esto es totalmente falso en la mayoría de los casos.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

Sabemos que

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2$$

de donde

$$|\mathbf{E}_0| = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\langle \mathbf{S} \rangle|}$$

los valores numéricos que se obtienen son  $307 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ,  $868 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ,  $2.7 \times 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ,  $2.7 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ , respectivamente. Para comparar, el campo eléctrico que siente un electrón de un átomo de H es, muy aproximadamente

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \approx 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

podemos apreciar que los cem de las ondas son siempre muy pequeños comparados con los campos atómicos internos. Esto puede servir para justificar la aproximación lineal para la fuerza recuperadora que hemos adoptado en el desarrollo teórico.

**Problema** Consideremos dos ondas planas monocromáticas linealmente polarizadas que se propagan en la misma dirección. Determinar el promedio temporal del vector de POYNTING de la superposición de ambas ondas si las dos ondas tienen la misma frecuencia y los vectores  $\mathbf{E}$  perpendiculares.

**Respuesta** Suponemos propagación en el eje  $z$ , por lo que escribimos la proporcionalidad a un vector real como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{01} &\propto \mathbf{u}_x \\ \mathbf{E}_{02} &\propto \mathbf{u}_y\end{aligned}$$

La superposición de ambos campos es una oap de amplitud  $(\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) e^{i(kz - \omega t)}$  de modo que, según la fórmula

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}|^2 \mathbf{u}_k = (\langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle)$$

*Observaciones:* para que esto ocurra basta con que los productos escalares  $\mathbf{E}_{01}^* \cdot \mathbf{E}_{02}$  y  $\mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02}^*$  sean nulos. Los estados de polarización en que esto ocurre se llaman *estados de polarización ortogonales*. Pero esta condición además de las polarizaciones lineales ortogonales, la cumplen dos ondas polarizadas circularmente, una dextro y otra levo.

Para llegar a esto bastaría con haber considerado detenidamente la estructura de la onda y la definición del vector de POYNTING.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \wedge (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

como la operación de promediado es lineal se llega a  $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}_1 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \rangle$ .

**Problema** Una carga ligada es iluminada por una onda armónica, plana y circularmente polarizada que se propaga en la dirección  $Z$ . Demostrar que  $\mathbf{r}(t)$  describe una circunferencia en el plano  $XY$ .

**Respuesta** La ecuación de la trayectoria de una carga ligada es

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\frac{q}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Una oap que se propague en la dirección del eje  $z$  cumple

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

de modo que la componente  $z$  del campo según el eje  $z$  es nula. Así sucederá con el vector  $\mathbf{r}(t)$ , que es proporcional a él. De suerte que el movimiento de las cargas se produce en

**Figura 11.1:** El vector  $\mathbf{r}$  *persigue* al vector  $\mathbf{E}$ 

el plano  $xy$ . Es evidente que la trayectoria es circular, puesto que los dos vectores son proporcionales.

De otro modo,

$$\mathbf{r} = \beta \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} = |\beta| e^{i\delta} \mathbf{E}^{-i\omega t} = |\beta| \mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t - \frac{\delta}{\omega})}$$

es decir,  $\mathbf{r}(t) = |\beta| \mathbf{E}(t - \frac{\delta}{\omega})$ . La trayectoria que sigue la separación entre cargas es la misma que la del campo eléctrico, solo que con un desfase temporal. Y esto se puede aplicar a cualquier estado de polarización.

---

**Problema** *Demostrar que el promedio temporal de la potencia transferida a un electrón ligado  $P = \langle q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \rangle$  cuando es iluminado por una oap es*

$$P = \frac{q^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} |\mathbf{E}_0|^2$$

*Evaluar esta expresión con los datos del problema anterior. Calcular el tamaño de una superficie sobre la que incide la misma potencia debido a la misma onda armónica plana.*

### Respuesta

1. No hay más que escribir explícitamente la expresión  $q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}$  y hacer su promedio temporal

$$q\mathbf{r} = \alpha \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

donde  $\alpha$  es la polarizabilidad. Como hemos separado la dependencia temporal

$$q\dot{\mathbf{r}} = (-i\omega) \alpha \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Como tenemos un producto de cosas, que no es una operación lineal, no podemos utilizar la representación compleja. De modo que vamos a pasar  $\dot{\mathbf{r}}$  y  $\mathbf{E}$  a representación real. Pero eso ya lo hicimos para el vector de POYNTING, sólo que con un producto vectorial y no escalar. Revisando esos cálculos uno se convence de que

$$\langle q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^* \}$$

Aquí sí que vale la representación compleja

$$q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^* = -i\omega\alpha |\mathbf{E}_0|^2$$

de donde

$$P = -\frac{i\omega}{4} (\alpha - \alpha^*) |\mathbf{E}_0|^2$$

expresión de la que se sigue inmediatamente la conclusión. Ésta es la energía que la carga extrae de la onda incidente. Obsérvese que es proporcional a  $\gamma$ .

- Para  $\omega = 5 \times 10^{15}$  rad/s la potencia extraída por la carga es  $4.34 \times 10^{-25} W$  mientras que para  $\omega_0$  es  $1.4 \times 10^{-10} W$  ¡una diferencia de quince órdenes de magnitud!. Cambios pequeños en frecuencia significan cambios enormes en la interacción radiación-materia. Toda la energía que extrae la carga es luego reemitida en forma de ondas electromagnéticas.
- Es una forma de evaluar el tamaño efectivo del átomo, la sección transversal que absorbería la misma energía que la carga ligada. Esa superficie se llama *sección eficaz*. El  $\langle \mathbf{S} \rangle$  es potencia por unidad de superficie, de modo que (si la normal a la superficie coincide con el vector de POYNTING)

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| A = P$$

Como se trata de una oap, se cumple

$$|\langle \mathbf{S} \rangle| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2$$

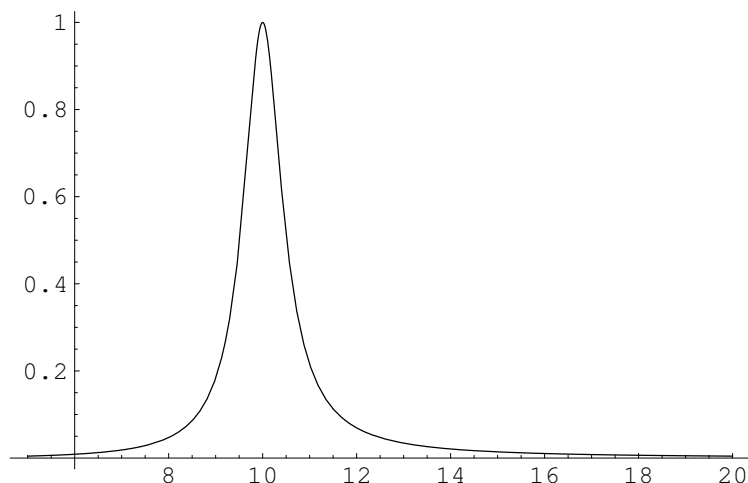
y no hay más que sustituir los datos en la expresión  $A = \frac{P}{|\langle \mathbf{S} \rangle|}$ . Se encuentra, respectivamente, para  $\omega = 5 \times 10^{15} \text{ rad/s}$  la sección eficaz es de  $3.34 \times 10^{-28} m^2$  mientras que para  $\omega_0$  es  $1.08 \times 10^{-13} m^2$  ¡una diferencia de quince órdenes de magnitud!. Si suponemos la superficie circular, los radios respectivos son  $10^{-5} nm$  y  $185 nm$ . Este segundo número es enorme. Esto es una signatura de que nuestros cálculos en la resonancia no son tan precisos como pensamos. El primer dato viene a ser una milésima del tamaño del átomo.

**Problema (el cielo azul...)** Si en el problema anterior  $\omega_0$  está en el ultravioleta, dígase si la potencia transferida es mayor para una  $\omega$  en el rojo o en el azul (considérese  $\gamma \ll \omega \ll \omega_0$ ).

**Respuesta** Las aproximaciones que hacemos son  $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \gamma^2 \omega^2 \approx \omega_0^4 + \gamma^2 \omega^2 \approx \omega_0^4$

$$P \approx \frac{q^2}{2m} \frac{\gamma \omega^2}{\omega_0^4} |\mathbf{E}_0|^2$$

como  $\omega_A > \omega_R$ , se concluye que la carga es mucho más sensible a las ondas en el azul. Observaciones:



**Figura 11.2:** Aspecto cualitativo de la función  $P(\omega)$  con  $\omega_0 = 10$

1. En la bibliografía encontraremos una dependencia no en  $\omega^2$  sino en  $\omega^4$ , ya que se suelen tomar mejores aproximaciones de la dependencia con  $\mathbf{\hat{r}}$  de  $\gamma$ .
2. Esta fórmula puede dar cuenta del color azul del cielo, así como de los tonos rojizos del atardecer. Las moléculas del aire extraen más azul que rojo de la luz blanca incidente. Y reemiten en azul, pero no en la dirección incidente, sino en todas direcciones. En el haz que progresa, por esto mismo, queda más rojo que azul.

Cuando por el día miramos a una dirección arbitraria del espacio (que no sea la del sol) la luz no puede venir más que de la dispersión de la luz solar por la atmósfera. En el crepúsculo ocurre el fenómeno complementario: cuando miramos al sol, que además atraviesa una gruesa capa atmosférica por ser casi tangencial, vemos las componentes cromáticas que quedan en el haz que progresa, es decir, mayoritariamente el rojo.

3. Este cálculo lo hemos hecho suponiendo que la atmósfera es un medio ópticamente no denso, lo que es falso. Pero nuestra suposición funciona porque en realidad existen fluctuaciones de densidad, bolsas de aire de mayor densidad que el entorno que se comportan como una especie de agregados que, ellos sí, constituyen un medio ópticamente poco denso para el que vale el tratamiento que se ha utilizado suponiendo unidades más pequeñas.



**Problema** Se tiene un dieléctrico que tiene una sola frecuencia de resonancia  $\omega_0 = 3.01 \times 10^{15}$  rad/s. En dicho medio se propagan tres ondas de frecuencias

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 3.04 \times 10^{15} \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= 3.14 \times 10^{15} \text{ rad/s} \\ \omega_3 &= 3.02 \times 10^{15} \text{ rad/s}\end{aligned}$$

¿Cuál de ellas se atenuará más a medida que se propague? ¿Por qué? Por sencillez considérese que para dichas ondas  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{a}$  son paralelos.

**Respuesta** Hay atenuación en tanto en cuanto hay absorción (si  $\kappa = 0$  entonces  $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$  o bien  $\mathbf{a} = 0$ , y en el primer caso la onda no se atenúa a medida que se propaga tampoco: el promedio temporal del vector de POYNTING no decrece). Si imaginamos la situación  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{a}$  para las tres ondas  $\mathbf{a} = \frac{\omega}{c} \kappa \mathbf{u}_a$ . Pero una vez que  $\kappa \neq 0$  (y eso ocurre para las tres frecuencias) estrictamente no se puede decir para qué  $\omega$  la atenuación es mayor. No obstante, si nos restringimos al caso particular expuesto, y teniendo en cuenta la representación  $\kappa(\omega)$ , la solución es  $\omega_3$  ( $\mathbf{a}$  depende no de  $\kappa$  sino de  $\kappa\omega$ , pero eso no cambia la conclusión —monotonía de la función, todas las frecuencias al mismo lado del pico—).

**Problema (ionosfera: transparente al visible, espejo en radiofrecuencia)** En la ionosfera el número de electrones libres por metro cúbico es  $N \simeq 10^{11} \text{ m}^{-3}$ . Calcular su contribución a  $n$  y  $\kappa$  para frecuencias del visible suponiendo que  $\gamma$  es despreciable.

**Respuesta** Con  $\gamma \simeq 0$  se tiene el índice

$$n_c^2 = 1 - N \frac{e^2}{m_e \epsilon_0} \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

utilizando, como para el caso de los metales, la noción de *frecuencia de plasma*,  $\omega_p = e \sqrt{\frac{N}{m_e \epsilon_0}}$ , que es un parámetro que agrupa todas las características intrínsecas del material. Una evaluación numérica para los electrones de la ionosfera arroja

$$\begin{aligned}\omega_p &= 1.602 \times 10^{-19} C \sqrt{\frac{10^{11} \text{ m}^{-3}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 8.85 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}}} \\ &\simeq 1.76 \times 10^7 \text{ Hz}\end{aligned}$$

que está muy por debajo de las frecuencias del visible (orden  $10^{15} \text{ Hz}$ ), lo que significa

$$n_c^2 \simeq 1$$

entonces  $n_c \simeq n$  y por lo tanto  $\kappa \simeq 0$ . La ionosfera es transparente al visible, hecho concordante con la experiencia diaria. Por otra parte, el valor del índice  $n \simeq 1$  es también lo que cabía esperar. La ionosfera será completamente transparente para el visible, pero reflectora para las radiofrecuencias, lo que es utilizado para propagar las ondas de radio.

**Problema** El promedio del campo eléctrico sobre los átomos viene dado por  $\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}$ . Demuéstrese la siguiente relación entre la constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  y la polarizabilidad atómica  $\alpha$ .

$$\epsilon_r = \frac{1 + \frac{2N_V\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{N_V\alpha}{3\epsilon_0}}$$

**Respuesta** Ligábamos la constante dieléctrica con la polarización a través del momento dipolar por unidad de volumen.

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}_{mac} \\ \epsilon &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \\ \mathbf{P} &= \alpha \frac{N}{\Delta V} \frac{1}{N} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{E}_{j,mic}\end{aligned}$$

Vamos a considerar que el promedio del campo microscópico actuante sobre los átomos no es  $\mathbf{E}$  (como en el desarrollo de la teoría) sino  $\mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\mathbf{P}$ . Entonces

$$\mathbf{P} = N_V \alpha \left( \mathbf{E}_{mac} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \right)$$

con  $N_V = \frac{N}{\Delta V}$ . Si despejamos

$$\mathbf{P} = \frac{N_V \alpha}{1 - \frac{N_V \alpha}{3\epsilon_0}} \mathbf{E}_{mac}$$

y la susceptibilidad es

$$\chi_e = \frac{\frac{N_V \alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{N_V \alpha}{3\epsilon_0}}$$

de donde se llega sin dificultad a la igualdad propuesta en el enunciado.

---

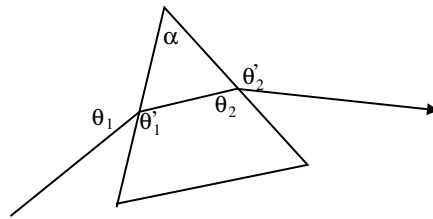
**Problema** Aproxímese  $\epsilon_r$  en el problema anterior si  $\frac{N\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$ .

**Respuesta** Lo que podemos hacer es desarrollar el denominador en sdp del término pequeño y quedarnos en la aproximación lineal.

$$\begin{aligned}\epsilon_r &= \frac{1 + \frac{2N_V\alpha}{3\epsilon_0}}{1 - \frac{N_V\alpha}{3\epsilon_0}} \\ &= \left( 1 + \frac{2N_V\alpha}{3\epsilon_0} \right) \left( 1 + \frac{N_V\alpha}{3\epsilon_0} + \dots \right)\end{aligned}$$

despreciando términos cuadráticos en  $\alpha$

$$\epsilon_r \simeq 1 + \frac{2N_V\alpha}{3\epsilon_0} + \frac{N_V\alpha}{3\epsilon_0} = 1 + \frac{N_V\alpha}{\epsilon_0}$$



**Figura 11.3:** Un prisma de vidrio de ángulo  $\alpha$ .

Esta expresión que hemos obtenido es la que hemos manejado en la teoría. Esta aproximación consiste en despreciar el término  $\frac{1}{3\epsilon_0}$  en el promedio del campo actuante sobre los átomos. La condición de validez de la aproximación utilizada en teoría es, pues  $\frac{N\alpha}{\epsilon_0} \ll 1$ .

**Problema (prismas para desviar sin pérdidas)** *Considérese un haz plano linealmente polarizado que incide desde el aire sobre un prisma transparente de vidrio de ángulo  $\alpha$  (ver figura 11.3). Se desea que dicho haz atraviese el prisma sin sufrir pérdidas por reflexión en ninguna de las dos caras. ¿Cuánto deben valer*

1. *el acimut del haz incidente*
2. *el ángulo de incidencia*
3. *y el índice de refracción del prisma*

*para que tal cosa ocurra?*

**Respuesta** No queremos que haya luz reflejada en ninguna de las interfases, para que la atenuación sea mínima. En principio tenemos que calcular los coeficientes de reflexión y ver en qué circunstancias se anulan

$$\begin{aligned} R_{1\parallel} &= r_{\parallel} A_{\parallel} \\ R_{1\perp} &= r_{\perp} A_{\perp} \end{aligned}$$

$R_1 = 0$  implica forzosamente  $A_{\perp} = 0$  ya que  $r_{\perp}$  nunca se anula: el haz incidente debe tener sólo componente paralela (acimut cero). Por otra parte  $r_{\parallel} = 0$  implica que la incidencia en la primera cara del prisma debe ser en ángulo de BREWSTER  $\theta_1 = \theta_B$ . Los resultados se pueden trasponer a la segunda cara: la incidencia debe ser allí también en ángulo de BREWSTER. Hace falta ver qué valen  $\theta_1(\alpha)$  y  $n_v(\alpha)$ .

Con la condición de BREWSTER, la ley de SNELL, etc, escribimos:

$$\begin{aligned}
 \tan \theta_1 &= n_v \\
 \sin \theta_1 &= n_v \sin \theta'_1 \\
 n_v \cos \theta_1 &= \cos \theta'_1 \\
 \sin \theta'_1 &= \cos \theta_1 \\
 \theta'_1 + \theta_1 &= \frac{\pi}{2} \\
 \tan \theta' &= n_v \\
 \tan \theta_2 &= \frac{1}{n_v} \\
 \sin \theta_2 &= n_v \sin \theta'_2 \\
 n_v \cos \theta_2 &= \cos \theta'_2 \\
 \sin \theta'_2 &= \cos \theta_2 \\
 \theta'_2 + \theta_2 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

de aquí se tiene  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ; utilizando las tres relaciones entre ángulos se llega a la expresión, en la que aparece  $\alpha$

$$\begin{aligned}
 \pi - \theta'_1 - \theta_2 + \alpha &= \pi \\
 \alpha &= \theta'_1 + \theta_2
 \end{aligned}$$

si usamos el valor hallado para  $\alpha$  con  $\theta_2 = \theta'_1$  llegamos a  $\theta_2 = \frac{\alpha}{2}$  o bien  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ . También

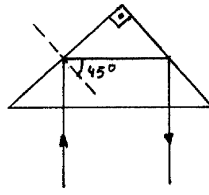
$$n_v = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

*Comentario:* la trayectoria del rayo dentro del prisma es perpendicular a la bisectriz del ángulo, lo que coincide con la condición de desviación mínima. Por otra parte, la utilidad de un prisma como el que acabamos de describir es desviar un rayo sin pérdidas. Este método presenta ventajas frente a la utilización de espejos, siempre que seamos capaces de obtener medios perfectamente transparentes.

**Problema** *Un haz de luz linealmente polarizado incide sobre un prisma isósceles de índice de refracción 1.5 tal y como se muestra en la figura 11.4. El campo eléctrico oscila en un plano que forma un ángulo con el plano de incidencia de  $45^\circ$ . Se desea saber el **tipo** de polarización del haz saliente  $s$  y su intensidad respecto a la del haz incidente  $i$  en los casos en que el medio que rodea al prisma sea: a) aire ( $n = 1$ ) b) agua ( $n = 1.33$ ).*

### Respuesta

1. Planteamiento. Se tiene  $|A_{\parallel}| = |A_{\perp}| = \frac{1}{\sqrt{2}} |A|$  (el acimut es  $\alpha = 45^\circ$ ). Para responder a las preguntas sobre el haz  $s$  (haz emergente) tenemos que poner en relación



**Figura 11.4:** Prisma isósceles de  $n = 1.5$ .

las amplitudes, lo cual se hace con las fórmulas de FRESNEL. A los sucesivos procesos de transmisión-reflexión-reflexión-transmisión los denotaremos por 1, 2, 3, 4 respectivamente.

$$\begin{aligned} A'_{\parallel} &= t_{\parallel}^{(4)} r_{\parallel}^{(3)} r_{\parallel}^{(2)} t_{\parallel}^{(1)} A_{\parallel} \\ A'_{\perp} &= t_{\perp}^{(4)} r_{\perp}^{(3)} r_{\perp}^{(2)} t_{\perp}^{(1)} A_{\perp} \end{aligned}$$

Vamos a despreciar reflexiones múltiples: la onda se podría reflejar en 4, recorrer el camino inverso, reflejarse de nuevo en 1 y volver para contribuir a la onda emergente. Habida cuenta de que  $n = 1.5$  la contribución sería, en todo caso muy pequeña.

2. Cálculo. Una vez escritas las fórmulas anteriores sólo queda calcular. Las transmisiones 1, 4 son en condiciones de incidencia normal ( $\theta = 0$ )

$$\begin{aligned} t_{\parallel}^{(1)} = t_{\perp}^{(1)} &= \frac{2n_a}{n_a + n} \\ t_{\parallel}^{(4)} = t_{\perp}^{(4)} &= \frac{2n}{n_a + n} \end{aligned}$$

por simetría sabemos que  $r_{\parallel}^{(2)} = r_{\parallel}^{(3)}$  y  $r_{\perp}^{(2)} = r_{\perp}^{(3)}$ . *Consejo:* cuando vayamos de mayor a menor índice es conveniente examinar si estamos en condiciones de reflexión total o no para escoger las expresiones adecuadas. Para saberlo calculamos  $n \sin 45^\circ = 1.06$  y lo comparamos con  $n_a$ .

- Si  $n_a = 1$  estamos en reflexión total (vidrio-aire)
- Si  $n_a = 1.33$  no hay reflexión total (existe  $\theta'$  para el caso vidrio-agua).

Tenemos que separar el estudio de ambos casos. Comenzaremos por el caso más sencillo ( $n_a = 1.33$ ).

- a) Podemos usar las fórmulas para los coeficientes de reflexión en las que aparecen los índices de ambos medios, el ángulo de incidencia y el ángulo de

refracción (que hallamos por la ley de SNELL y vale  $\theta' = 0.92$ ).

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= 0.01921 \\ r_{\perp} &= 0.1386 \\ t_{\perp}^{(1)} = t_{\parallel}^{(1)} &= 0.94 \\ t_{\perp}^{(4)} = t_{\parallel}^{(4)} &= 1.06 \end{aligned}$$

el resultado es

$$\begin{aligned} A'_{\parallel} &= 3.7 \times 10^{-4} A_{\parallel} = 2.6 \times 10^{-4} |\mathbf{A}| \\ A'_{\perp} &= 1.9 \times 10^{-2} A_{\perp} = 1.35 \times 10^{-2} |\mathbf{A}| \end{aligned}$$

como  $\mathbf{A}' \propto$  vector real la polarización es lineal. Podemos calcular su acimut, que vale

$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \frac{A'_{\perp}}{A'_{\parallel}} = 52 \\ \alpha' &= 89^{\circ} \end{aligned}$$

El que los coeficientes de transmisión sean mayores que 1 no significa que la energía aumente en la transmisión. Como en la media del vector de POYNTING aparecen los índices hay casos en que un coeficiente es mayor que 1 y la energía, por supuesto se conserva. De hecho, cuando el cambio de medio se produce en el sentido de disminución de índice, como es el caso de este problema, se demuestra que los coeficientes de transmisión tienen que ser mayores que 1. Las que tienen que ser menores que la unidad son las *transmitancias*, ya que en su expresión intervienen los índices para compensar:

$$\mathcal{T}_{\perp} = \frac{n'}{n} |t_{\perp}|^2$$

Para responder a la segunda cuestión hace falta percatarse de que

$$\frac{I'}{I} = \frac{|\mathbf{A}'|^2}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{|\mathbf{A}'_{\parallel}|^2 + |\mathbf{A}'_{\perp}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = 1.83 \times 10^{-4}$$

Apenas se refleja luz (menos de un 0.02 %).

- b) Ahora tenemos que resolver el caso en que hay reflexión total ( $n_a = 1$ ).

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= e^{i\delta_{\parallel}} \\ r_{\perp} &= e^{i\delta_{\perp}} \end{aligned}$$

si queremos saber el estado de polarización sólo nos interesa la diferencia de fase, por lo que usamos la expresión

$$\tan \left( \frac{\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}}{2} \right) = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{n_a}{n}\right)^2}}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{3}$$

de donde  $\delta_{\perp} - \delta_{\parallel} = 0.32 \text{rad} = 18.4^{\circ}$  y

$$\begin{aligned} t_{\perp}^{(1)} = t_{\parallel}^{(1)} &= 0.8 \\ t_{\perp}^{(4)} = t_{\parallel}^{(4)} &= 1.2 \end{aligned}$$

que conducen a las siguientes relaciones entre las amplitudes de entrada y la de salida

$$\begin{aligned} A'_{\parallel} &= 0.96e^{i2\delta_{\parallel}} A_{\parallel} = 0.679e^{i2\delta_{\parallel}} |\mathbf{A}| \\ A'_{\perp} &= 0.96e^{i2\delta_{\perp}} A_{\perp} = 0.679e^{i2\delta_{\perp}} |\mathbf{A}| \end{aligned}$$

$$2(\delta_{\perp} - \delta_{\parallel}) = 1.287 = 73.7^{\circ}$$

No es lineal, y como la diferencia de fases no es  $\pm \frac{\pi}{2}$  tampoco tiene polarización circular, luego la polarización es elíptica.

Falta por relacionar las intensidades

$$\frac{I'}{I} = \frac{|A'_{\parallel}|^2 + |A'_{\perp}|^2}{|\mathbf{A}|^2} = 0.92$$

El 8% que se pierde es muy poco: los dieléctricos apenas reflejan en incidencias próximas a la normal.

**Problema** Un haz plano monocromático de longitud de onda  $\lambda$  incide desde un medio transparente de índice de refracción  $n$  al vacío, con ángulo de incidencia  $\theta = 60^{\circ}$  (11.5). La onda está linealmente polarizada de modo perpendicular al plano de incidencia. Calcúlese el índice de refracción  $n$  para que la superposición del haz incidente con el reflejado produzca un campo eléctrico nulo ( $|\mathbf{E}|^2 = 0$ ), en cualquier instante de tiempo en el plano  $z = -\frac{2\lambda}{3}$ . ( $\lambda$  es la longitud de onda en el medio).

**Respuesta** Tenemos que escribir una expresión para ambas ondas, sumarlas e imponer su anulación para todo instante en el plano  $z = -\frac{2\lambda}{3}$ . La onda incidente es

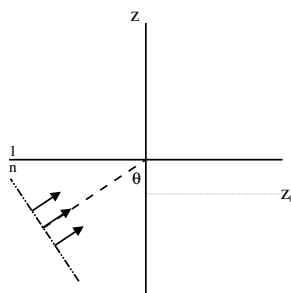
$$\mathbf{A}e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{u}_y$$

donde  $\mathbf{k} = k \sin \theta \mathbf{u}_x + k \cos \theta \mathbf{u}_z$  con  $k = |\mathbf{k}| = n \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$  ( $\lambda$  es la longitud de onda en el medio). La onda reflejada tiene un vector de ondas con signo cambiado en la componente  $z$ :  $\mathbf{k}'' = k \sin \theta \mathbf{u}_x - k \cos \theta \mathbf{u}_z$

$$r_{\perp} A e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{u}_y$$

Sumamos para obtener

$$\mathbf{E} = A \left( e^{ik \cos \theta z} + r_{\perp} e^{-ik \cos \theta z} \right) e^{i(k \sin \theta x - \omega t)} \mathbf{u}_y$$



**Figura 11.5:** Interfaz medio transparente – vacío.

El primer paréntesis debe ser cero si queremos que el campo se anule para todo  $t$ . Eso es porque la parte dependiente del tiempo es suma de dos funciones (seno y coseno) que no se anulan a la vez nunca. En definitiva

$$r_{\perp} = -e^{i2k \cos \theta z}$$

utilizando que  $z_0 = -\frac{2\lambda}{3}$  y  $\theta = 60^\circ$  obtenemos

$$r_{\perp} = -e^{-i\frac{4\pi}{3}}$$

para ligarlo con el índice de refracción del medio inicial necesitamos una expresión para  $r_{\perp}$ . Advertimos que es un caso de reflexión total (el coeficiente es un número complejo de módulo unidad), y las expresiones son entonces

$$r_{\perp} = e^{i\delta_{\perp}}$$

$$\tan\left(\frac{\delta_{\perp}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \left(\frac{1}{n}\right)^2}}{\cos \theta}$$

y como  $\delta_{\perp} = -\frac{4\pi}{3} + \pi$  se despeja  $n = \sqrt{3/2}$ .

**Problema (fórmulas de Fresnel)** *Se tienen dos medios isotropos y homogéneos. El primero es un dieléctrico transparente de índice  $n_1$ . Sobre la superficie que los separa incide con ángulo  $\theta_i$  una onda plana monocromática linealmente polarizada a  $45^\circ$  con el plano de incidencia. Si  $\theta_i = 0$  ¿puede la luz reflejada estar circularmente polarizada? Sabiendo que para  $\theta_i \neq 0$  la luz reflejada está elípticamente polarizada y la reflectividad es menor que la unidad, indique la naturaleza del segundo medio.*

**Respuesta** Para responder a la pregunta por la polarización de la luz reflejada aplicamos las fórmulas de FRESNEL:  $\theta_i = 0$  implica  $r_{\parallel} = -r_{\perp}$ . Nunca podremos tener un haz reflejado polarizado circularmente, ya que al cumplirse  $\begin{pmatrix} R_{\parallel} \\ R_{\perp} \end{pmatrix} = r_{\perp} \begin{pmatrix} -A_{\perp} \\ A_{\perp} \end{pmatrix}$  la amplitud reflejada es proporcional a un vector real, y por lo tanto el haz es linealmente polarizado.



Para caracterizar la naturaleza óptica de un medio tenemos que especificar la parte real e imaginaria del índice de refracción. Por ser la luz reflejada elíptica, puede ocurrir que:

- segundo medio transparente, pero en reflexión total ( $n_1 > n_2$  y  $\theta_i > \theta_c$ ) o bien
- segundo medio absorbente ( $\kappa_2 \neq 0$ ).

El hecho de que en el primer caso  $\mathcal{R} = 1$  indica que la respuesta es la segunda opción.

---

**Problema** *El tensor dieléctrico para cierto material es*

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} a & ib & 0 \\ -ib & a & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

siendo  $a, b, d$  números reales con  $a > b > 0$  y  $d \neq 0$ . Calcular los posibles vectores de onda y las polarizaciones correspondientes para una onda armónica plana con vector de ondas en el eje  $z$ .

**Respuesta** El medio cumple  $\hat{\epsilon}^+ = \hat{\epsilon}$  (matriz hermítica). Es transparente y ópticamente activo. Vamos a atacar el problema como el de los medios no activos, utilizando las ecMm. En particular se llegaba a la relación

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \mathbf{E}_0 + \mu_0 \omega \hat{\epsilon} \mathbf{E}_0 = 0$$

como  $k_x = k_y = 0$  y  $k_z = k$  y utilizando  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  la matriz queda

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 a - k^2 & i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 b & 0 \\ -i \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 b & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 a - k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = 0$$

para que  $|\mathbf{M}| = 0$  los valores que puede tomar  $k$  son dos:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{a \pm b}$$

entonces

$$\mathbf{M}(k_+) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \begin{pmatrix} -b & ib & 0 \\ -ib & -b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

el vector  $\mathbf{E}_0$  que satisface la ecuación de autovalores  $\mathbf{M}(k_+) \mathbf{E}_0 = 0$  es

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

con  $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ . Es luz circular dextrógira. Siguiendo los mismos pasos se halla

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_- \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \end{pmatrix}$$

para la ecuación de autovalores  $M(k_-)\mathbf{E}_0 = 0$  (luz circularmente polarizada levógira).

Cuando estudiábamos los medios no activos teníamos luz linealmente polarizada. En medios activos la polarización será en general elíptica.

---

### Problema (actividad óptica)

Si en el problema anterior  $\mathbf{E}(z=0, t)$  está linealmente polarizado según el eje  $x$  calcular el estado de polarización en  $z=d$ .

### Respuesta

$$\mathbf{E}(0, t) \propto \mathbf{u}_x$$

dicho de otro modo

$$\mathbf{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

hemos encontrado que las ondas que se propagan según el eje  $z$  deben ser combinaciones lineales de las ondas que escribimos en el problema anterior. Es decir

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{A}_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_+z - \omega t)} + \mathbf{A}_- \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_-z - \omega t)}$$

vamos a determinar los coeficientes de la combinación lineal con ayuda de las condiciones del problema

$$\mathbf{E}(0, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_- \\ i(\mathbf{A}_- - \mathbf{A}_+) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$$

en consecuencia  $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_- = \frac{E_0}{2}$ . El campo es

$$\mathbf{E}(d, t) = \frac{E_0}{2} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_+d)} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(k_-d)} \right) e^{-i\omega t}$$

una posible forma de saber el estado de polarización es sacar la fase así

$$\mathbf{E}(d, t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{(k_+ + k_-)}{2}d} e^{-i\omega t}$$

con  $\theta = (k_+ - k_-) \frac{d}{2}$ . En esta expresión resulta muy claro que la luz es linealmente polarizada, formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ .

La dirección de polarización va rotando a medida que el haz se va propagando. Esto es lo que recibe el nombre de *actividad óptica*.

---

**Problema** *Una onda armónica plana incide desde el vacío sobre un medio anisótropo uniaxial siendo el ángulo de incidencia distinto de cero. El eje óptico es perpendicular al plano de separación entre el vacío y el medio, y  $n_e > n_o$ . Se desea saber el estado de polarización de la onda refractada cuyo vector de ondas forme el mayor ángulo con la normal a la superficie.*

**Respuesta** En general se propagarán dos ondas con polarizaciones distintas. Para determinar los vectores de onda tenemos que cortar la superficie de vectores de onda con el plano de incidencia. Se trata de una superficie bifoliada, una de cuyas secciones es una semicircunferencia y una semielipse. Como el radio del elipsoide de vectores de onda en el plano perpendicular al eje óptico (que es su eje de revolución) es  $n_e \frac{\omega}{c}$  sabemos que la elipse será más grande que la circunferencia. La proyección sobre el eje  $x$  de ambas ondas es la misma. La ordinaria se traza unívocamente dibujando el extremo del vector en la circunferencia y la extraordinaria poniéndolo en la elipse.

De las dos, la que mayor ángulo forma con la normal es la ordinaria. Su polarización es lineal perpendicular al plano formado por  $\mathbf{k}_o$  y el eje óptico, es decir, en nuestra elección de ejes, sobre el eje  $y$ .

---

**Problema** *Si se observa un objeto muy lejano a través de una lámina planoparalela de un medio anisótropo se ve una imagen en lugar de las dos imágenes que se verían si el objeto estuviera muy cercano. ¿Por qué? Considérese que sobre la lámina incide un haz de rayos paralelos procedentes de un objeto puntual en el infinito y que se observa en el plano focal imagen de una lente delgada convergente.*

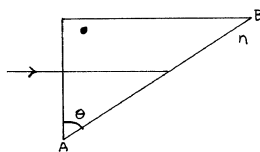
**Respuesta** La luz llega en forma de oap, según la hipótesis sugerida en el enunciado. Esa onda, en general, dará lugar a dos ondas distintas dentro del medio anisótropo, que a su vez se propagarán separadamente a la salida. Si nos dicen que sólo se ve una a la salida, quiere decir que las dos tienen la misma dirección (es decir, que sólo hay un vector de ondas a la salida:  $\mathbf{k}''$ ).

Sabemos que  $\mathbf{k}_t$  se conserva (condiciones de contorno). En la primera cara de la lámina

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}'_t$$

Por ser la lámina planoparalela podemos escribir la igualdad

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}'_t = \mathbf{k}''_t$$



**Figura 11.6:** Prisma anisótropo uniáxico.

tanto  $\mathbf{k}$  como  $\mathbf{k}''$  están en un medio isotrópico. Las tres componentes de  $\mathbf{k}''$  están especificadas, al tener una condición sobre  $\mathbf{k}_t''$  y la condición (que no se verifica para  $\mathbf{k}'$ )

$$|\mathbf{k}''| = n \frac{\omega}{c}$$

El reparto energético entre los rayos emergentes depende del eje óptico, el estado de polarización de la onda incidente y los ángulos de incidencia, por lo que no podemos precisar nada sobre él.

**Problema** Una onda armónica plana incide normalmente sobre una de las caras de un prisma tal como indica la figura. El prisma está hecho de un medio anisótropo uniáxico con el eje óptico perpendicular al plano de la figura. Calcular el índice de refracción  $n$  del medio que rodea al prisma para que la onda ordinaria sufra reflexión total en la cara  $AB$  mientras que la extraordinaria no la sufre. Considérense  $\theta = 60^\circ$ ,  $n_o = 1.66$  y  $n_e = 1.49$ .

**Respuesta** Pasos a seguir: introducir la luz dentro del prisma. Las componentes tangenciales dentro del prisma, por aplicación de las condiciones de contorno, serán (las de ambas ondas) cero, de modo que la propagación continuará en la dirección de incidencia.

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_o| &= n_{or} \frac{\omega}{c} \\ |\mathbf{k}_e| &= n_{ex} \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

Tenemos que imponer que la onda ordinaria sufra reflexión total: la componente tangencial del vector de ondas debe ser tal que no haya ninguna componente tangencial en el segundo medio que la pueda igualar

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_o| \sin \theta &= n_o \frac{\omega}{c} \sin \theta \geq \frac{\omega}{c} n \\ n_o \sin \theta &\geq n \end{aligned}$$

La condición análoga para la onda extraordinaria es

$$n > n_e \sin \theta$$

combinando ambas desigualdades

$$\begin{aligned} n_o \sin \theta &\geq n > n_e \sin \theta \\ 1.44 &\geq n > 1.29 \end{aligned}$$

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 11.7:** Los polarizadores del problema,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  respectivamente.

ése es el intervalo de índices posibles.

*Comentario:* este prisma es un polarizador (a la salida tenemos luz linealmente polarizada independientemente del estado de polarización de la onda de incidencia) . La componente ordinaria no progresa más allá del prisma en la dirección de interés (se suele colocar otro prisma debajo para enderezar el rayo que nos interesa).

---

**Problema** Supóngase que un polarizador lineal gira a una velocidad angular  $\Omega$  entre un par de polarizadores cruzados entre sí (figura 11.7). Demuéstrese que la intensidad luminosa emergente es

$$I(t) = \frac{I_0}{8} (1 - \cos 4\Omega t)$$

donde  $I_0$  es la intensidad emergente del primer polarizador.

**Respuesta** La forma más cómoda es escribir las matrices y aplicarlas al estado de polarización inicial. Vamos a suponer que la polarización inicial es lineal y está vibrando según el eje  $x$ . Si  $I_0 = |\mathbf{A}|^2$

$$\mathbf{A} = \sqrt{I_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ésta es la amplitud que abandona el primer polarizador. Las matrices son

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega t & \sin \Omega t \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \cos \Omega t & \sin^2 \Omega t \end{pmatrix}$$

La amplitud emergente debe ser

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= P_3 P_2 \mathbf{A} \\ &= \sqrt{I_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \Omega t \cos \Omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

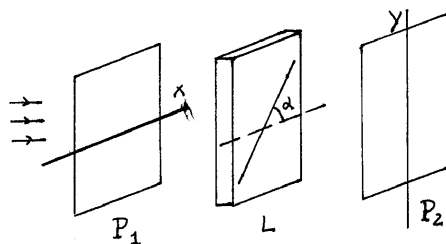


Figura 11.8: Sistema de polarizadores.

y la intensidad correspondiente

$$\begin{aligned}
 I' &= I_0 (\sin \Omega t \cos \Omega t)^2 \\
 &= \frac{I_0}{4} \sin^2 2\Omega t \\
 &= \frac{I_0}{8} (1 - \cos 4\Omega t)
 \end{aligned}$$

Sin hacer matrices, se puede razonar que el haz de luz a la salida del  $P_2$  estará vibrando en la dirección de su eje, es decir

$$\mathbf{A}'' = \sqrt{I_0} \cos \Omega t \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

el  $P_3$  sólo deja pasar la componente  $y$ , por lo que

$$\mathbf{A}' = \sqrt{I_0} \cos \Omega t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \Omega t \end{pmatrix}$$

que es el resultado al que hemos llegado usando el formalismo matricial.

**Problema** Sea el sistema de la figura.  $P_1$  y  $P_2$  son dos polarizadores cuyos ejes de transmisión coinciden con el  $x$  y el  $y$ , respectivamente, y  $L$  es una lámina planoparalela de un medio anisótropo uniaxial con eje óptico paralelo a las caras, formando un ángulo  $\alpha$  con el  $x$ . Suponiendo que perpendicularmente a  $P_1$  inciden sobre el sistema dos ondas planas monocromáticas de longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , ¿cuánto deberán valer  $\alpha$  y el espesor de la lámina para que el sistema deje pasar únicamente  $\lambda_1$  con transmisión máxima eliminando completamente el otro haz?

**Respuesta** Siempre podemos calcular las matrices de  $L$  y  $P_2$  y aplicarlas al estado de polarización procedente del primer polarizador,  $P_1$ . El ángulo del eje óptico de la lámina con el eje  $x$  lo etiquetamos  $\alpha$ , por lo que el ángulo con el eje  $y$  es  $\bar{\alpha} = \alpha - \pi/2$ .

$$\mathbf{A} = \sqrt{I} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 11.9:** Secciones por el plano  $xy$  de  $P_1$ ,  $L$  y  $P_2$  respectivamente

La matriz de la lámina retardadora depende de la longitud de onda,

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos^2 \bar{\alpha} + e^{i\delta} \sin^2 \bar{\alpha} & \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} (1 - e^{-i\delta}) \\ \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\alpha} (1 - e^{-i\delta}) & \sin^2 \bar{\alpha} + e^{i\delta} \cos^2 \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con  $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_0 - n_e) d$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}_2 \mathbf{L} \mathbf{A}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \sqrt{I} \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\alpha} (1 - e^{-i\delta}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ I' &= I \sin^2 2\bar{\alpha} \sin^2 \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

pero tenemos  $\delta_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} (n_o - n_e) d$ .

1. Si  $I'_{\lambda_2} = 0$  entonces  $\sin \frac{\delta_2}{2} = 0$ . Por tanto  $\delta_2 = 2\pi m$  con  $m \in \mathcal{Z}$ . Ya tenemos una condición sobre  $d$  de la lámina.

$$d = \frac{m\lambda_2}{n_o - n_e}$$

Fijémonos en que para que la luz llegue según el eje  $x$  al segundo polarizador, es necesario que la lámina no cambie el estado de polarización de la luz incidente, es decir, que  $\delta = 2\pi m$ .

2. Para la segunda condición es necesario que se maximicen los dos factores

$$\sin 2\bar{\alpha} = \pm 1$$

de donde  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$  y

$$\sin^2 \left( \frac{\delta_1}{2} \right)$$

## 11 Ejercicios y problemas

debe ser máximo también, de donde

$$\begin{aligned}\delta_1 &= (2M + 1)\pi \\ &= 2\pi M \frac{\lambda_2 (n_o - n_e)_{\lambda_2}}{\lambda_1 (n_o - n_e)_{\lambda_1}}\end{aligned}$$

con  $M \in \mathcal{Z}$ . Si suponemos que la diferencia de índices es la misma para ambas longitudes de onda

$$\delta_1 = 2\pi M \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

todo lo que podemos escribir es

$$\frac{2M + 1}{2m} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

que no podríamos verificarlo siempre, porque a un lado tenemos un racional y a otro un real. Pero tenemos dos escapatorias

- a) Los racionales son densos en los reales, y podemos aproximar un real cada vez más eligiendo  $m$  y  $M$  cada vez más grandes.
- b) En el mundo real, donde no se puede medir con precisión infinita, el cociente de la izquierda es en definitiva también un racional.

Si tomamos un ejemplo práctico,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 589.6nm \\ \lambda_2 &= 589.0nm\end{aligned}$$

y por simplificar,  $M = m$ , al despejar  $m$  de

$$\frac{2m + 1}{m} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

obtenemos  $m \simeq 491$  y  $I_1' = 0.99995I \simeq I$

---

**Problema** *Un haz de luz está formado por una mezcla de luz linealmente polarizada (intensidad  $I_p$ ) y luz no polarizada (intensidad  $I_{np}$ ). Indíquese cómo pueden obtenerse  $I_p$  e  $I_{np}$  a partir de la medida de la intensidad que atraviesa un polarizador que puede orientarse como convenga.*



**Respuesta** Tenemos una combinación de luz linealmente polarizada y luz natural.

$$I' = \frac{I_{np}}{2} + I_p \cos^2 \theta$$

Variando el  $\theta$  podemos obtener las dos cantidades. Si representamos la intensidad emergente frente a la posición del polarizador,  $I'(\theta)$  obtenemos una curva  $\cos^2 \theta$

Tenemos una serie de máximos  $I'_{max}$  y de mínimos  $I'_{min}$

$$\begin{aligned} I'_{max} &= \frac{I_{np}}{2} + I_p \\ I'_{min} &= I_{np} \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} I_{np} &= 2I'_{min} \\ I_p &= I'_{max} - I'_{min} \end{aligned}$$

**Problema** Un haz plano de intensidad  $I_0$  incide con ángulo  $\alpha$  sobre un plano en el que se encuentran dos rendijas separadas una distancia  $d$ .

1. Calcúlese la intensidad en un plano paralelo al que contiene la rendijas y suficientemente alejado.
2. En una de las rendijas se coloca una lámina absorbente cuya transmitancia es 0.01. Determínese la visibilidad.

**Respuesta**

1. Se cumple la hipótesis  $x, d \ll D$ . Vamos a suponer  $n = 1$ . Hay ya una diferencia de fase ya al llegar al propio plano que contiene las aberturas. Tenemos que calcular ese desfase previo para considerarlo en el argumento del coseno del término de interferencia,  $g_2 - g_1 = k(r_2 - r_1)$ . La diferencia de fases al llegar a las aberturas es  $\Delta$ . El camino óptico para la onda superior es pues  $r_1 + \Delta$  y para la inferior,  $r_2$ . La diferencia de fases al llegar a la pantalla es, pues

$$dif = k(r_2 - r_1) - k\Delta$$

$\Delta$  se obtiene fácilmente con argumentos geométricos:  $\Delta = d \sin \alpha$ . Si aprovechamos la condición  $x, d \ll D$  podemos además aproximar  $r_2$  y  $r_1$  y la diferencia de fase queda

$$dif \simeq \frac{2\pi xd}{\lambda D} - kd \sin \alpha$$

en virtud de  $x, d \ll D$  podemos escribir, también,  $I_1 \simeq I_2$ . La expresión final es

$$I = 2I_2 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi xd}{\lambda D} - kd \sin \alpha \right) \right)$$

## 11 Ejercicios y problemas

- Ponemos una lámina absorbente, por ejemplo en la abertura superior. La intensidad que la atraviesa es un 1 % de la que incide sobre ella.  $I'_1 = 0.01I_1 \simeq 0.01I_2$ . El enunciado no nos da ninguna indicación sobre el efecto de esta lámina absorbente sobre la fase, por lo que ponemos una cantidad indeterminada,  $\delta$

$$I = I_2 \left( 1 + 0.01 + 2\sqrt{0.01} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{xd}{D} - kd \sin \alpha + \delta \right) \right)$$

la visibilidad es

$$\begin{aligned} V &= \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \\ I_{max} &= 1.21I_2 \\ I_{min} &= 0.81I_2 \\ V &= 0.198 \end{aligned}$$

la lámina absorbente hace que los mínimos ya no sean nulos, y por lo tanto, la visibilidad no es buena.

**Problema (Young con una fuente extensa)** En el interferómetro de YOUNG de la figura 11.10, las dos rendijas son iluminadas por una fuente extensa. La intensidad que se obtiene en la pantalla debida a una fuente puntual en  $x'$  es, si  $x' \ll B$ ,

$$dI_{x'} = 2J_0 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} d \left( \frac{x}{D} + \frac{x'}{B} \right) \right] \right\} dx'$$

Donde  $J_0$  es una constante.

- Calcular la figura interferencial considerando la fuente extensa entre  $-a/2$  y  $a/2$  como un continuo de fuentes puntuales incoherentes entre sí.
- Calcular la visibilidad.

**Respuesta** Según dice el enunciado

$$dI_{x'} = 2J_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} d \left( \frac{x}{D} + \frac{x'}{B} \right) \right) \right) dx'$$

el término  $\frac{x'}{B}$  en el argumento del coseno es la diferencia de fase debida a que la fuente puntual no está en el origen (esta fórmula sirve para la intensidad creada por uno cualquiera de los puntos incoherentes de la fuente extensa) y las ondas no llegan a la abertura con igual fase. Si se cumple que  $x', d' \ll B$

$$k(r'_2 - r'_1) \simeq \frac{2\pi dx'}{B}$$

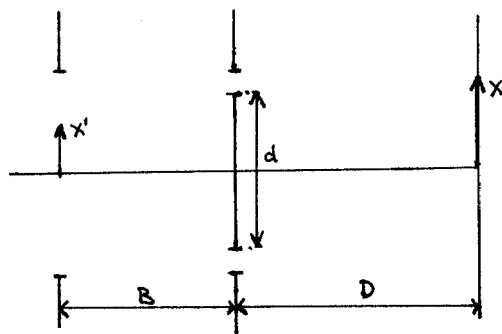


Figura 11.10: Interferómetro de Young.

En virtud de la incoherencia de las fuentes puntuales sobre la pantalla de observación no se suman amplitudes (puesto que no hay interferencia entre las ondas provenientes de distintos puntos de la fuente extensa) sino intensidades.

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dI_{x'}$$

Haciendo la integral y teniendo en cuenta que  $\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$  el resultado es

$$I = 2J_0a \left( 1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ad}{\lambda B}\right) \cos\left(\frac{2\pi xd}{\lambda D}\right) \right)$$

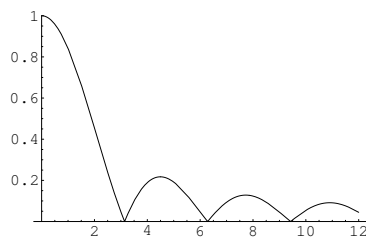
donde hemos introducido la función seno cardinal,  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Para hallar la visibilidad calculamos los máximos y mínimos, teniendo en cuenta que el seno cardinal cambia de signo...

$$\begin{aligned} I_{max} &= 2J_0a \left( 1 + \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ad}{\lambda B}\right) \right| \right) \\ I_{min} &= 2J_0a \left( 1 - \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ad}{\lambda B}\right) \right| \right) \end{aligned}$$

De donde  $V = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ad}{\lambda B}\right) \right|$  (figura 11.11). La función crece a medida que el argumento decrece. Cuanto mayor es el tamaño de la fuente peor es la visibilidad. La visibilidad también descende si se separan las aberturas ( $d$  crece) o si se reduce la distancia de la fuente a éstas ( $B$ ). El primer mínimo nulo,

$$\frac{\pi ad}{\lambda B} = \pi$$

marca un criterio cuantitativo razonable para distinguir una zona de buena visibilidad de otra de visibilidad mucho más pobre.



**Figura 11.11:**  $V = V\left(\frac{\pi ad}{\lambda B}\right)$

**Ejemplo** Si se tienen los datos  $a = 1mm$ ,  $B = 10cm$ ,  $\lambda = 600nm$  ¿cuál es la separación entre orificios ( $d$ ) que hace  $V = 0$ ?

$$\begin{aligned}\frac{\pi ad}{\lambda B} &= \pi \\ d &= \frac{\lambda B}{a} \\ &= 0.06mm\end{aligned}$$

Para  $V \neq 0$  necesitamos  $d < 0.06mm$ . El interferómetro de YOUNG es muy restrictivo cuando opera con fuentes extensas. Eso hace que se puedan medir distancias (cualquiera de las que están en el argumento del coseno) con gran precisión.

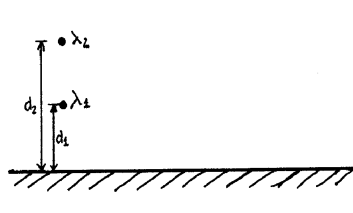
El tipo de condiciones que hemos visto aparece en la bibliografía bajo el epígrafe “coherencia espacial”.

Por otra parte, hay que subrayar que si bien nuestro interés aquí ha sido encontrar zonas de  $V$  alto (para poder observar mejor la interferencia) hay muchas aplicaciones de medida que se basan en el efecto que acabamos de ver de rápida pérdida de visibilidad. Si conocemos los datos del interferómetro ( $d, \lambda, B$ ) podemos medir el tamaño de la fuente separando las aberturas hasta que  $V = 0$ : entonces  $a = \frac{\lambda B}{d}$ . Esta técnica se aplica a la determinación del diámetro aparente de las estrellas (conocida su distancia...) y entonces el dispositivo se llama *interferómetro estelar de MICHELSON*.

**Problema (interferencia con un espejo)** En el montaje de la figura 11.12 se tienen dos fuentes puntuales incoherentes a distancias  $d_1$  y  $d_2$  del espejo que emiten con longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente. Determinar la relación que debe haber entre  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para que la figuras interferenciales de las dos fuentes coincidan.

**Respuesta** Antes de atacar el problema en sí debemos calcular la figura interferencial creada por una sola fuente. La interferencia es posible porque la luz llega por dos vías a la pantalla:

1. directamente
2. reflejándose en el espejo



**Figura 11.12:** Interferencia con un espejo.

Siempre que se mantenga el requisito de diferencia de fase razonable, se podrá decir que estas dos ondas son coherentes.

Podemos hacer la misma operación que hicimos para simplificar el tratamiento del interferómetro de Michelson: sustituir los espejos por las imágenes que crean (pero teniendo en cuenta el desfase que introducen). En este caso, tendremos dos fuentes puntuales simétricas respecto al plano del espejo, y el sistema será equivalente a un interferómetro de YOUNG. Se cumple, como para este, que  $x, d \ll D$ . Entonces

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2xd}{D} + \delta \right) \right)$$

Donde  $\delta$  es el desfase (desconocido) introducido por la reflexión en un medio absorbente cual es el espejo. Por sencillez hemos considerado  $|\text{coef reflexión}| \simeq 1$ ; Si no fuese así habría que arrastrar por todas partes  $I_2 = |r|^2 I_1$ .

Ahora podemos considerar las dos fuentes. Se cumple, respectivamente para cada una de ellas:

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{2xd_1}{D} + \delta_1 \right) \right)$$

$$I = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_2} \frac{2xd_2}{D} + \delta_2 \right) \right)$$

Como las fuentes son incoherentes entre sí, cada par de imágenes debido a una fuente crea su figura de interferencia independiente. Queremos que la distribución de intensidad en  $x$  sea igual para las dos fuentes:

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} \frac{2xd_1}{D} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \frac{2xd_2}{D}$$

implica la condición

$$\frac{d_1}{\lambda_1} = \frac{d_2}{\lambda_2}$$

además, debe cumplirse  $\delta_1 = \delta_2 \pmod{2\pi}$  para que los máximos coincidan.

**Problema** En un interferómetro de MICHELSON iluminado de forma normal a los espejos se tiene un máximo de intensidad para una frecuencia  $\omega$ .

1. Calcular la frecuencia más próxima a  $\omega$  para la que también se tendría máxima intensidad para la misma separación entre los espejos.
2. Misma cuestión para un FABRY-PEROT.

**Respuesta** Hay que imponer que para la misma configuración del interferómetro tengamos la misma figura para  $\omega'$  y para  $\omega$ , utilizando la condición de máximo, y seleccionar el  $\omega'$  más próximo a  $\omega$ . La condición de máximo para  $\theta = 0$  es

$$\frac{2\pi}{\lambda} n2d + \delta = 2\pi M$$

en frecuencias ( $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ) tenemos

$$\frac{\omega}{c} 2nd + \delta = 2\pi M$$

de donde, para cada frecuencia, respectivamente

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{c}{2nd} (2\pi M - \delta) \\ \omega' &= \frac{c}{2nd} (2\pi M' - \delta)\end{aligned}$$

Las dos frecuencias más próximas a  $\omega$  para las que también se tiene máximo son las que cumplen  $M' = M \pm 1$ .

$$\omega' = \omega \pm \frac{\pi c}{nd}$$

Esta deducción la hemos hecho suponiendo que no había dispersión en el índice de refracción ( $n(\omega) = n(\omega')$ ) ni en el desfase ( $\delta(\omega) = \delta(\omega')$ ), lo que no es generalmente el caso.

El desarrollo del problema para un interferómetro de FP es análogo.

**Problema (poder resolutivo de un FP)** La separación entre los dos espejos de un interferómetro de FABRY-PEROT es de 1 cm. Calcular la reflectancia de los espejos necesaria para distinguir las dos frecuencias  $\omega_1 = 3.543320 \times 10^{14}$  rad/s y  $\omega_2 = 3.543387 \times 10^{14}$  rad/s. Supóngase que el medio en el interior del interferómetro es de índice  $n = 1$ , que la incidencia es normal y además desprecie el cambio de fase producido en las reflexiones.

**Respuesta** El poder resolutivo del interferómetro tiene que ser tal que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  estén resueltas:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq \frac{\pi}{2} M \sqrt{F}$$

Tenemos que encontrar el orden interferencial para poder despejar  $F$ , pues  $F$  es la magnitud que podemos poner en función de  $|r_1 r_2|$ . Determinamos  $M$  imponiendo que

a  $d = 1\text{cm}$  estemos observando máximos en estas longitudes de onda. La condición de máximo es

$$\frac{2\pi}{\lambda}nd \cos \theta + \delta = M\pi$$

Como el enunciado del problema no especifica  $n, \delta, \theta$ , tomamos el caso sencillo  $n = 1, \delta = 0, \theta = 0$ . El orden interferencial es pues  $M = \frac{2d}{\lambda}$ . Pasamos de frecuencias a longitudes de onda  $\lambda_i = \frac{2\pi c}{\omega_i}$ . Para el cálculo del orden interferencial podemos usar en el denominador la media de las  $\lambda_i$  o un valor de una de ellas, puesto que son muy próximos. Con todo,

$$M = 3760$$

y  $F \geq 81$ . Ahora entra en juego la expresión de  $F$

$$F = \frac{4|r_1r_2|}{(1 - |r_1r_2|)^2}$$

Utilizando  $|r_1r_2| = x$  como incógnita y resolviendo la ecuación cuadrática, tenemos que para  $F = 81$  (su valor mínimo)  $|r_1r_2| = 0.80$  (hay otra solución, pero es superior a 1, y por lo tanto, no aplicable a un coeficiente de reflexión). Por lo tanto, el resultado final es

$$|r_1r_2| \geq 0.80$$

**Problema (FP con medio anisótropo)** *Una onda armónica plana incide perpendicularmente sobre un interferómetro de FABRY-PEROT. El interior del interferómetro está ocupado totalmente por un medio anisótropo uniáxico cuyo eje óptico es paralelo a los espejos. La onda incidente puede estar linealmente polarizada vibrando según el eje óptico en un caso, y perpendicularmente al eje óptico en otro. En ambos casos la intensidad incidente es la misma. Razónese brevemente si la intensidad transmitida será o no la misma en los dos casos, para una separación arbitraria entre los espejos.*

**Respuesta** Para el interferómetro de FP se tiene

$$I_{max} = \frac{T_{max}}{1 + F \sin^2 \varphi} I$$

con  $\theta = 0$ , el desfase entre ondas consecutivas es  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}nd + \delta$ . Pero esto no vale en un medio anisótropo. Debemos expresarlo de otro modo

$$\varphi = |\mathbf{k}|d + \delta$$

1. Luz vibrando según el eje óptico, onda extraordinaria:  $|\mathbf{k}_e| = n_e \frac{\omega}{c}$  en este caso particular en que  $\mathbf{k} \perp e.o.$
2. Luz perpendicular al eje óptico, onda ordinaria  $|\mathbf{k}_o| = n_o \frac{\omega}{c}$

**Figura 11.13:** Difracción de Fresnel y de Fraunhofer por una abertura circular.

El módulo de  $\mathbf{k}$  es distinto para cada onda  $\varphi$  es distinta dependiendo de la polarización y por lo tanto  $I'$  es distinto para cada onda (polarización).

Seguro que  $T_{max}$  y  $F$  también son distintos, pero este efecto será menor, ya que la figura de interferencia de un FP es sobre todo sensible a los cambios de fase.

**Problema** *Un haz plano monocromático incide normalmente sobre una abertura circular de radio  $R$ . Calcular el campo en el punto  $P$  a una distancia  $z$  del centro de la abertura usando las aproximaciones de FRESNEL y FRAUNHOFER.*

**Respuesta** La expresión para la onda difractada en la aproximación de FRESNEL es

$$\hat{u} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int d\xi d\eta t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{i\frac{k}{2z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)}$$

- el coeficiente de transmisión vale cero salvo sobre  $(\xi, \eta) \in \Sigma$ , que vale 1.
- La iluminación es una oap.

$$u = u_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- La incidencia es normal:  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$ . La abertura está en  $z = 0$ , con lo que

$$u = u_0 e^{ikz} = u_0$$

El punto  $P$  tiene coordenadas  $0, 0, z$ , con lo que la integral resulta

$$\hat{u} = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} u_0 \int d\xi d\eta e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)}$$

lo hacemos en polares, evidentemente  $\xi = \rho \cos \theta$  y  $\eta = \rho \sin \theta$ . La integral en  $\rho$  se hace con el cambio de variable  $q = \rho^2$

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} u_0 \pi \int_0^{R^2} dq e^{i\frac{k}{2z}q} \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} u_0 \pi \frac{1}{i\frac{k}{2z}} \left( e^{i\frac{k}{2z}R^2} - 1 \right) \\ &= u_0 e^{ikz} \left( 1 - e^{i\frac{kR^2}{2z}} \right) \end{aligned}$$



---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 11.14:** La lente se desplaza paralelamente a la abertura.

La fórmula válida para la aproximación de FRAUNHOFER se aplica siguiendo los mismo pasos

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \int d\xi d\eta t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{z}(x\xi+y\eta)} \\ &= \frac{e^{ik\left(z+\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \int_{\Sigma} d\xi d\eta u_0 \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} u_0 \pi R^2\end{aligned}$$

Sabemos que la fórmula de FF es una aproximación de la de FRESNEL en el límite de  $z \rightarrow \infty$ . Esta condición la podemos tener en cuenta desarrollando en sdp la expresión obtenida mediante la fórmula de FRESNEL:

$$\begin{aligned}\hat{u} &\simeq u_0 e^{ikz} \left( 1 - 1 - ik \frac{kR^2}{2z} + \dots \right) \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} u_0 \pi R^2\end{aligned}$$

concluimos que el resultado vía FF es consistente con la aproximación realizada.

---

**Problema** *La figura de difracción de cierta abertura se observa en el plano focal imagen de una lente. Describir lo que le ocurre a la figura de difracción si la lente se desplaza paralelamente al plano que contiene la abertura.*

**Respuesta** Tenemos una abertura genérica iluminada con una onda genérica. Para responder a esta pregunta es necesario añadir la condición de que la lente sea infinita, algo que hemos tomado implícitamente como cierto en todo lo que hemos hecho hasta ahora, puesto que si no hubiéramos debido tener en cuenta la difracción causada por ella.

Lo que tiene de particular el plano focal imagen es que la luz que llega a cualquier punto ha tenido que arribar a la lente en forma de haz de rayos paralelos. Si bajamos la lente una distancia  $\Delta$ , la imagen (cada punto) bajará una cantidad  $\Delta$ . En principio la intensidad será la misma.

La figura debe ser la misma pero desplazada en la misma medida en que desplazemos la lente.

**Problema** Sobre una abertura circular de radio  $R$  se coloca una transparencia descrita por el coeficiente de transmisión  $t(x) = \alpha(1 + q \cos(px))$  siendo  $\alpha, p, q$  constantes. Calcular la figura de difracción de FRAUNHOFER en el plano focal imagen de una lente si la abertura se ilumina de forma normal con una onda plana y monocromática. Considérese  $p \gg 1/R$ .

**Respuesta** El coeficiente de transmisión es ahora

$$t(\xi, \eta) = \alpha(1 + q \cos p\xi)$$

con  $p \gg \frac{1}{R}$ . La fórmula a utilizar es la de FF

$$\hat{u}(x', y') \propto \int d\xi d\eta t(\xi, \eta) u(\xi, \eta) e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)}$$

podemos considerar  $u = u_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = u_0 e^{ikz} = u_0$  tomando el plano de la abertura como  $z = 0$ .

$$\hat{u}(x', y') \propto \alpha u_0 \int_{\Sigma} d\xi d\eta (1 + q \cos(p\xi)) e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)}$$

Lo más cómodo es expresar el coseno en términos de exponenciales complejas

$$\hat{u}(x', y') \propto \alpha u_0 \int_{\Sigma} d\xi d\eta \left(1 + \frac{q}{2} (e^{ip\xi} + e^{-ip\xi})\right) e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)}$$

rompemos la integral según los términos del integrando

$$\begin{aligned} & \alpha u_0 \int_{\Sigma} d\xi d\eta e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)} \\ & \alpha u_0 \frac{q}{2} \int_{\Sigma} d\xi d\eta e^{-i\frac{k}{f'}((x' - p\frac{f'}{k})\xi + y'\eta)} \\ & \alpha u_0 \frac{q}{2} \int_{\Sigma} d\xi d\eta e^{-i\frac{k}{f'}((x' + p\frac{f'}{k})\xi + y'\eta)} \end{aligned}$$

las tres integrales son la misma, salvo un desplazamiento de  $x'$ . Sólo tenemos que hacer una. Conocemos la integral de la primera. Si etiquetamos la integral como

$$\hat{u}_{circ}(x', y') = u_0 \int_{\Sigma} d\xi d\eta e^{-i\frac{k}{f'}(x'\xi + y'\eta)}$$

podemos expresar abreviadamente el resultado como

$$\hat{u}(x', y') \propto \hat{u}_{circ}(x', y') + \frac{q}{2} \hat{u}_{circ}\left(x' - p\frac{f'}{k}, y'\right) + \frac{q}{2} \hat{u}_{circ}\left(x' + p\frac{f'}{k}, y'\right)$$

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 11.15:** Aspecto en la pantalla de observación.

como se ve, cada uno de los términos tiene un peso modulado por un coeficiente,  $\frac{q}{2}$  o 1. Podríamos ahora sustituir las funciones de BESSEL, etc.

Podemos utilizar la condición  $p \gg \frac{1}{R}$  para simplificar la forma que tendrá el módulo al cuadrado del campo (la intensidad).

$p$  es el factor de separación de las tres funciones. Esto lo que puede suponer es que al hacer el cuadrado, los términos cruzados sean despreciables, al no solaparse las figuras de difracción dos a dos. Para verificarlo necesitamos una estimación del tamaño de la figura de difracción: usaremos el radio del primer máximo (en cuyo interior está el 84 % de la intensidad).  $r' = 1.22 \frac{\lambda f'}{2R}$ . Esperamos que

$$\frac{pf'}{k} \gg \frac{f'}{kR} = \frac{f'\lambda}{2\pi R} = \frac{1}{1.22\pi} r'$$

lo que, a partir de la condición que nos han dado es cierto. Por lo tanto confirmamos el que las figuras de difracción no solapan (tienen una distancia de  $\frac{pf'}{k}$  sobre el eje  $x$  con la central).

---

**Problema** *Se observa la figura de difracción en aproximación de FRAUNHOFER producida por una onda armónica y plana de longitud de onda  $\lambda$  que incide de forma normal sobre una rendija de anchura  $a$ . Si se dobla la anchura de la rendija  $a' = 2a$ , ¿cuál debería ser la longitud de onda  $\lambda'$  para que los máximos y mínimos de difracción estuvieran en los mismos lugares?*

**Respuesta** Buscamos  $\lambda'$  tal que  $a' = 2a$ . Tenemos que calcular la figura de difracción, cambiar los parámetros e imponer que máximos y mínimos estén en los mismos sitios.

$$\begin{aligned} \hat{u}(x') &\propto \text{sinc}\left(\frac{\pi x' a}{\lambda f}\right) \\ \hat{u}'(x') &\propto \text{sinc}\left(\frac{\pi x' a'}{\lambda' f'}\right) \end{aligned}$$

Las funciones tienen que ser iguales, salvo constante de proporcionalidad. Esto implica que los argumentos deben ser iguales.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\lambda} &= \frac{a'}{\lambda'} \\ \lambda' &= \frac{a'}{a}\lambda \\ &= 2\lambda\end{aligned}$$

necesitamos una onda con el doble de longitud de onda.

---

**Problema** Calcúlese la distancia mínima entre dos puntos de la superficie de Marte para que sus imágenes puedan resolverse por un telescopio cuya abertura es circular con diámetro 60 cm. Considérese que la distancia Tierra-Marte es de  $56 \times 10^6$  km y que la luz es monocromática con  $\lambda = 560$  nm.

**Respuesta**  $r'$  es el radio del máximo central de la figura de difracción:

$$d \geq r' = 1.22 \frac{\lambda f'}{2R}$$

El poder resolutivo del instrumento óptico es

$$\frac{D}{L} = \frac{d}{f'} \geq 1.22 \frac{\lambda}{2R}$$

donde  $D$  es la distancia entre puntos que queremos resolver y  $L$  su distancia al instrumento.  $2R = 60$  cm,  $L = 56 \times 10^6$  Km y  $\lambda = 560$  nm. La incógnita es  $D$  en la ecuación

$$\frac{D}{L} = 1.22 \frac{\lambda}{2R}$$

de donde  $D = 63.8$  Km. Los detalles deben distar entre sí más de 64 Km si queremos verlos.

---

**Problema** Un haz plano de longitud de onda  $\lambda$  incide normalmente sobre un plano que contiene dos rendijas idénticas de anchura  $b$  separadas una distancia  $d$ . Se observa la intensidad en el plano focal imagen de una lente convergente de focal imagen  $f'$ . Delante de una de las rendijas se coloca una lámina planoparalela de espesor  $\ell$  e índice de refracción  $n$ . Considérese que la amplitud de la onda no cambia al atravesar dicha lámina. Calcúlese el punto del plano focal imagen en el que se forma el máximo de intensidad de orden  $m = 0$ . Estímese el orden  $m$  del máximo que tiene la mayor intensidad. Para este apartado considérese  $n = 1.5$  y  $\ell = 200\lambda$ .

---

(<http://fig.alqua.org>)

**Figura 11.16:** las trayectorias que van a interferir son paralelas entre las aberturas y la lente delgada.

**Respuesta** Parametrizaremos el punto del plano focal imagen donde  $M = 0$  por  $x'$  o  $\theta'$ .

Las dos aberturas producirán una distribución de intensidades de interferencia–difracción. El término que identificamos como interferencia es el primer factor en

$$I(x') \propto (1 + \cos \varphi) \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^2$$

si las intensidades son, como es el caso, iguales.  $\varphi = 2\pi M = 0$  es la condición que debemos imponer sobre la variable  $\varphi$ , que es la diferencia de fase entre las ondas que pasan por cada una de las rendijas.

Una forma de resolverlo es plantear la integral de FF, identificando la variable allí donde aparezca. Pero es más rápido calcularla directamente por métodos geométricos.

Si los ángulos son grandes,  $\tan \theta' = \frac{x'}{f'}$ . Si son pequeños podemos (y vamos a hacerlo) sustituir la tangente por el seno.

Como la incidencia es normal, los planos equifase son paralelos al plano de las aberturas. Al entrar una onda en el medio refractivo, la velocidad de fase de ambas ondas ya no será la misma. A partir de un plano perpendicular a las ondas planas que salen de la abertura inclinadas con ángulo  $\theta'$  ya no hay diferencia de fase, por lo que el problema se reduce a calcular la diferencia de camino óptico entre las trayectorias que se muestran en la figura. La diferencia (camino por abajo – camino por arriba) es

$$l + d \sin \theta' - nl$$

o, en términos de fase

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} (d \sin \theta' - l(n-1)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

de aquí se extrae que  $\sin \theta' = \frac{l(n-1)}{d} \simeq \frac{x'}{f'}$ , por lo que

$$x' = f' \frac{l(n-1)}{d}$$

que es la solución suponiendo el ángulo  $\theta'$  pequeño.

## 11 Ejercicios y problemas

En cuanto al orden del máximo de mayor intensidad, hay que recordar que el segundo factor

$$I(x') \propto (1 + \cos \varphi) \left( \frac{\sin \phi}{\phi} \right)^2$$

modula la intensidad del primero. La variable  $\phi$  es función de  $x'$ , por lo que podemos calcular el  $x'$  para el que la difracción tiene su centro de intensidad, y de ahí pasar al número  $M$  correspondiente. En FRAUNHOFER:

$$\phi = \frac{kx' b}{f' 2}$$

que tenía máximo en  $\phi = 0$  o bien,  $x' = 0$  o  $\theta' = 0$ . Llevándolo a

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi}{\lambda} \left( d \frac{x'}{f'} - l(n-1) \right) \\ &= 2\pi M \end{aligned}$$

tenemos  $M = -\frac{l(n-1)}{\lambda} = -100$ .

*Comentario:* en todos los problemas que hemos visto hemos visto que el máximo de difracción siempre está en la dirección de incidencia del haz, pues ése es el resultado de la OG. Se puede aprovechar este resultado para decir que el máximo de difracción estará en la dirección (la normal) de incidencia del haz plano, es decir en el centro del plano focal imagen.

### 11.2. Otros ejercicios y problemas (por resolver)

1. Clasificar los cristales cuyos tensores dieléctricos son los siguientes

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y hallar los ejes principales.

2. 3Una onda armónica plana se propaga en un medio uniáxico estando el eje óptico en la dirección  $z$ . La fase se propaga en la dirección  $x$ . Demostrar que  $\mathbf{E}$  siempre está en el plano  $yz$ . Si en  $x = 0$  la onda vale  $\mathbf{E}(x = 0, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$  calcular el campo en  $x = d$ .
3. Calcular el ángulo formado por el rayo extraordinario y el ordinario que salen de la combinación de los dos prismas de la figura hechos del mismo material uniáxico, si  $\theta = 15^\circ$ ,  $n_o = 1.66$  y  $n_e = 1.49$ .
4. Un detector situado a una altura  $h$  sobre el océano recibe ondas de frecuencia  $\nu$  procedentes de una estrella lejana. Al detector llega la onda directa desde la estrella y la reflejada en la superficie del océano. Encontrar el valor de la intensidad

detectada en función del ángulo  $\alpha$  que la estrella forma sobre el horizonte. Calcular la visibilidad. Por sencillez considérese que el coeficiente de reflexión  $r$  es independiente del ángulo de incidencia. Si  $\nu = 10^8$  Hz,  $r = 0.7$  y  $\alpha = 45^\circ$  calcular el valor mínimo de  $h$  para que se tenga intensidad máxima.

5. Estimar el número de máximos de interferencia que hay en el máximo central de la difracción producida por dos rendijas idénticas iluminadas normalmente por un haz plano monocromático.
6. Calcular la posición de los máximos principales en aproximación de FRAUNHOFER para la red de la figura que está hecha de escalones de un medio transparente de índice de refracción  $n$ .
7. Considérese la onda armónica

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_c \mathbf{r} - \omega t)}$$

con vector de ondas complejo  $\mathbf{k}_c = \mathbf{k} + i\mathbf{a}$  y con cierto vector amplitud compleja dado por  $\mathbf{E}_0 = \alpha \mathbf{k} + \beta \mathbf{a}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares complejos. Esta onda se propaga en cierto medio de índice complejo  $n_c = n + ik$ . Determinar la condición o condiciones que han de verificar  $\alpha$  y  $\beta$ . Calcúlese el vector de POYNTING de esta onda.

8. Cierta medio dieléctrico e isotrópico posee una única frecuencia de resonancia  $\omega_0$ :
  - a) ¿Es posible que siendo  $\omega_1 < \omega_2$  se tenga  $\Re\{n(\omega)\} > \Re\{n(\omega)\}$
  - b) En las mismas condiciones del apartado anterior: ¿para cuál de las frecuencias se tendrá una velocidad de fase mayor? (para este apartado supóngase que el medio es transparente y la onda es plana).
9. Considérese una onda armónica y plana que incide sobre una superficie plana que seapra dos medios transparentes e isotrópicos de distinto índice. El primer medio tiene índice  $n$  y el segundo medio tiene índice 1. Se sabe que para incidencias desde el primer medio superiores a la del ángulo crítico (reflexión total) se produce en el segundo medio una onda cuya amplitud decrece exponencialmente con la distancia a la superficie de discontinuidad de índice. Se quiere saber en cuál de las dos situaciones siguientes el decrecimiento exponencial es mayor:
  - a) ángulo de incidencia próximo al ángulo crítico.
  - b) ángulo de incidencia próximo a  $\frac{\pi}{2}$ .

Supóngase en ambos casos que la amplitud en el segundo medio sobre la superficie de discontinuidad es la misma.

## 11 Ejercicios y problemas

10. Una onda armónica y plana de frecuencia  $\omega$  se propaga con vector de ondas en la dirección del eje  $Z$ . Esta onda atraviesa consecutivamente tres polarizadores cuyos ejes de transmisión están en el plano  $XY$ . El primer polarizador tiene el eje de transmisión en la dirección  $X$ . El eje del segundo polarizador gira a velocidad constante  $\Omega$ . El eje del tercer polarizador coincide con el eje  $Y$ . Se pide demostrar que tras atravesar los tres polarizadores la onda **no** es monocromática. Determinense las frecuencias que contiene.

11. Cierta onda se describe por la expresión  $\mathbf{V}(z, t) = \mathbf{V}_0 e^{-i(az^2 + bt^2 + 2\sqrt{ab}zt)}$ . ¿Es una onda plana? ¿Es armónica? ¿Cuál es la velocidad de propagación de las superficies donde  $\mathbf{V}$  toma el mismo valor?

12. Cierta campo eléctrico viene dado por la expresión

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \left[ \frac{k}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right] \cos \left[ \omega t - \frac{k}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \right]$$

donde  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  son dos vectores unitarios constantes y  $k = \frac{\omega}{c}$ . Se pide:

- ¿Es una onda armónica?
  - Calcular su representación compleja.
  - Calcular su velocidad de fase.
  - Expresar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  como superposición de ondas planas.
13. Hállese el valor instantáneo del vector de POYNTING  $\mathbf{S}$  de la onda electromagnética en el vacío cuyo campo eléctrico viene dado por

$$\mathbf{E} = \Re \left\{ E_0 (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) e^{i(kz - \omega t)} \right\}$$

14. El campo eléctrico correspondiente a una onda plana monocromática propagándose en la dirección  $Z$  tiene la forma

$$\mathbf{E} = A \sin(\omega t - kz) \mathbf{i} + B \cos(\omega t - kz) \mathbf{j}$$

donde  $A, B$  son constantes, con  $B > A$  e  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  son vectores unitarios en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. Calcúlese el promedio temporal del vector de POYNTING de dicho campo. Demuéstrese que  $\mathbf{E}$  puede escribirse como la superposición de dos campos, uno de ellos linealmente polarizado y el otro circularmente polarizado. Escribanse las expresiones para ambos campos.

15. Una onda armónica plana tiene frecuencia  $\omega$  y vector de ondas  $\mathbf{k}$  en cierto sistema de referencia. Aplicando una transformación de LORENTZ a la fase ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ ) demostrar que la frecuencia observada en un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  respecto al anterior es  $\omega' \simeq \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  si  $|\mathbf{v}| \ll c$ .



16. Un electrón ligado se ilumina con una onda armónica plana de frecuencia  $\omega$  siendo la amplitud del campo eléctrico de 10 kV/m. La frecuencia de resonancia del electrón es  $\omega_0 = 4 \times 10^{15}$  rad/s y la constante de amortiguamiento es  $\gamma = 10^8$  Hz. Calcular la amplitud de oscilación del electrón y compararla con  $c$  en los casos  $\omega = 5 \times 10^{15}$  rad/s y  $\omega = \omega_0$ .

17. Comprobar que  $\epsilon_0$  y  $\sigma$  tienen las mismas dimensiones.

18. De un medio se sabe que  $\epsilon_{gen}$  es un escalar complejo que no depende del punto y que sí depende de la frecuencia. Dígase si el medio es o no es homogéneo, absorbente, conductor, dispersivo o isótropo.

19. En cierto medio material se propaga una onda cuya representación compleja es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{3\omega}{c}z} e^{i(\frac{3\omega}{2c}z - \omega t)}$$

calcular los valores de  $n$  y  $\kappa$  de dicho medio.

20. Sea la onda armónica inhomogénea en un medio absorbente con campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

siendo  $\mathbf{k} = b(1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a} = b(1, 1, 0)$  y  $\mathbf{E}_0 = E_0(1, -1 + i, d)$ , donde  $b, d, E_0$  son constantes  $\in \mathfrak{R}$ . Dígase si los vectores *reales* correspondientes a  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{k}$  en  $t = 0$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  son perpendiculares entre sí.

21. En las proximidades de una resonancia

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \simeq 2\omega_0(\omega - \omega_0)$$

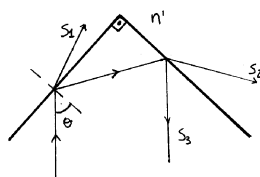
con lo que para un medio poco denso  $n$  y  $\kappa$  pueden aproximarse por

$$n \simeq 1 + \frac{Nq^2}{4m\epsilon_0\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}$$

$$\kappa \simeq \frac{Nq^2}{8m\epsilon_0\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}$$

demostrar que los valores máximos de  $n$  y de  $\kappa$  se obtienen para  $\omega = \omega_0 - \frac{\gamma}{2}$  y  $\omega_0$  respectivamente. Evaluar tales valores máximos para el caso  $N = 10^{22} \text{ m}^{-3}$ ,  $\omega_0 = 10^{16}$  rad/s y  $\gamma = 10^{11}$  Hz.

22. Considérese un medio poco denso cuyo índice de refracción en el visible viene determinado por una única frecuencia de resonancia en el ultravioleta. Despreciando  $\gamma$  y usando  $\omega \ll \omega_0$  demostrar que  $n$  puede aproximarse por  $n \simeq A + \frac{B}{\lambda^2}$  siendo  $A$  y  $B$  constantes y  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ .
23. Se tienen las mismas condiciones del problema anterior salvo que la frecuencia de resonancia  $\omega'_0$  está en el infrarrojo. Demostrar que su índice de refracción en el visible,  $n'$  puede aproximarse por  $n' \simeq A' - B'\lambda^2$  si  $\omega \gg \omega_0$ .



**Figura 11.17:** Diedro rectángulo.

24. Se dispone de tres medios dieléctricos cada uno de ellos con una sola resonancia situada en  $1000 \text{ \AA}$ ,  $4000 \text{ \AA}$  y  $8000 \text{ \AA}$  respectivamente (todo lo demás se supone idéntico en los tres medios). Se quiere tener la mayor dispersión  $\frac{dn}{d\omega}$  posible para  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ . ¿Cuál de los tres medios es el más adecuado?
25. Aproximar el índice de refracción de un dieléctrico para frecuencias mucho mayores que cualquiera de las de resonancia.
26. Demostrar que la conductividad en el límite  $\omega \rightarrow 0$  vale  $\sigma \simeq \frac{Nq^2}{m\gamma}$ . Si la conductividad del cobre en tal límite es  $\sigma = 5.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  y sabiendo que  $N = 8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$  calcular  $\gamma$ .
27. Demostrar que si el índice de refracción del segundo medio ( $n'$ ) es menor que el del primer medio ( $n$ ), siendo ambos reales con  $n > n'$  se tiene que  $t_{\parallel} > 1$  y  $t_{\perp} > 1$  para cualquier ángulo de incidencia menor que el crítico.
28. Consideremos un diedro rectángulo que separa dos dieléctricos de índices reales  $n$  y  $n'$  que verifican  $\frac{n}{n'} = \sqrt{3}$ . Un haz plano linealmente polarizado con azimut  $45^\circ$  sufre dos reflexiones tal y como se muestra en la figura 11.17. Hállense los dos valores posibles del ángulo de incidencia  $\theta$  para que el haz  $S_3$  esté linealmente polarizado perpendicular al plano del papel. Para cada una de las dos soluciones hállese la intensidad del haz  $S_3$  y también indíquese cualitativamente el tipo de polarización de los haces emergentes  $S_1$  y  $S_2$ .
29. Una lámina planoparalela de un medio dieléctrico, isótropo y homogéneo de índice de refracción  $n_0$  y espesor  $d$  está en contacto con un medio metálico de constantes  $n$  y  $\kappa$ . Una onda plana monocromática circularmente polarizada a derechas incide perpendicularmente desde el vacío sobre la superficie del dieléctrico, atraviesa éste, se refleja en el metal y emerge de nuevo al vacío (en sentido contrario al incidente). Determínese el estado de polarización del haz:
  - a) después de atravesar el dieléctrico a la ida (punto 1 de la figura).
  - b) después de reflejarse en el metal (punto 2 de la figura).
  - c) en el vacío a la vuelta (punto 3 de la figura).

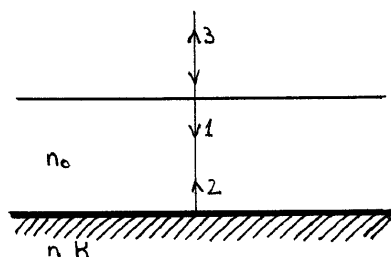
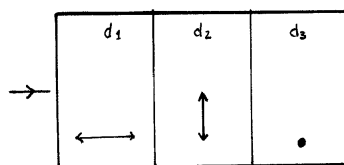


Figura 11.18: Problema 35

30. Una onda armónica plana incide desde el vacío sobre la superficie plana de un medio uniaxial con ángulo de incidencia  $30^\circ$ . El eje óptico está en el plano de incidencia y es normal a la superficie. Calcular el ángulo que forman los vectores de onda de las ondas extraordinaria y ordinaria si  $n_o = 1.658$  y  $n_e = 1.486$ .
31. Se tiene un prisma  $ABC$  de material uniaxial. La luz incide normalmente a la cara  $AB$ . Describir los rayos refractados por el prisma y su estado de polarización a la salida del prisma para las siguientes disposiciones del eje óptico:
- Paralelo a las aristas.
  - Normal a la cara  $AB$ .
  - Paralelo a la cara  $AB$  y normal a las aristas.
32. Un haz de luz linealmente polarizado pasa a través de una lámina de retardo  $\phi$  y de un polarizador. El eje óptico de la lámina está a  $45^\circ$  con el campo de la luz incidente y el eje de transmisión del polarizador es ortogonal al mismo. Demuéstrese que la intensidad emergente es proporcional a  $\sin^2(\phi/2)$ .
33. Un dispositivo óptico está constituido por un polarizador ideal y una lámina cuarto de onda pegados, formando sus ejes entre sí un ángulo  $\alpha$ . Sobre la cara del polarizador incide perpendicularmente un haz de luz linealmente polarizado vibrando en la dirección del eje óptico de la lámina. Se pide: (a) Calcular los semiejes y la orientación de la elipse de polarización del haz a la salida del dispositivo. (b) el valor de  $\alpha$  necesario para que la intensidad a la salida sea la misma que la incidente.
34. Consideremos un haz plano monocromático linealmente polarizado a  $45^\circ$  respecto del plano de la figura 11.19. Dicho haz incide perpendicularmente sobre una lámina planoparalela de espesor  $d_1$  de un medio anisótropo uniaxial con su eje óptico perpendicular a las caras. A continuación atraviesa otra lámina de espesor  $d_2$  del mismo material con su eje óptico paralelo a las caras y paralelo al plano del papel; y, por último, incide sobre una nueva lámina de espesor  $d_3$  del mismo material y con el eje óptico perpendicular al plano del papel. Determinar el estado de polarización a la salida cuando:



**Figura 11.19:** Medio anisótropo uniaxial con tres zonas.

- a)  $d_1 = d_2 = d_3$   
 b)  $d_1 \neq d_2 = d_3$ .
35. Un haz de luz es mezcla de luz no polarizada y luz elípticamente polarizada. Se coloca una lámina cuarto de onda cuyos ejes coinciden con los ejes principales de la elipse de polarización de la luz. ¿Cuál es la polarización de la luz a la salida de la lámina?
36. Dos ondas planas y monocromáticas de la misma longitud de onda inciden formando ángulos  $\alpha$  y  $-\alpha$  con la normal a una superficie que contiene una abertura cuadrada de lado  $a$ . Calcular la distribución de amplitudes en el plano focal imagen de una lente.
37. Un sistema óptico formador de imagen puede utilizarse con luz de longitud de onda  $\lambda_1$  o bien con luz de longitud de onda  $\lambda_2$ , siendo  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Razónese cualitativamente con cuál de las dos longitudes de onda el poder resolutivo del instrumento es mayor.
38. Una red de difracción que contiene 500 rendijas por milímetro se ilumina de forma normal con una onda plana y monocromática de  $\lambda = 500$  nm. Calcular los ángulos que forman con la normal a la red los máximos de orden 1 y 2.
39. Una red de difracción tiene un anchura de 10 cm. Calcular el número de rendijas necesarias y la separación entre ellas para que en el máximo de orden 1 se resuelva el doblete amarillo del sodio.
40. Se dispone de dos redes de difracción con 453 y 325 rendijas por milímetro respectivamente. La primera tiene una longitud de 11.2 mm y la segunda 17 mm. ¿Cuál tiene mayor poder resolutivo?

# Bibliografía

- [Born] BORN, M. y WOLF, E.: *Principles of optics*. Ed. Pergamon Press, Oxford 1980  
.
- [Jackson] JACKSON, J.D.: *Electrodinámica clásica*. Alhambra, 1980.  
[4 3](#)
- [Fowles] FOWLES, G.R.: *Introduction to modern optics*. Ed Dover, 1989.  
[7.1](#)
- [Guenther] GUENTHER, R.: *Modern optics*. Ed. John Wiley & Sons, 1990.
- [Hetch] HETCH, E. Y ZAJAC. A.: *Óptica*. Fondo educativo interamericano, 1977.
- [Stone] STONE, J.M.: *Radiation and Optics*. Mc Graw-Hill. Ed. New York 1963.

[2.2.1](#)

## *BIBLIOGRAFÍA*

# Historia

## 0.1.0 - 6 de junio de 2000

- Primera versión del documento, con la estructura del curso de Óptica II impartido por Alfredo Luis Aína en la facultad de Física de la UCM entre febrero y junio de 2000.
- Revisión de todo el documento y la confección de casi todas las figuras a mano –Almudena Arcones Segovia.

## 1.0.0 - 13 de mayo de 2002

- Revisión completa del documento con corrección de erratas y reescritura de pasajes poco claros –ATC.
- Introducción de entradas de índice alfabético, redacción de una introducción y revisión general (capítulo de ondas electromagnéticas en el vacío) –Marta Balbás Gamba.
- Pasadas las figuras a tamaños absolutos, lo que optimiza portabilidad entre plantillas (formas de presentación) –ATC.

## 1.1.0 - 10 de abril de 2004

- Cambio de licencia a la Creative Commons Attribution Share Alike Non Commercial.
- Actualización de plantilla a book-latex-es-b y metadatos al esquema 1.1 –ATC
- Incorporación de la versión más actual del manifiesto (2.0), así como de una descripción del proyecto LibrosAbiertos –ATC
- Pequeñas correcciones ortográficas y de estilo en texto y fórmulas–ATC

Las siguientes tareas merecen atención, a juicio de los editores y autores:

- Completar las figuras.
- Completar el trabajo de Marta Balbás Gamba con el índice alfabético, extendiéndolo a todos los capítulos.
- Comentar la bibliografía.
- Mejorar el tratamiento tipográfico de las unidades.
- Arreglar el problema con bibtex.





# Creative Commons Deed

## Attribution-NonCommercial-ShareAlike 1.0: Key License Terms

**Attribution.** The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees must give the original author credit.

**Noncommercial.** The licensor permits others to copy, distribute, display, and perform the work. In return, licensees may not use the work for commercial purposes – unless they get the licensor’s permission.

**Share Alike.** The licensor permits others to distribute derivative works only under a license identical to the one that governs the licensor’s work.

Whoever has associated this Commons Deed with their copyrighted work licenses his or her work to you on the terms of the Creative Commons License found here: [Legal Code \(the full license\)](#)

---

This is not a license. It is simply a handy reference for understanding the Legal Code (the full license) - it is a human-readable expression of some of its key terms. Think of it as the user-friendly interface to the Legal Code beneath. This Deed itself has no legal value, and its contents do not appear in the actual license.

Creative Commons is not a law firm and does not provide legal services. Distributing of, displaying of, or linking to this Commons Deed does not create an attorney-client relationship.

[Learn how to distribute your work using this license](#)



# Manifiesto de Alqua

## Origen y metas del proyecto

En 1999 fundamos el proyecto Alqua con el objetivo de promover la creación de un fondo de documentos libres de carácter científico que permita a cualquiera aprender con libertad.

Al constatar la duplicación de esfuerzos en la preparación de materiales didácticos para la física y con el deseo de compartir nuestros conocimientos, nos inspiramos en los principios de libertad que rigen el movimiento del software libre para establecer aquéllos de Alqua. Primero pensamos que lo que escribiésemos debería poder disfrutarse sin merma de libertad por las personas interesadas, y más tarde decidimos organizar nuestros esfuerzos para ayudar a otras personas que compartían nuestra visión a difundir sus saberes mediante un esfuerzo cooperativo.

Para hacer efectivos dichos principios decidimos que los documentos publicados deben ser libres en un sentido amplio: pueden reproducirse y distribuirse (gratuitamente o no, es irrelevante) pero también pueden modificarse y usarse como base para otros trabajos. A fin de evitar que estas libertades del lector-autor se restrinjan posteriormente, los documentos contienen una licencia que explica los derechos que posee y estipula que nadie que distribuya el documento, modificado o no, puede hacerlo de modo no libre.

## Las ventajas de los documentos libres

Actualmente es ilegal compartir o modificar la mayoría del conocimiento científico en fuentes impresas, que suelen ser inaccesibles para la mayoría de los estudiantes y bibliotecas del mundo en virtud de su precio y se actualizan con poca frecuencia debido a su sistema de distribución tradicional.

En este contexto los documentos libres presentan ciertas ventajas.

Por una parte, en algunas disciplinas los documentos libres permiten facilitar el establecimiento de un sistema de mérito reduciendo las barreras de precio y disponibilidad. El modelo de desarrollo libre para la ciencia se apoya sobre las libertades de distribución y modificación. Éstas se ven favorecidas por el medio digital, así como por la concepción del conocimiento como un patrimonio comunitario. Todo lo anterior permite reducir el coste del documento a una cantidad marginal y anima a que lo mejor se combine con lo mejor para producir un resultado excelente a la vez que actualizado.

Por otra parte, en casos donde la evaluación del mérito es más subjetiva, los documentos libres pueden aportar una base sobre la que elaborar con un menor esfuerzo diferentes perspectivas doctrinales o estéticas, mutaciones, iteraciones y apuestas que incentivan la

creación como un aspecto más del disfrute de la obra.

En suma, los documentos libres fomentan un acceso a la cultura más justo y completo. Para algunos dominios del conocimiento científico el proceso de desarrollo libre facilita la recombinación, lo que permite la producción de obras muy sofisticadas y completas mientras que en otros ámbitos facilita la difusión de perspectivas plurales y la experimentación creativa.

## Una nueva dinámica de creación y aprendizaje

Algunas personas que hemos conocido están interesadas por este modelo de colaboración, pero se preguntan qué clase de control tienen sobre sus documentos libres. La respuesta es sencilla: la licencia está diseñada de modo que a cada cual se le atribuya aquello de lo que es responsable y nada más. Para ello, se incluye en el documento una sección en la que se explica quién hizo qué y cuándo lo hizo.

Uno de los efectos más interesantes de introducir los documentos libres en el aula es que difuminan la frontera entre quien aprende y quien enseña. Los documentos libres son un puente para establecer contacto con una comunidad de interés mucho más vasta que la del centro educativo, permitiendo el aprendizaje continuo y fomentando una experiencia plural y transformadora: el criterio para participar en un documento es, solamente, hacerlo bien.

Un autor puede pensar que distribuir su documento bajo un copyright que restringe la libertad de copia es *más rentable* que otorgar mayores libertades. Esto no es necesariamente así, por varias razones.

En primer lugar, libre no quiere decir gratuito. Una editorial puede publicar un documento libre obteniendo beneficio de ello. De hecho, es una buena idea hacerlo dado lo agradable que resulta manejar un libro bien encuadernado. También los autores pueden aceptar una compensación de los lectores por su trabajo en un determinado documento.

En segundo lugar, la mayor parte de los autores son primeramente lectores. Cabe esperar, pues, que para la mayoría el enorme ahorro derivado del acceso a *muchos* documentos libres supere holgadamente el beneficio económico obtenido de *unos pocos* documentos no libres. La experiencia del software libre lo avala.

Finalmente, no se puede poner precio al beneficio social derivado de la existencia de documentos libres. Gracias a los derechos que uno posee sobre un documento libre puede adaptarlo para un curso académico eliminando lo que no es pertinente o es demasiado avanzado y complementando el tema con nuevas aportaciones, desde ejercicios o diagramas hasta apartados enteros.

Pensamos que las universidades u otras instituciones educativas podrían cumplir mejor su función social poniendo a disposición de la sociedad que las financia, en condiciones de libertad, su patrimonio más importante: el conocimiento.

El modelo de cooperación que proponemos (que anima al trabajo en equipo aunque no lo impone) permite abrir todas estas perspectivas y algunas más. Alqua intenta ofrecer los medios para esta tarea y relacionar, a través de los documentos libres, a los que tienen saberes que comunicar y a los que sienten curiosidad por dichos saberes.

## Conclusión

Alqua tiene una tarea muy ilusionante y tan ambiciosa que sólo es factible en comunidad. Por ello, pedimos a las personas que forman parte de instituciones o empresas que colaboren con Alqua para que éstas apoyen económicamente el proyecto o patrocinen ediciones impresas y donaciones a las bibliotecas públicas. Ciertamente, los medios materiales son necesarios, pero inútiles si, a nivel particular, no contamos con tu participación como individuo, aprendiendo y enseñando, para que los documentos libres en marcha y otros nuevos alcancen los altos niveles de calidad a los que aspiramos.

Te invitamos a construir un patrimonio científico que nos pertenezca a todos.

---

Versión 2.0, marzo de 2003

<http://alqua.org/manifiesto> Copyright (C) Álvaro Tejero Cantero y Pablo Ruiz Múzquiz, 2003. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/1.0/> or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.



# El proyecto libros abiertos de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el [manifiesto de Alqua](#) y las [directrices para documentos libres de Alqua](#). Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.

## Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.
- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.
- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.

- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

## ¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

## ¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, <http://alqua.org>



2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.
3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.
4. Si puedes, adjuntar al archivador una copia del [CD-ROM de documentos libres de Alqua](#) .
5. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a [librosabiertos@alqua.org](mailto:librosabiertos@alqua.org) .

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

## En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el [manifiesto de Alqua](#) , persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

---

(C) Álvaro Tejero Cantero, 2003. This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NoDerivs License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nd/1.0/> or send a letter to Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.



# Óptica electromagnética

Álvaro Tejero Cantero

## descripción

Un primer curso de óptica electromagnética que cubre los fenómenos de polarización, interferencia y difracción, así como la propagación en medios materiales, isotropos y anisotropos. Se explican las hipótesis simplificadoras que conducen a la óptica geométrica. Contiene problemas y numerosas figuras.

## requisitos

- Álgebra y cálculo de primero de carrera.
- Conveniente familiaridad con las ecuaciones de Maxwell y la notación exponencial compleja.

<http://alqua.org/libredoc/OE>

Aprende en comunidad - <http://alqua.org> <

## otros documentos libres

Variedades, tensores y física - Óptica electromagnética - Ecuaciones diferenciales ordinarias - Introducción a la física cuántica, segunda parte - Redes y sistemas - Sistemas Operativos - Geometría simpléctica - Física del láser - Análisis funcional - Geografía general de España (en preparación).

<http://alqua.org/libredoc/>